Wintersemester 2010/2011

Topologieseminar

# Faserbündel


Michael Espendiller

16. Oktober 2010

Universität Münster -


## Inhaltsverzeichnis



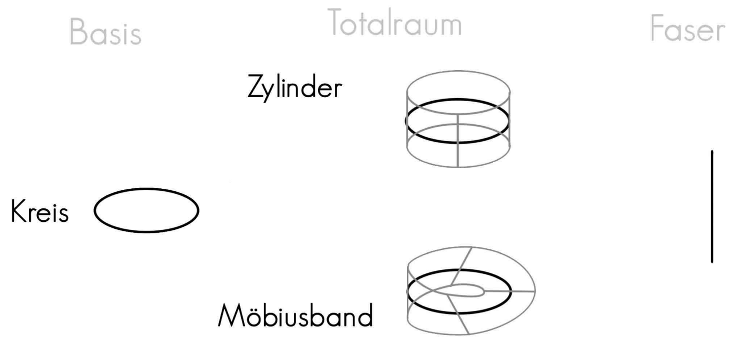
## 1 Allgemeine Bündel

Wir wollen zunächst ganz allgemein „nackte“ Bündel einführen. Diese werden dann später mit mehr Struktur versehen.

**Definition.** Ein Bündel ist eine stetige Abbildung $p : E \to B$ zwischen den topologischen Räumen E und B.
E heißt Totalraum, B Basis und p Projektion. Der Raum $p^{-1}(b) \subseteq E$ wird Faser über $b \in B$ genannt. Wir notieren das Bündel als (E,p,B).

**Beispiele.** 1. Ein anschauliches Beispiel bilden Zylinder und Möbiusband:
Sei die Basis der Kreis $B = S^1$, $E = (-1, 1) \times S^1$ der Totalraum des Zylinders und $p : E \to B$ die Projektion auf die erste Komponente.

Anschaulich wird jedem Punkte von $x \in S^1$ eine Faser $p^{-1}(b) = \{b\} \times (-1, 1) \cong (-1, 1)$ angeheftet. Dadurch wird aus dem Kreis ein Zylinder. Klebt man die Fasern allerdings auf eine andere Art an die Basis, so entsteht das Möbiusband (s. Bild). Wir




sehen also, dass die Topologie des Totalraumes beide Strukturen miteinander „verklebt“ und damit die Struktur des Bündels festlegt.

2. Ein Bündel der Form $p : B \times F \to F$ nennt man triviales Bündel mit Fasern $p^{-1}(b) = \{b\} \times F \tilde{=} F$. Wobei $p(b, f) = f$

3. $TS^n = \bigcup_{b \in S^n} \{b\} \times T_b S^n$ und $p : TS^n \to S^n, (b, v) \mapsto b$ ist das Tangentialbündel der Mannigfaltigkeit $S^n$. Und insbesondere gilt für für gerade n, dass das Bündel nicht trivial ist. (Sphären gerade Dimensonen sind nicht orientierbar)

4. Sei G Gruppe mit einer Topologie versehen. $H \subseteq G$ Untergruppe.
   Dann ist $p : G \to G/H, g \mapsto gH$. Die Fasern sind dann $p^{-1}(\underbrace{gH}_{\in G/H}) = \underbrace{gH}_{\subseteq G} \tilde{=} H$

## 2 Morphismen und Schnitte

Wir wollen nun Bündelmorphismen einführen.

**Definition.** Ein Bündelmorphismus $(u, f) : (E_1, p_1, B_1) \to (E_2, p_2, B_2)$ zwischen zwei Bündeln ist ein Paar von Abbildungen $u : E_1 \to E_2$ und $f : B_1 \to B_2$ mit $p_2 \circ u = f \circ p_1$. In anderen Worten: folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

**Fakt.** *(1) Ist $p_1$ surjektiv, so ist f eindeutig durch u bestimmt*
*(2) Verkettungen von Bündelmorphismen sind Bündelmorphismen*

*Beweis.* einfach ☐

**Beispiele.** 1. Identität: $id_{E,p,B} := (id_e, id_B) : (E,p,B) \to (E,p,B)$

2. B-(Bündel)morphismen: $(u, id_b) : (E_1, p_1, B) \to (E_2, p_2, B)$
$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$
Bündelmorphismen dieser Art - also Morphismen, die die Basis festhalten - werden auch B-Bündelmorphismen genannt.

