Lokale Beschreibung von Bündeln I

Tobias Fiele

12.01.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Automorphismen von trivialen Bündeln

Wir haben bereits bei trivialen Vektorbündeln gesehen, dass die B-Morphismen $u : B \times \mathbb{F}^n \to B \times \mathbb{F}^m$ die Form $u(b, x) = (b, f(b)u)$ haben,
wobei $f : B \to L(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ eine Abbildung ist. Außerdem ist u ein Automorphismus, falls $n = m$ und $f(b) : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ ein Isomorphismus für alle $b \in B$ ist. Ein ähnliches Resultat erhalten wir auch für das Produkt G-Prinzipalbündel.

1.1 Theorem

Sei $\xi = (B \times G, p, B)$ das Produkt G-Prinzipalbündel. Dann haben die B-Automorphismen von ξ die Form

$$h_g : B \times G \to B \times G;\ h_g(b, s) = (b, g(b)s)$$

wobei $g : B \to G$ eine Abbildung ist.

Beweis: Aus der Gleichung

$$h_g(b, st) = (b, g(b)st) = (b, g(b)s)t = h_g(b, s)t$$

folgt, dass h_g ein Morphismus ist. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $h_{g'}$, wobei $g'(b) = g(b)^{-1}\ \forall b \in B$.
Sei nun $h : \xi \to \xi$ ein B-Automorphismus. Wir wissen also, dass
$h(b, s) = (b, f(b, s))$ für eine Abbildung $f : B \times G \to G$, da $ph = p$. Sei $g(b) = f(b, 1)$, dann folgt:

$$h(b, s) = h(b, 1)s = (b, f(b, 1))s = (b, g(b))s = (b, g(b)s) = h_g(b, s)$$

2 Karten und Übergangsfunktionen

Sei G eine Gruppe und in diesem Kapitel alle Prinzipalbündel G-Bündel. Für einen Raum B sei $\theta(B)$ das Produkt G-Bündel $(B \times G, p, B)$. Der Totalraum eines eingeschränkten Bündels $\eta_{|A}$, sei ein Teilraum des Totalraums von η

2.1 Definition

Sei η ein G-Prinzipalbündel über B und $U \subseteq B$ offen. Eine <u>Karte</u> von η über U ist ein Isomorphismus $h : \theta(U) \to \eta_{|U}$.
Die Karte eines k-dim Vektorbündels η ist ein U-Vektorbündelisomorphismus $(U \times \mathbb{F}^k, p, B) \to \eta_{|U}$
Wenn $h : \theta(U) \to \eta_{|U}$ eine Karte über U ist und $V \subseteq U$ offen, so lässt sich h wie folgt auf V einschränken: $\theta(V) \to (\eta_{|U})_{|V} = \eta_{|V}$

2.2 Lemma

Für zwei Karten $h_1, h_2 : \theta(U) \to \eta_{|U}$ von η über U, gibt es eine Abbildung $g : U \to G$, so dass

$$h_1(b, s) = h_2(b, g(b)s) \; \forall (b, s) \in U \times G$$

Bemerkung: Für zwei Karten von n-dim Vektorbündeln ist diese Abbildung g gegeben durch $g : U \to Gl_n(\mathbb{F})$

Beweis: $h_2^{-1} h_1 : \theta(U) \to \theta(U)$ ist ein Automorphimus und hat damit nach 1.1 die Form:

$$h_2^{-1} h_1(b, s) = (b, g(b)s)$$

Also $h_1(b, s) = h_2(b, g(b)s)$

2.3 Definition

Ein <u>Atlas</u> von Karten für ein G-Prinzipalbündel η ist eine Familie von Paaren $\{(V_i, h_i)\}_{i \in I}$, so dass h_i eine Karte von η über V_i ist und $\{V_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von B.
Ein Atlas ist vollständig, wenn er alle Karten eines Bündels enthält.
Es ist klar, dass ein Bündel lokal trivial ist genau dann, wenn es einen Atlas besitzt.
Sei nun $\{(V_i, h_i)\}_{i \in I}$ ein Atlas für ein Bündel η. Wir schränken h_i, h_j auf $V_i \cap V_j$ ein, benutzen 2.2 und erhalten eine eindeutige Abbildung

