Stetige Wirkungen

Ein Vortrag im Rahmen des Seminars zur Theorie der Faserbündel im WS10/11

Andrea Goertsches

Stetige Wirkungen

1 Allgemeine Wirkungen

1.1 Linkswirkungen

Definition 1.1. Eine *(Links-)Wirkung* l der Gruppe G auf einer Menge X ist eine Abbildung $l : G \times X \to X$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $l\,(e_G, x) = x$,

(2) $[l\,(g_1, x) = x_1 \;\wedge\; l\,(g_2, x_1) = x_2] \Rightarrow l\,(g_2 g_1, x) = x_2$, also

$$l(g_2, l(g_1, x)) = l(g_2 g_1, x).$$

Bemerkung 1.2. Üblicherweise verwendet man die abkürzende Bezeichnung $gx := l\,(g, x)$. Damit lauten (1) und (2):

(1) $e_G x = x$;

(2) $[g_1 x = x_1 \;\wedge\; g_2 x_1 = x_2] \Rightarrow (g_2 g_1)x = x_2$, also

$$g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)x.$$

Definition 1.3. Zu jedem Element $g \in G$ definiert man eine invertierbare Abbildung $l_g : X \to X$, $x \mapsto l_g(x) := l(g, x) = gx$. Man bezeichnet sie als *induzierte Abbildung.*

Definition 1.4. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_l : G &\to \mathrm{Sym}(X) \\ g &\mapsto \Phi_l(g) := l_g, \end{aligned}$$

die jedem Gruppenelement $g \in G$ die obige Abbildung $l_g \in \mathrm{Sym}(X)$ zuordnet, ist ein Gruppenhomomorphismus, denn:

$$\Phi_l(g_2 g_1)(x) = l_{g_2 g_1}(x) = (g_2 g_1)x \overset{(2)}{=} g_2(g_1 x) = l_{g_2} \circ l_{g_1}(x) = \Phi_l(g_2) \circ \Phi_l(g_1)(x)\ \forall x \in X.$$

Die Abbildung Φ_l heißt der zu der Wirkung l *adjungierte Homomorphismus.*

Bemerkung 1.5. Der zu einer Wirkung adjungierte Homomorphismus legt die Wirkung *eindeutig* fest, denn: Seien $l, l' : G \times X \to X$ Wirkungen. Weiter seien $\Phi_l,\ \Phi_{l'} : G \to \mathrm{Sym}(X)$ die zugehörigen adjungierten Homomorphismen. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \Phi_l = \Phi_{l'} &\Rightarrow \Phi_l(g) = \Phi_{l'}(g)\ \forall g \in G \\ &\Rightarrow \Phi_l(g)(x) = \Phi_{l'}(g)(x)\ \forall g \in G, x \in X \\ &\Rightarrow l(g, x) = l'(g, x)\ \forall g \in G, x \in X \end{aligned}$$

Also $l = l'$.

Bemerkung 1.6. Andererseits: Hat man einen Homomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{Sym}(X)$, dann ist dieser der adjungierte Homomorphismus zu der Wirkung

$$\begin{aligned} l : G \times X &\to X \\ (g,x) &\mapsto l(g,x) := (\varphi(g))(x), \end{aligned}$$

denn: Betrachte den zu l adjungierten Homomorphismus $\Phi_l : G \to \mathrm{Sym}(X)$, $g \mapsto l_g$: $\Phi_l(g)(x) = l_g(x) = l(g,x) = \varphi(g)(x)\ \forall g \in G, x \in X$. Also gilt $\Phi_l = \varphi$.

Insgesamt hat man also den folgenden Satz

Satz 1.7. *Jede Wirkung l der Gruppe G auf X entspricht genau einem Homomorphismen $\Phi_l : G \to Sym(X)$.*

Definition 1.8. Eine Wirkung l heißt *treu* oder *effektiv*, falls der zugehörige adjungierte Homomorphismus Φ_l injektiv ist.