3. $\pi_2 : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ und $\pi_3 : S^3 \to \mathbb{R}P^3$ sind zwei Bündel. Und die Hopf-Faserung $f : S^3 \to S^2$ definiert durch $(x_1, y_1, x_2, y_2) \to (x_1x_2+y_1y_2, x_1y_2-x_2y_1, x_1^2+y_1^2-y_2^2-x_2^2)$ induziert eine Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}P^3 \to \mathbb{R}P^2$ durch $\widetilde{f}([x]) = [f(x)]$. Und wegen $\tilde{f} \circ \pi_3 = \pi_2 \circ f$ haben wir einen Bündelmorphismus.

*Bemerkung* 1. Bündel bilden eine Kategorie $\underline{Bun}$. Wobei die Objekte Bündel sind, die Morphismenmengen durch die Menge aller Bündelmorphismen gegeben sind und die Komposition die Komposition von Bündelmorphismen ist. $\underline{Bun}_B$ bezeichne die Unterkategorie der Bündel mit der Menge aller B-Morphismen als Morphismen.

**Definition.** Seien A, B zwei Bündel.
Ein Bündelmorphismus $\mu : A \to B$ ist ein Bündelisomorphismus, falls ein Bündelmorphmismus $\mu^{-1} : B \to A$ existiert mit $\mu \circ \mu^{-1} = id_B$ und $\mu^{-1} \circ \mu = id_A$ (Natürlich gilt hier $A = (E_1, p_1, B_1)$ und $B = (E_2, p_2, B_2)$ und $\mu = (u, f)$ wie oben.)

Wir führen nun den Schnitt eines Bündels ein, welche eine Art „verallgemeinerte Funktion“ darstellen.

**Definition.** Ein Schnitt eines Bündels $p : E \to B$ ist eine stetige Abbildung $s : B \to E$ mit $p \circ s = id_B$

**Beispiel.** Für eine glatte Mannigfaltigkeit M ist ein Schnitt $s : M \to TM$ ein stetiges Vektorfeld auf M. TM ist das Tangentialbündel von M.

Anschaulich ist ein Schnitt eine Abbildung jedes Punktes $b \in B$ in seine Faser, also $s(b) \in p^{-1}(b)$

**Fakt.** *Ist $p : B \times F \to B$ ein triviales Bündel, so ist ein Schnitt $s : B \to B \times F$ von der Gestalt $s(b) = (b, f(b))$ für eine (eindeutig festgelegt) stetige Funktion $f : B \to F$.*

*Beweis.* Jede Abbildung $s : B \to B \times F$ hat die Form $s(b) = (s'(b), f(b))$. Da nun s ein Schnitt ist, gilt $s'(b) = p(s(b)) = b$. □

Also definiert jede stetige Funktion $f : B \to F$ einen Schnitt des trivialen Bündels $p : B \times F \to B$.
Achtung: Nicht jeder Schnitt besitzt solch eine globale Darstellung (und manchmal gibt es sogar gar keine Schnitte).

*Bemerkung* 2. Schnitte $s : B \to E$ können auch als Bündelmorphismen $(s, id_B) : (B, id_B, B) \to (E, p, B)$ betrachtet werden. Also übertragen sich alle Sachverhalte von Bündelmorphismen auch auf Schnitte.

## 3 Faserbündel oder lokal triviale Bündel

**Definition.** Ein Bündel $(E, p, B)$ heißt trivial, falls ein top. Raum F existiert und dann $(E, p, B)$ (Bündel)isomorph zu $(B \times F, p, B)$ ist. Die Faser ist dann F und alle Fasern $p^{-1}(b)$ sind homöomorph zu F.