$g_{i,j} : V_i \cap V_j \to G$, so dass $h_j(b,s) = h_i(b, g_{i,j}(b)s)$ für alle $(b,s) \in (V_i \cap V_j) \times G$
Die Funktionen $g_{i,j}$ erfüllen dann die folgenden Eigenschaften:

(T1) Für jedes $b \in V_i \cap V_j \cap V_k$ gilt: $g_{i,k}(b) = g_{i,j}(b)g_{j,k}(b)$

(T2) Für jedes $b \in V_i$ ist die Abbildung $g_{i,i}(b) = 1_G$

(T3) Für jedes $b \in V_i \cap V_j$ gilt: $g_{i,j}(b) = g_{j,i}(b)^{-1}$

zu T1 Es gilt: $(b, g_{i,j}(b)g_{j,k}(b)s) = h_i^{-1}h_jh_j^{-1}h_k(b,s) = h_i^{-1}h_k(b,s) = (b, g_{i,k}(b)s)$

zu T2 klar (folgt aus T1 mit $g_{i,i}(b) = g_{i,i}(b)g_{i,i}(b)$)

zu T3 folgt aus T1 und T2

2.4 Definition

Ein System von Übergangsfunktionen auf einem Raum B, bezüglich einer offenen Überdeckung $\{V_i\}_{i\in I}$ von B, ist eine Familie von Abbildungen
$g_{i,j} : V_i \cap V_j \to G$ mit $i, j \in I$, die der Eigenschaft (T1) genügen (Und damit auch (T2) und (T3) erfüllen).

Mit den obigen Überlegungen existiert also für jeden Atlas $\{(V_i, h_i)\}_{i\in I}$ eines G-Prinzipalbündels η ein System von Übergangsfunktionen $\{g_{i,j}\}_{i,j\in I}$, welches allein durch $h_j(b,s) = h_i(b, g_{i,j}(b)s)$ eindeutig bestimmt ist.

2.5 Lemma

Seien $\{(V_i, h_i)\}_{i\in I}$ und $\{(V_i, h_i')\}_{i\in I}$ zwei Atlanten eines G-Prinzipalbündels η mit zugehörigen Übergangsfunktionen $\{g_{i,j}\}$ und $\{g'_{i,j}\}$. Sei $r_i : V_i \to G$ die eindeutige Abbildung, so dass $h_i'(b,s) = h_i(b, r_i(b)s)$ für $b \in V_i, s \in G$
Dann gilt:

$$g'_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1}g_{i,j}(b)r_j(b) \ \forall b \in V_i \cap V_j$$

Beweis:
Es gilt:

$$h_j'(b,s) = h_j(b, r_j(b)s) = h_i(b, g_{i,j}(b)r_j(b)s)$$

Und:

$$h_i'(b, g'_{i,j}(b)s) = h_i(b, r_i(b)g'_{i,j}(b)s)$$

Daraus folgt: $r_i(b)g'_{i,j}(b) = g_{i,j}(b)r_j(b)$ und dann die Behauptung.

2.6 Definition

Zwei Systeme von Übergangsfunktionen $\{g_{i,j}\}_{i,j\in I}$ und $\{g'_{i,j}\}_{i,j\in I}$ bezüglich der gleichen offenen Überdeckung $\{V_i\}_{i\in I}$ eines Raumes B, sind äquivalent, falls Abbildungen $r_i : V_i \to G$ existieren, die die Gleichung

$$g'_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1}g_{i,j}(b)r_j(b)\ \forall b \in V_i \cap V_j$$

erfüllen. Dies ist eine Äquivalenzrelation:

Reflexivität: klar

Symmetrie: $g'_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1}g_{i,j}(b)r_j(b) \Rightarrow g_{i,j}(b) = r_i(b)g_{i,j}(b)r_j(b)^{-1}$

Transitivität: Es gelte: $g'_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1}g_{i,j}(b)r_j(b)$ und $g''_{i,j}(b) = t_i(b)^{-1}g'_{i,j}(b)t_j(b)$
Dann aber auch: $g''_{i,j}(b) = \underbrace{t_i(b)^{-1}r_i(b)^{-1}}_{(r_i(b)t_i(b))^{-1}}g_{i,j}(b)r_j(b)t_j(b)$