Bemerkung 1.9. Falls die Wirkung l nicht treu ist, kann man den Kern $K := \ker \Phi_l$ des adjungierten Homomorphismus (noneffektiveness kernel) betrachten. In diesem Fall faktorisiert der adjungierten Homomorphismus über G/K

$$\Phi_l : G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G/K \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathrm{Sym}(X),$$

läßt sich also als Komposition $\Phi_l = \iota \circ \pi$ der Projektion π und des Monomorphismus ι schreiben. Die Wirkung faktorisiert entsprechend über $G/K \times X$

$$l : G \times X \overset{(\pi \times \mathrm{id}_X)}{\twoheadrightarrow} G/K \times X \overset{l_t}{\to} X,$$

läßt sich also als Komposition $l = l_t \circ (\pi \times \mathrm{id}_X)$ der Abbildung $(\pi \times \mathrm{id}_X)$ und dem treuen Anteil (effective factor) l_t der Wirkung von l schreiben.

Definition 1.10. Sei $l : G \times X \to X$ eine Wirkung und $x \in X$. Dann heißt $l(G,x) \subseteq X$ die *Bahn* des Punktes x in X.

Bemerkung 1.11. Seien $x, y \in X$. Dann gilt entweder $l(G \times \{x\}) = l(G \times \{y\})$ oder $l(G\times\{x\}) \cap l(G\times\{y\}) = \emptyset$, denn: Sei $z \in l(G\times\{x\}) \cap l(G\times\{y\})$. Dann: $\exists g, h \in G : l(g,x) = z = l(h,y)$, also $l_g(x) = l_h(y)$ und somit $x = l_g^{-1} \circ l_h(y) = l_{g^{-1}h}(y) \in l(G,y)$ bzw. analog $y \in l(G,x)$. Man hat also eine Äquivalenzrelation $\sim$ für $x, y \in X$: $x \sim y :\Leftrightarrow \exists z \in X\ :\ x, y \in l(G,z)$. Die Menge dieser Äquivalenzklassen bilden insbesondere eine Partition der Menge X.

Definition 1.12. Eine Wirkung mit nur einer Bahn heißt *transitiv*.

Definition 1.13. Man bezeichnet den *Raum der Bahnen* mit $X/G := X/\sim$.

Bemerkung 1.14. Sei $\psi : G_1 \to G$ ein Gruppenhomomorphismus und $l : G\times X \to X$ eine Wirkung. Dann erhält man die induzierte Wirkung

$$l_\psi : G_1 \times X \overset{(\psi \times \mathrm{id}_X)}{\to} G \times X \overset{l}{\to} X$$

von G_1 auf X als Komposition $l_\psi = l \circ (\psi \times \mathrm{id}_X)$.
Insbesondere erhält man $\Phi_{l_\psi} = \Phi_l \circ \psi : G_1 \to \mathrm{Sym}(X)$, denn $\forall g \in G, x \in X$:

$$\Phi_{l_\psi}(g)(x) = l_\psi(g,x) = l \circ (\psi \times \mathrm{id}_X)(g,x) = l(\psi(g),x) = l_{\psi(g)}(x) = \Phi_l(\psi(g))(x)$$

Bemerkung 1.15. Falls $\psi : G_1 \hookrightarrow G$ Monomorphismus und $l : G \times X \to X$ treu, dann ist $l_\psi : G_1 \times X \to X$ ebenfalls treu (Beachte den Spezialfall einer Untergruppe $G_1 \subseteq G$).
Falls $\psi : G_1 \twoheadrightarrow G$ Epimorphismus und $l : G \times X \to X$ transitiv, dann ist $l_\psi : G_1 \times X \to X$ ebenfalls transitiv.

Bemerkung 1.16. Für zwei Wirkungen $l_1 : G_1 \times X_1 \to X_1$, $l_2 : G_2 \times X_2 \to X_2$ liefert das Produkt $(l_1 \times l_2) : (G_1 \times G_2) \times (X_1 \times X_2) \to X_1 \times X_2$, $(g_1, g_2)(x_1, x_2) = (g_1x_1, g_2x_2)$, wieder eine Wirkung, die treu (transitiv) ist, wenn l_1, l_2 treu (transitiv) sind.

Definition 1.17. (1) Seien $l_1 : G \times X_1 \to X_1$, $l_2 : G \times X_2 \to X_2$ Wirkungen der gleichen Gruppe G. Eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$ heißt *G-äquivariant*, falls $f(gx) = gf(x)\ \forall x \in X, g \in G$.