**Satz 1.** *Das Möbiusband M ist nicht (global) trivial.*

*Beweis.* Sei $A := (-1, 1) \times [0, 1]$ und sei eine Äquivalenzrelation durch $(t, 0) \sim (-t, 1)$ erzeugt. Dann ist das Möbiusband definiert als $M := A/\sim$ Angenommen, es gäbe einen Homöö zwischen $M$ und $Z$, wobei Z der Zylinder ist: Es ist $Z$ als zusammenhängende 2-dim Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ orientierbar, wegen des Homöo müsste dann auch $M$ orientierbar sein. Wiederspruch!

□

Dieses Beispiel zeigt uns, dass nicht jedes Bündel trivial ist. Dies führt zur Definition der Faserbündel. Anschaulich gesprochen sind dann Faserbündel Objekte, die lokal aussehen wie ein Produktraum.

**Definition.** Ein Faserbündel $(E, B, \pi, F)$ ist ein Bündel $\pi : E \to B$, welches lokal trivialisierbar ist, d.h. für jeden Punkt $b \in B$ existieren eine offene Umgebung $U \subseteq B$ und ein Homömorphismus $h : \pi^{-1}(U) \to U \times F$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "proj_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

(U, h) wird manchmal auch als lokale Trivialisierung bezeichnet.

**Beispiel.**
- Das Möbiusband ist nicht global trivialisierbar. Aber es ist lokal homöomorph zu einem Produkt und damit auch lokal trivial.
- $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ ist ein Faserbündel (sogar eine universelle Überlagerung) und jede Faser enthält genau zwei Elemente.
- Die Hopffaserung $f : S^3 \to S^2$ ist ein Faserbündel mit Faser $S^1$.

Manchmal muss man mit Schnitten auf Faserbündeln arbeiten. Leider ist es in vielen Fällen nicht möglich, einen Schnitt global anzugeben. Das führt uns zu

**Definition.** Ein lokaler Schnitt in dem Faserbündels $(E, \pi, B, F)$ ist eine Abbildung $s : U \to E$ für eine offene Teilmenge $U \subseteq B$, die $s \circ \pi(x) = x$ für alle $x \in U$ erfüllt.

## 4 Konstruktion neuer Bündel

Wir werden einige Möglichkeiten angeben, neue Bündel aus alten zu konstruieren. Darunter das Produktbündel zweier Bündel und das Faserprodukt zweier Bündel. Im Gegensatz zum Produktbündel hat das Faserprodukt noch die Eigenschaft, dass es Basen erhält.

Wir werden kurz noch beweisen, dass das Faserprodukt zweier trivialer Bündel stets wieder trivial ist. Anschließend definieren wir noch die Einschränkung von Bündeln und das von Funktionen induzierte Bündel. Beginnen wir zunächst mit

**Definition.** Seien $A_1 = (E_1, p_1, B_1)$ und $A_2 = (E_2, p_2, B_2)$ zwei (Faser)-Bündel. Das Produktbündel $A \times B$ ist dann definiert durch $A \times B := (E_1 \times E_2, p_1 \times p_2, B_1 \times B_2)$

**Definition.** Das Faserprodukt $A_1 \oplus A_2$ zweier Bündel mit gleicher Basis $B$, etwa $A_1 = (E_1, p_1, B)$ und $A_2 = (E_2, p_2, B)$ ist definiert durch $A_1 \oplus A_2 = (E_1 \oplus E_2, p, B) \subseteq E_1 \times E_2$ wobei $E_1 \oplus E_2 := \{(e_1, e_2) \mid p_1(e_1) = p_2(e_2)\}$ und $p(e_1, e_2) = p_1(e_1) = p_2(e_2)$.

**Lemma 2.** $p^{-1}(b) = p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)$

Daher stammt auch der Name Faserprodukt. (Denn Fasern sind hier Produkte!)