2.7 Theorem

Seien η und η' zwei G-Prinzipalbündel über einem Raum B.
Sei $\{(V_i, h_i)\}_{i\in I}$ ein Atlas von η mit Übergangsfunktionen $\{g_{i,j}\}_{i,j\in I}$.
Sei $\{(V_i, h'_i)\}_{i\in I}$ ein Atlas von η' mit Übergangsfunktionen $\{g'_{i,j}\}_{i,j\in I}$.
Dann gilt:

$$\eta \text{ und } \eta' \text{ isomorph über B } \Leftrightarrow \{g_{i,j}\}_{i,j\in I} \text{ und } \{g'_{i,j}\}_{i,j\in I} \text{ äquivalent}$$

Beweis: $\Rightarrow$: Sei $f : \eta \to \eta'$ ein Isomorphismus von Bündeln. Aus $h_j(b, s) = h_i(b, g_{i,j}(b)s)$ folgt, dass

$$fh_j(b, s) = fh_i(b, g_{i,j}(b)s)$$

Also ist $\{(V_i, fh_i)\}_{i\in I}$ ein Atlas von η' mit Übergangsfunktionen $\{g_{i,j}\}_{i,j\in I}$. Mit Lemma 2.5 sind dann $\{g_{i,j}\}$ und $\{g'_{i,j}\}$ äquivalent.

$\Leftarrow$: Sei also $g'_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1}g_{i,j}(b)r_j(b)\ \forall b \in V_i \cap V_j$ gegeben.
Definiere:

$$f_i : V_i \times G \to V_i \times G;\ f_i(b, s) = (b, r_i(b)^{-1}s)$$

Dies ist offensichtlich ein Automorphismus für alle $i \in I$.
Definiere dann $f : \eta \to \eta'$ lokal durch: $f_{|\eta_{|V_i}} = h'_i f_i h_i^{-1}$ oder anders ausgedrückt: $h'_i f_i = fh_i$ auf $V_i \times G$

Dies liefert lokal und dann unter Annahme der Wohldefiniertheit auch global einen Isomorphismus zwischen η und η'.
Zu prüfen ist also noch die Wohldefiniertheit. Sei also $(b, s) \in (V_i \cap V_j) \times G$
Zu zeigen ist, dass:

$$h'_j f_j(b, s) = f h_j(b, s) \overset{!}{\Rightarrow} h'_i f_i(b, s) = f h_i(b, s)$$

Dazu:

$$h'_j f_j(b, s) = h'_j(b, r_j(b)^{-1} s) = h'_i(b, g'_{i,j}(b) r_j(b)^{-1} s) = h'_i(b, r_i(b)^{-1} g_{i,j}(b) s) = h'_i f_i(b, g_{i,j}(b) s)$$

Und:

$$f h_j(b, s) = f h_i(b, g_{i,j}(b) s)$$

Also folgt: $h'_i f_i = f h_i$

3 Konstruktion von Bündeln mit gegebenen Übergangsfunktionen

3.1 Theorem

Sei $\{V_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von einem Raum B, G eine topologische Gruppe und $\{g_{i,j}\}_{i,j\in I}$ ein System von Übergangsfunktionen bezüglich der offenen Überdeckung $\{V_i\}_{i\in I}$. Dann existiert ein G-Prinzipalbündel ξ und ein Atlas $\{(V_i, h_i)\}_{i\in I}$ für ξ, so dass $\{g_{i,j}\}_{i,j\in I}$ die zu diesem Atlas zugehörigen Übergangsfunktionen sind. ξ ist dann eindeutig bis auf B-Isomorphismen.

Beweis: Falls ein Bündel ξ existiert, so ist es nach 2.7 auch eindeutig bis auf B-Isomorphismen, da $\{g_{i,j}\}_{i,j\in I} \sim \{g_{i,j}\}_{i,j\in I}$
Konstruiere nun ξ wie folgt:
Sei Z die disjunkte Vereinigung der Familie $\{V_i \times G\}_{i\in I}$ über I. Ein Element von Z ist von der Form (b, s, i) mit $b \in V_i,\ s \in G$. Seien nun $q_i : V_i \times G \to Z$ die Inklusionen, die gegeben sind durch $(b, s) \mapsto (b, s, i)$. Z trägt die feinste Topologie, so dass alle q_i stetig sind.
Definiere nun eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf Z wie folgt:

$$(b, s, i) \sim (b', s', j) \Leftrightarrow b = b' \wedge s = g_{j,i}(b)s$$

Nach den Eigenschaften T1,T2,T3 aus 2.3 ist dies eine Äquivalenzrelation. Sei nun $X = Z/\sim$, $q : Z \to X$ die kanonische Quotientenabbildung und $< b, s, i >$ die Äquivalenzklasse von (b, s, i) in X. Definiere:

$$h_i : V_i \times G \xrightarrow{q_i} Z \xrightarrow{q} X \ \forall i \in I$$

Definiere $p : X \to B$ durch $p(< b, s, i >) = b$. Als Projektion unter einer Quotientenabbildung ist p offen. Es gilt dann:

$$ph_i(b, s) = pqq_i(b, s) = pq(b, s, i) = p(< b, s, i >) = b$$

Und $h_i : V_i \times G \to X$ ist injektiv (da i fest) und stetig (als Verknüpfung stetiger Abbildungen).
Sei nun die Gruppenwirkung von G auf Z gegeben durch $(b, s, i)t = (b, st, i)$. Dann gilt natürlich auch:

$$(b, s, i) \sim (b, s', j) \Rightarrow (b, st, i) \sim (b, s't, j)$$

Also wird X zu einem G-Raum unter der Wirkung von G definiert durch

$< b, s, i > t =< b, st, i >$

Es ist klar, dass $p(x) = p(x') \Leftrightarrow xt = x'$ für ein $t \in G$.
Ebenso gilt: $xt = x \Rightarrow t = 1_G$

Definiere die Funktion $\tau : X^* = \{(x, xs) \in X \times X | s \in G\} \to G$ durch:

$$\tau(< b, s_1, i >, < b, s_2, j >) = \tau(< b, s_1, i >, < b, g_{i,j}(b)s_2, i >) = s_1^{-1} g_{i,j}(b)s_2$$

Dann gilt:

$$< b, s_1, i > \tau(< b, s_1, i >, < b, s_2, j >) =< b, s_1, i > s_1^{-1} g_{i,j}(b)s_2 =< b, g_{i,j}(b)s_2, i >=< b, s_2, j >$$

Diese Eigenschaften machen $\xi = (X, p, B)$ zu einem G-Prinzipalbündel.
Da nun $h_i(b, s)t =< b, s, i > t =< b, st, i >= h_i(b, st)$ gilt, sind die Abbildungen

$$h_i : V_i \times G \to h_i(V_i \times G) = \xi_{|V_i}$$

G-Isomorphismen. Und da:

$$h_i(b, g_{i,j}(b)s) =< b, g_{i,j}(b)s, i >=< b, s, j >= h_j(b, s)$$

ist $\{g_{i,j}\}_{i,j \in I}$ das System der Übergangsfunktionen für den Atlas $\{(V_i, h_i)\}_{i \in I}$

4 Übergangsfunktionen und induzierte Bündel

4.1 Lemma

Sei η ein G-Prinzipalbündel über B, $f : B_1 \to B$ eine stetige Abbildung und $\{(V_i, h_i)\}_{i\in I}$ ein Atlas von η mit Übergangsfunktionen $\{g_{i,j}\}_{i,j\in I}$. Dann ist $\{(f^{-1}(V_i), f^*(h_i))\}_{i\in I}$ ein Atlas für $f^*(\eta)$ mit Übergangsfunktionen $\{g_{i,j}f\}_{i,j\in I}$

Beweis: Das $\{f^{-1}(V_i)\}$ offene Überdeckung von B_1 ist klar.
$f^*(h_i) : \theta(f^{-1}(V_i)) \to f^*(\eta)_{|f^{-1}(V_i)}$ ist gegeben durch:

$$f^*(h_i)(b_1, s) = (b_1, h_i(f(b_1), s))$$

Nach Voraussetzung gilt: $h_i(b, g_{i,j}(b)s) = h_j(b, s)$. Und dann:

$$f^*(h_i)(b_1, g_{i,j}(f(b_1))s) = (b_1, h_i(f(b_1), g_{i,j}(f(b_1))s))$$

$$= (b_1, h_j(f(b_1), s) = f^*(h_j)(b_1, s)$$

Also ist $\{g_{i,j}f\}$ das System der Übergangsfunktionen für $f^*(\eta)$

5 Lokale Beschreibung von Vektorbündelmorphismen

Für dieses Kapitel seien $\xi = (X, p, B), \eta = (X', p', B), \zeta = (X'', p'', B)$ drei Vektorbündel über B mit Atlanten $\{(U_a, h_a)\}_{a \in A}$, $\{(V_i, h'_i)\}_{i \in I}$ und $\{(W_r, h''_r)\}_{r \in R}$. Seien $\{g_{a,b}\}_{a,b \in A}$, $\{g'_{i,j}\}_{i,j \in I}$ und $\{g''_{r,s}\}_{r,s \in R}$ die zugehörigen Übergangsfunktionen.