(2) Hat man zwei Wirkungen $l_1 : G_1 \times X_1 \to X_1$, $l_2 : G_2 \times X_2 \to X_2$ von verschiedenen Gruppen und einen Gruppenhomomorphismus $\gamma : G_1 \to G_2$ zwischen diesen, so nennt man eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$ *γ-äquivariant*, falls $f(gx) = \gamma(g)f(x)\ \forall x \in X, g \in G$.

(3) Zwei Wirkungen $l_1 : G \times X_1 \to X_1$, $l_2 : G \times X_2 \to X_2$ heißen *äquivalent*, falls es eine invertierbare G-äquivariante Abbildung $X_1 \to X_2$ gibt.

Definition 1.18. Sei $l : G \times X \to X$ eine Wirkung. Für ein $x \in X$ definiert man die *Isotropiegruppe (bzw. Stabilisator oder Fixpunktgruppe) der Wirkung* oder die *Isotropiegruppe der Gruppe G am Punkt x* durch

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\} \leq G.$$

Für ein beliebiges $g \in G$ gilt ferner:

$$\begin{aligned} G_{gx} &= \{h \in G \mid hgx = gx\} \\ &= \left\{h \in G \mid g^{-1}hgx = x\right\} \\ &= \left\{h \in G \mid g^{-1}hg \in G_x\right\} \\ &= \left\{h \in G \mid h \in gG_xg^{-1}\right\} \\ &= gG_xg^{-1} \end{aligned}$$

Für eine transitive Wirkung gilt: $\forall x_1 \in X \exists g \in G\ :\ x_1 = gx$. Also bestehen in diesem Fall die Isotropiegruppen aus den zu G_x konjugierten Untergruppen.

1.2 Rechtswirkungen

Definition 1.19. Analog zu einer Linkswirkung läßt sich zu einer Gruppe G und einer Menge X eine Rechtswirkung $r : X \times G \to X$ mit den Eigenschaften

(1) $r(x, e_G) = x$,

(2) $[r(x, g_1) = x_1 \ \wedge \ r(x_1, g_2) = x_2] \Rightarrow r(x, g_2 g_1) = x_2$, also

$$r(r(g_1, x), g_2) = r(x, g_2 g_1).$$

definieren. Wie oben schreibt man abkürzend $r(x, g) := xg$ (an Stelle von gx).

Bemerkung 1.20. Der adjungierte Homomorphismus der Linkswirkung wird zum Antihomomorphismus, (d.h. $\Phi_r(gh) = \Phi_r(h)\Phi_r(g) \ \forall g, h \in G$) der Rechtswirkung. Alle anderen Definition können übernommen werden.

Bemerkung 1.21. Die Gleichung $xg := g^{-1}x$ ($gx := xg^{-1}$) wandelt eine Links- (Rechts-) in eine Rechtswirkung (Linkswirkung) um. Man sagt, dass diese beiden Wirkungen *konjugiert* sind.

Bemerkung 1.22. Im Folgenden bezeichnen wir abkürzend mit Wirkung stets eine Linkswirkung, wobei wir im Falle einer Rechtswirkung dies immer explizit erwähnen.

1.3 Wirkungen auf Gruppen

Bemerkung 1.23. Sei G eine Gruppe, X eine Menge. Falls $H := \{l_g \mid g \in G\} \subseteq \mathrm{Sym}(X)$ Untergruppe ist, dann läßt sich der adjungierte Homomorphismus Φ_l als Abbildung $\Phi_l : G \to H \subseteq \mathrm{Sym}(X)$ auffassen.
In diesem Fall sagen wir, dass die Gruppe G durch Abbildungen aus H auf der Menge X wirkt.

Bemerkung 1.24. Es gibt Fälle, in denen man die Gruppe H nicht explizit angibt:

(1) Falls X ein topologischer Raum, $H = \mathrm{Top}(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ Homöo.}\}$, dann sagt man G wirkt durch Homöomorphismen auf X.

(2) Falls $X = G$ eine Gruppe und H eine Gruppe von Automorphismen auf G, dann sagt man H wirkt durch Automorphismen auf G. Dann heißt die Wirkung *Gruppenwirkung*.

Beispiel 1.25. Betrachte Wirkungen der Form $G \times G \to G$.