**Fakt.** *Für zwei Bündelmorphismen $u_i : A_i \to B_i$, die jeweils die Basis festhalten, ist folgender Morphismus wohldefiniert: $u_1 \oplus u_2 : A_1 \oplus A_2 \to B_1 \oplus B_2$ mit $(u_1 \oplus u_2)(e_1, e_2) = (u_1(e_1), u_2(e_2))$.*

**Lemma 3.**

1. $id_{A_1} \oplus id_{A_2} = id_{A_1 \oplus A_2}$
2. $(u_1 \oplus u_2) \circ (v_1 \oplus v_2) = (u_1 \circ v_1) \oplus (u_2 \circ v_2)$
3. *$A_1 \cong B_1$ und $A_2 \cong B_2 \Rightarrow A_1 \oplus A_2 \cong B_1 \oplus B_2$*

*Beweis.*

1. klar!
2. $((u_1 \oplus u_2) \circ (v_1 \oplus v_2))(x, y) = (u_1 \oplus u_2)(v_1(x), v_2(y)) = (u_1(v_1(x)), u_2(v_2(y))) = ((u_1 \circ v_1) \oplus (u_2 \circ v_2))(x, y)$
3. Sind etwa $\mu_1 : A_1 \to B_1$ und $\mu_2 : A_2 \to B_2$ die Bündelisomorphismen, so ist auch $\mu_1 \oplus \mu_2 : A_1 \oplus A_2 \to B_1 \oplus B_2$ ein Bündelisomorphismus. Stetigkeit ist klar wegen Komposition stetiger Funktionen. Für Bijektivität betrachte: $(\mu_1 \oplus \mu_2) \circ (\mu_1^{-1} \oplus \mu_2^{-1}) = (\mu_1 \circ \mu_1^{-1}) \oplus (\mu_2 \circ \mu_2^{-1}) = id_{A_1} \oplus id_{A_2} = id_{A_1 \oplus A_2}$ und andersrum analog.

□

**Korollar 1.** Das Faserprodukt zweiter trivialer Bündel ist trivial.

**Definition.** Sei $X = (E, p, B)$ Bündel und $A \subseteq B$ irgendeine Teilmenge. Dann definieren wir das von $E$ auf $A$ eingeschränkte Bündel durch $X \mid_A = (E_1, p_1, A)$, wobei $E_1 := p^{-1}(A)$ und $p_1 := p \mid_A$

Wir kommen nun zum wichtigen induzierten Bündel

**Lemma 4.** *Sei $X = (E, p, B)$ ein Faserbündel und sei $f : A \to B$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist $f^*X = (f^*E, f^*p, A)$ definiert durch $f^*E = \{(a, e) \in A \times E \mid f(a) = p(e)\}$ und $f^*p(a, e) = a$ wieder ein Faserbündel.*

*Sei $f_E : f^*E \to E$ mit $(a,e) \to e$ Abbildung. Dann ist die Abbildung $(f, f_E)$ ein wohldefinierter Bündelisomorphismus.*

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "f_E"] \arrow[d, "f^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

*Er wird kanonischer Morphismus genannt.*

*Beweis.* Morphismuseigenschaft: Es gilt $p(f_E(a,e)) = p(e) = f(a) = f(f^*p(a,e))$ und damit Bündelmorphismus. Faserbündeleigenschaft: Ist $(U, h)$ lokale Trivialisierung von $E$, dann ist $(f^{-1}(U), g)$ lokale Trivialisierung von $f^*E$, wobei $g(a,e) = (a, p_U(h(e)))$ □

Alternativ kann man für den Beweis das folgende Lemma benutzen und die Tatsache, dass das induzierte Bündel eines trivialen Bündels wieder trivial ist.

**Lemma 5.** *Sind $X = (E_1, p_2, B)$ und $Y = (E_2, p_2, B)$ zwei Bündel und sei $f : A \to B$ Abbildung. Sind dann $X$ und $Y$ lokal isomorph über $B$, so sind auch schon $f^*X$ und $f^*Y$ lokal isomorph über $A$.*

*Beweis.* Hus94, D. Husemoller, Fibre bundles, Proposition 6.5 □

**Definition.** $f^*X = (f^*E, f^*p, A)$ wird das von $f$ induzierte Bündel genannt.

Wir beenden das Kapitel mit einigen Rechenregeln zum induzierten Bündel

**Lemma 6.**

1. $id^*X \cong X$
2. $g^*(f^*X) = (g \circ f)^*X$
3. $f^*id_X = id_{f^*X}$
4. $f^*(u \circ v) = (f^*u) \circ (f^*v)$
5. $X \cong Y \to f^*X \cong f^*Y$
6. $\iota_A^*X \cong X\,|_A$ *für die Inklusion* $\iota_A : A \to B$ *von* $A \subseteq B$

# 5 Überlagerung

Wir führen noch eben Überlagerung topologischer Räume ein:

**Definition.** Eine Überlagerung eines zusammenhängenden top. Raumes $X$ in den Raum $Y$, eine (Überlagerungs-)Abbildung $p : Y \to X$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $x \in X$ existiert eine offene Umgebung $U$, sodass $p^{-1}(U) = \bigcup S_i$ mit paarweise disjunkten offenen $S_i \subseteq Y$ und $p : S_i \to U$ ist eine Homöomorphismus. Insbesondere ist p surjektiv.