Sei $u : \xi \to \eta$ ein Vektorbündelisomorphismus.

Auf der offenen Menge $U_a \cap V_i$ gibt es dann den folgenden Vektorbündelmorphismus:

$$(U_a \cap V_i) \times \mathbb{F}^n \stackrel{h_a}{\to} \xi_{|U_a \cap V_i} \stackrel{u}{\to} \eta_{|U_a \cap V_i} \stackrel{(h'_i)^{-1}}{\to} (U_a \cap V_i) \times \mathbb{F}^m$$

Diese Komposition hat dann die Form $(z, x) \mapsto (z, u_{i,a}(z)x)$, wobei
$u_{i,a} : U_a \cap V_i \to L(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$

5.1 Lemma

Mit den obigen Notationen gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der Vektorbündelmorphismen $u : \xi \to \eta$ und der Menge der Abbildungsfamilien $\{u_{i,a}\}_{i \in I, a \in A}$, so dass für $z \in U_a \cap U_b \cap V_i \cap V_j$ gilt:

$$u_{j,b}(z) = g'_{j,i}(z) u_{i,a}(z) g_{a,b}(z) \quad (\star)$$

Die Abbildungen $u_{i,a}$, die zu u gehören, sind gegeben durch:

$$(h'_1)^{-1} u h_a(z, x) = (z, u_{i,a}(z)x)$$

Beweis: Überprüfen der Gleichung $(\star)$ bei gegebenem $u : \xi \to \eta$. Es gilt:

$$h'_j(z, u_{j,b}(z)x) = uh_b(z, x) = uh_a(z, g_{a,b}(z)x)$$

$$= h'_i(z, u_{i,a}(z) g_{a,b}(z)x) = h'_j(z, g'_{j,i}(z) u_{i,a}(z) g_{a,b}(z)x)$$

Aber h'_j ist ein Isomorphismus. Also gilt $(\star)$

Sei nun eine Familie $\{u_{i,a}\}_{i \in I, a \in A}$ gegeben, die $(\star)$ erfüllt. Ein zugehöriger Morphismus $u : \xi \to \eta$ ist dann eindeutig definiert durch

$$uh_a(z, x) = h'_i(z, u_{i,a}(z)x)$$

Dies ist wohldefiniert, da die Bilder der h_a ganz X überdecken und auf den Schnitten gibt uns $(\star)$ Eindeutigkeit.

Beobachtung: Falls $\xi = \eta$ mit denselben Karten, sehen wir, dass

$$u = 1 \Leftrightarrow u_{i,a}(z) = 1 \; \forall z \in U_a \cap V_i$$

Man spricht außerdem von der Familie $\{u_{i,a}\}$ die $u : \xi \to \eta$ lokal beschreibt bezüglich der Atlanten $\{(U_a, h_a)\}$ von ξ und $\{(v_i, h'_i)\}$ von η

5.2 Lemma

Mit den obigen Notationen, sei $\{u_{i,a}\}$ die Familie, die $u : \xi \to \eta$ lokal beschreibt und $\{v_{r,i}\}$ die Familie, die $v : \eta \to \zeta$ lokal beschreibt. Sei $uv : \xi \to \zeta$ mit lokaler Beschreibung $\{w_{r,a}\}$. Dann gilt für $z \in U_a \cap V_i \cap W_r$ die Gleichung:

$$w_{r,a}(z) = v_{r,i}(z) u_{i,a}(z)$$

Beweis: Sei $z \in U_a \cap V_i \cap W_r$. Es gilt:

$$(z, w_{r,a}(z)x) = (h''_r)^{-1} vuh_a(z, x) = ((h''_r)^{-1} vh'_i)((h'_i)^{-1} uh_a)(z, x)$$

$$= ((h''_r)^{-1} vh'_i)(z, u_{i,a}(z)x) = (z, v_{r,i}(z) u_{i,a}(z)x)$$