- Treue und transitive Wirkungen:
  - die *kanonische Linkswirkung* $(g, x) \mapsto gx$,
  - die *kanonische Rechtswirkung* $(g, x) \mapsto xg$.

- Gruppenwirkungen:
  - die *innere Linkswirkung* $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$,
  - die *innere Rechtswirkung* $(g, x) \mapsto g^{-1}xg$.

Bemerkung 1.26. Sei $G_1 \leq G$ Untergruppe. Einschränken der kanonischen Linkswirkung $l : G \times G \mapsto G$ auf die Wirkung $l_{G_1} : G_1 \times G \mapsto G$ liefert, dass die Bahnen von l_{G_1} die Rechtsnebenklassen von G_1 sind, denn:

$$l_{G_1}(G_1, x) = \{l_{G_1}(g, x) \mid g \in G_1\} = \{gx \mid g \in G_1\} = G_1 x \quad \forall x \in G$$

Die Bezeichnung G/G_1 in Definition 1.13 stimmt also mit der üblichen Gruppentheoretischen Notation des Raums der Rechtsnebenklassen überein (das Buch verwendet die Bezeichnung G/G_1 sowohl für den Raum der Rechts- als auch für den Raum der Linksnebenklassen).

Dies liefert unmittelbar:

Beispiel 1.27. Sei $G_1 \leq G$ Untergruppe. Da jede Linkstranslation (auch Linksmultiplikation) Linksnebenklassen auf Linksnebenklassen abbildet ($l(g, \overline{x}) = l(g, xG_1) = g(xG_1) = (gx)G_1 = \overline{gx}$), induziert die kanonische Linkswirkung $l : G \times G \to G$ eine *kanonische Wirkung der Gruppe G auf* G/G_1 durch $\bar{l} : G \times G/G_1 \to G/G_1$, $(g, \overline{x}) \mapsto \overline{gx}$. Diese Abbildung hat die folgenden Eigenschaften:

- sie ist transitiv, denn: $\bar{l}(g, \overline{e}_G) = \overline{ge_G} = \overline{g} \; \forall g \in G$,
- Der Kern $K = \ker \Phi_{\bar{l}}$ ist der Durchschnitt aller Isotropiegruppen von $\bar{l}$, denn:

$$\begin{aligned}
\ker \Phi_{\bar{l}} &= \left\{g \in G \mid \bar{l}_g = id_{G/G_1}\right\} \\
&= \left\{g \in G \mid \bar{l}_g(\overline{x}) = id_{G/G_1}(\overline{x}) \; \forall \overline{x} \in G/G_1\right\} \\
&= \{g \in G \mid \overline{gx} = \overline{x} \; \forall \overline{x} \in G/G_1\} \\
&= \{g \in G \mid g\overline{x} = \overline{x} \; \forall \overline{x} \in G/G_1\} \\
&= \bigcap_{\overline{x} \in G/G_1} G_{\overline{x}}
\end{aligned}$$

Die Projektion $\pi : G \to G/G_1$ ist eine G-äquivariante Abbildung, denn: Betrachtet man die kanonische Linkswirkung $G \times G \to G$ und die kanonische Wirkung der Gruppe G auf G/G_1 wie oben, dann folgt

$$\pi(gx) = \overline{gx} = (gx)G_1 = g(xG_1) = g\overline{x} = g\pi(x).$$

Satz 1.28. *Jede transitive Wirkung von G ist äquivalent zu der kanonischen Wirkung auf einem Quotienten der Form G/G_x, mit G_x der Isotropiegruppe am Punkt $x \in G$.*

Beweis. Sei $G \times X \to X$ eine transitive Wirkung und sei $x \in X$ beliebig aber fest. Betrachte nun die Abbildung $f : G \to X$, $f(g) = gx$. Dann ist das Urbild von x unter f gegeben durch $f^{-1}(x) = G_x \subseteq G$ gerade die Isotropiegruppe im Punkt x und die Urbilder anderer Punkte $x' \in X, x' \neq x$ sind die Linksnebenklassen von G_x, denn: $\forall x' \in X, x' \neq x \exists h \in G \ : \ x' = hx$ und damit folgt

$$\begin{aligned} f^{-1}(x') &= f^{-1}(hx) \\ &= \{g \mid gx = hx\} \\ &= \left\{g \mid h^{-1}gx = x\right\} \\ &= \left\{g \mid h^{-1}g \in G_x\right\} \\ &= \{g \mid g \in hG_x\} \\ &= hG_x. \end{aligned}$$