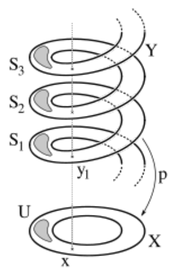



Abbildung 1: Beispiel einer Überlagerung von Wikipedia

*Bemerkung* 3. Man kann Überlagerungen anders definieren: Eine Überlagerung $p : Y \to X$ ist ein Faserbündel mit nicht leerer diskreter Faser und Y zusammenhängend. Sei $I$ Indexmenge wie oben. Betrachte folgendes Diagramm.

$$\begin{tikzcd} U \times I \arrow[rr, "\phi_U"] \arrow[dr, "p_U"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

wobei $\phi_U : U \times I \to p^{-1}(U)$ mit $(u, i) \to p^{-1} \mid_{S_i}(u)$. Dann ist I diskrete Faser des Bündels.

**Beispiel.** 1. $p : \mathbb{R} \to S^1$ mit $p(t) = (cos(t), sin(t))$ ist Überlagerungsabbildung. Denn ist $x \in S^1$ vorgegeben und ist $t \in \mathbb{R}$ mit $p(t) = x$ gewählt, so ist $S_i := (t - i\pi, t + i\pi)$ offene Umgebung von $t$ und $p(S_i)$ ist offene Umgebung von x. Außerdem gilt $S_i \cap S_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $p^{-1}(U) = \bigcup S_i$

2. $p : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit $p(z) = z^n$ ist Überlagerungsabbildung und jede Faser von p hat genau n Elemente.

Folgendes Lemma zeigt, wie beide Definitonen zusammenhängen:

**Lemma 7.** *Ist $p : Y \to X$ Überlagerung und $X$ zusammenhängend, so sind alle Faser homöomorph, also $p^{-1}(x) \cong p^{-1}(y)$ für alle $x, y \in X$.*

*Beweis.* Sei $p : Y \to X$ also Überlagerung. Sei $x \in X$, dann existiert also eine offene Umgebung $U \subseteq X$ mit $p^{-1}(U) = \bigcup S_i$ für paarweise disjunkte $S_i \subseteq Y$ offen und $p : S_i \to U$ ist Homöomorphismus. Ist dann $y \in U$ noch ein Punkt, so gilt schon $p^{-1}(x) \cong p^{-1}(y)$, denn da die Einschränkung von $p : S_i \to U$ ein Homöo ist, existiert zu jedem $i$ genau ein $x_i \in S_i$ mit $p^{-1}(x) \cap S_i = x_i$. Da die Vereinigung aller $S_i$ diskunkt war, gilt also $p^{-1}(x) = \bigcup x_i$ und analog $p^{-1}(y) = \bigcup y_i$ und dann sind beide Mengen durch $x_i \mapsto y_i$ homöomorph. Fasern sind also lokal homöo.
Sei nun weiter $X$ zusammenhängend. Setze $M := \{y \in X \mid p^{-1}(y) \cong p^{-1}(x)\}$. Wegen $x \in M$ gilt $M \neq \emptyset$. Weiter ist M offen, denn für $x \in M$ ex. U offen wie gerade, also $x \in U \subseteq M$. Mit etwas Schreibarbeit zeigt man auch $M/X$ offen, etwa durch Äquivalenzklassen: $x \sim y <=> p^{-1}(x) \cong p^{-1}(y)$. Da $X$ zusammenhängend war, sind $\emptyset, X$ die einzigen offenen und gleichzeitig abgeschlossenen Mengen. Wegen $M \neq \emptyset$ gilt also schon $M = X$. $\square$