Definiere nun die Abbildung (injektiv factor) $f' : G/G_x \to X$, $f'(\overline{g}) := f(g) = gx$. Diese ist wohldefiniert, denn seien $g_1, g_2 \in \overline{g}$. Dann existiert ein $h \in G_x \ : \ g_1 h = g_2$ und somit folgt $f'(\overline{g}_2) = f(g_2) = g_2 x = g_1 hx = g_1 x = f(g_1) = f'(\overline{g}_1)$. Da die Abbildung f' bijektiv ist, und wegen

$$f'(g\overline{y}) = f'(\overline{gy}) = gyx = gf'(\overline{y})$$

ist sie eine G-äquivariante Abbildung. $\square$

2 Stetige Wirkungen

Definition 2.1. Eine *stetige Wirkung einer topologischen Gruppe* G (d.h. einer Menge G versehen mit einer Topologie und einer Gruppenstruktur, so dass die Gruppenverknüpfung und die Inversenabbildung stetig sind) *auf einem topologischen Raum* X ist eine Wirkung $l : G \times X \to X$ im Sinne von Definition 1.1, die zusätzlich stetig ist. Eine stetige Rechtswirkung definiert man analog.

Beispiel 2.2. (1) $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$ und $SO(n)$ wirken stetig und treu auf $\mathbb{R}^n$,

(2) $GL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$ und $SU(n)$ wirken stetig und treu auf $\mathbb{C}^n$,

(3) da S^{n-1} invariant ist unter der Wirkung von $O(n)$ auf $\mathbb{R}^n$, wirken auch $O(n)$ und $SO(n)$ stetig auf S^{n-1},

(4) da S^{2n-1} invariant ist unter der Wirkung von $U(n)$ aufgefasst als Untergruppe von $O(2n)$ auf $\mathbb{R}^{2n}$, wirken auch $U(n)$ und $SU(n)$ stetig auf S^{2n-1},

(5) $O(n)$, $SO(n)$ wirken stetig auf den Stiefel-Mannigfaltigkeiten $V_k(\mathbb{R}^n) = \left\{f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ lineare Isometrie}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{nk}$ durch Matrizenmultiplikation. Explizit hat man die Linkswirkung $l : O(n) \times V_k(\mathbb{R}^n) \to V_k(\mathbb{R}^n)$, $(g, v) \mapsto g \circ v$ und die Rechtswirkung $r : O(n) \times V_k(\mathbb{R}^n) \to V_k(\mathbb{R}^n)$, $(g, v) \mapsto v \circ g$,

(6) Analog wirken $U(n)$, $SU(n)$ stetig auf den Stiefel-Mannigfaltigkeiten $V_k(\mathbb{C}^n) = \{f : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n \mid f \text{ lineare Isometrie}\} \subseteq \mathbb{C}^{nk}$ durch Matrizenmultiplikation.

Erinnerung 2.3. Seien X, Y topologische Räume. Dann ist

$$\mathcal{C}(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ stetig}\}.$$

Seien $A \subseteq X$ sowie $B \subseteq Y$, Teilmengen. Dann bezeichne

$$\mathcal{C}(X,A;Y,B) := \{f \in (X,Y) \mid f(A) \subseteq B\}.$$

Wir versehen nun $\mathcal{C}(X,Y)$ mit der kompakt-offenen-Topologie:
Die Menge $\{\mathcal{C}(X,A;Y,B)\}_{A,B}$, mit $A \subseteq X$ kompakt und $B \subseteq Y$ offen, bildet eine Subbasis der Topologie.

Satz 2.4. *Seien X,Y,Z topologische Räume.*

*(1) Sei $\varphi : X \times Y \to Z$ stetig.
Dann ist $\Phi : X \to \mathcal{C}(Y,Z)$ gegeben durch $\Phi(x)(y) := \varphi(x,y)$ stetig.*

*(2) Sei Y lokalkompakt und $\Phi : X \to \mathcal{C}(Y,Z)$ stetig.
Dann ist $\varphi : X \times Y \to Z$ gegeben durch $\varphi(x,y) := \Phi(x)(y)$ stetig.*

Beweis. Zeige zunächst (1): Seien $B \subseteq Y$ kompakt, $C \subseteq Z$ offen. Betrachte die offene Menge $\mathcal{C}(Y,B;Z,C) \subseteq \mathcal{C}(Y,Z)$. Weiter sei $x_0 \in X$ mit $\Phi(x_0) \in \mathcal{C}(Y,B;Z,C)$. Dann gilt für alle $y \in B$, dass $\varphi(x_0,y) = \Phi(x_0)(y) \in C$. Da φ stetig und $C \subseteq Z$ offen, existieren Umgebungen $x_0 \in U_y \subseteq X$ sowie $y \in V_y \subseteq Y$ mit $\varphi(U_y \times V_y) \subseteq C$. Wähle nun aus der offenen Überdeckung $\{V_y\}_{y \in B}$ von B eine endliche Teilüberdeckung $V_{y_1}, \dots V_{y_s}$, $s \in \mathbb{N}$. Da natürlich $U := \bigcap_{i=1}^s U_{y_1}$ auch eine Umgebung von x_0 ist, folgt

$$\varphi(U \times B) \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} \varphi(U_{y_i} \times V_{y_i}) \subseteq C,$$

und somit $\Phi(U) \subseteq \mathcal{C}(Y,B;Z,C)$. Also existiert für alle Punkte im Urbild $\Phi^{-1}(\mathcal{C}(Y,B;Z,C))$ eine offene Umgebung U, dessen Bild wieder in $\mathcal{C}(Y,B;Z,C)$ liegt. Also ist $\Phi^{-1}(\mathcal{C}(Y,B;Z,C))$ offen.
Zeige nun (2): Sei $W \subseteq Z$ offen. Weiter sei $(x_0,y_0) \in X \times Y$ mit $\varphi(x_0,y_0) \in W$. Betrachte nun $\Phi(x_0) \in \mathcal{C}(Y,Z)$ und das Urbild $[\Phi(x_0)]^{-1}(W) \subseteq Y$, welches wieder offen ist. Da Y lokalkompakt, existiert eine offene Umgebung $V \subseteq Y$ mit kompaktem Abschluss $\overline{Y}$, so dass

$$V \subseteq \overline{V} \subseteq [\Phi(x_0)]^{-1}(W).$$

Da Φ stetig ist, existiert eine offene Umgebung $x_0 \in U \subseteq X$ mit $\Phi(U) \subseteq \mathcal{C}(Y,\overline{V};Z,W)$. Da $U \times V$ eine offene Umgebung von (x_0,y_0) ist, folgt wegen $\varphi(U \times V) = \Phi(U)(V) \subseteq W$ die Behauptung. $\square$

Definition 2.5. Topologien auf $Top\ X$.

(1) kompakt-offene Topologie τ_{ko}, oder

(2) Topologie τ'_{ko} der folgenden offenen Mengen $U \subseteq Top\ X$:

(a) Falls $U \in \tau_{ko}$, dann $U \in \tau'_{ko}$,

(b) Falls $U \in \tau'_{ko}$, dann $U^{-1} \in \tau'_{ko}$.

Erinnerung 2.6. Falls X lokalkompakt, dann ist $(Top\ X, \tau'_{ko})$ eine topologische Gruppe.

Satz 2.7. *Sei $l : G \times X \to X$ stetige Wirkung. Dann ist der adjungierte Homomorphismus $\Phi_l : G \to Top\ X \subseteq Sym(X)$, $g \mapsto l_g$, ein Homomorphismus, d.h. ein algebraischer Homomorphismus, der zusätzlich stetig ist.*

Dazu zunächst folgendes Lemma:

Lemma 2.8. *Stetigkeit von Φ_l in der kompakt-offenen Topologie τ_{ko} ist äquivalent zur Stetigkeit in der Topologie τ'_{ko}.*

Beweis. (von Lemma 2.8) Falls Φ_l stetig der Topologie τ'_{ko}, dann ist Φ_l natürlich auch stetig in der kompakt-offenen Topologie τ_{ko}, da diese nur weniger offene Mengen hat. Falls Φ_l stetig ist in der kompakt-offenen Topologie τ_{ko}, dann ist das Urbild von U^{-1} auch offen, da $\Phi_l^{-1}(U^{-1}) = (\Phi_l^{-1}(U))^{-1}$ gilt und da die Inversenabbildung stetig ist in der topologischen Gruppe G. □

Beweis. (von Satz 2.7) Offenbar ist die von jedem Gruppenelement g induzierte Abbildung l_g stetig, ist also Homöomorphismus. Daher läßt sich der Zielraum des adjungierten Homomorphismus zu $Top\ X$ beschränken. Nach Definition 1.4 ist klar, dass Φ_l ein algebraischer (d.h. ohne Berücksichtigung der Topologie) Homomorphismus ist. Die Stetigkeit folgt sofort aus Satz 2.4 (1) mit $X = G$, $Y = X$ und $Z = X$, also mit $\varphi = l$ und $\Phi = \Phi_l$. □

Satz 2.9. *Sei $l : G \times X \to X$ Wirkung und sei X lokal kompakt. Dann ist der adjungierte Homomorphismus $\Phi_l : G \to Top\ X$, $g \mapsto l_g$ genau dann stetig, wenn die Wirkung stetig ist.*

Beweis. '$\Leftarrow$':Folgt sofort aus Satz 2.7.
'$\Rightarrow$': Folgt aus Satz 2.4 (2) mit $X = G$, $Y = X$ und $Z = X$, also mit $\Phi = \Phi_l$ und $\varphi = l$. □

Bemerkung 2.10. Daher läßt sich im Falle eines lokalkompakten Raumes X eine stetige Wirkung auch durch Angabe eines Homomorphismus $G \to Top\ X$ zwischen topologischen Gruppen definieren.

Bemerkung 2.11. Eine diskrete Gruppe G, die durch Homöomorphismen wirkt, wirkt immer stetig, denn: Sei $l : G \times X \to X$ Wirkung, $U \subseteq X$ offen. Dann ist $l^{-1}(U)$ offen genau dann wenn $l^{-1}(U) \cap (\{g\} \times X)$ offen ist für alle $g \in G$, da G diskret. Damit folgt $l_g^{-1}(U)$ offen für alle $g \in G$. Dies gilt, da $l_g \in Top\ X$.

Definition 2.12. Ein *G-Raum* (X, l) ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer stetigen Gruppenwirkung $l : G \times X \to X$. Ein G-Raum heißt *treu*, falls die Wirkung treu ist.

Bemerkung 2.13. Für eine Wirkung $l : G \times X \to X$ (stetig oder unstetig), wird X/G mit der Quotiententopologie zu einem topologischen Raum.

Definition 2.14. Die Sättigung S_U einer Teilmenge $U \subseteq X$ bezüglich der Partition von X in Bahnen ist definiert als $S_U := \bigcup_{g \in G} gU$.

Bemerkung 2.15. Sei $\pi : X \to X/G$, $x \mapsto \overline{l(G, x)} = \overline{Gx} = \overline{x}$ die Projektion und $U \subseteq X$. Dann gilt

$$S_U = \pi^{-1}(\pi(U)),$$

denn: '$\subseteq$': Sei also $u \in U$ und $u' \in gU$. Dann ist $\pi(u') = \pi(u)$, also $u' \in \pi^{-1}(\pi(U))$ und somit $\bigcup_{g \in G} gU \subseteq \pi^{-1}(\pi(U))$.
'$\supseteq$': Sei $u' \in \pi^{-1}(\pi(U))$. Dann existiert ein $u \in U$ mit $\pi(u) = \pi(u')$, also existiert ein $g \in G$ mit $gu = u'$. Also $u' \in gU \subseteq \bigcup_{g \in G} gU$ und somit $\pi^{-1}(\pi(U)) \subseteq \bigcup_{g \in G} gU$.

Satz 2.16. *(1) Die Partition in Bahnen ist immer offen, d.h. die Projektion $\pi : X \to X/G$ ist immer offen.*

(2) Falls die Gruppe G endlich ist, dann ist die Partition in Bahnen ebenfalls abgeschlossen.

Beweis. Zeige zunächst (1): Sei also $U \subseteq X$ offen. Es ist also zu zeigen, dass $\pi(U) \subseteq X/G$ offen ist, also dass $\pi^{-1}(\pi(U)) = S_U$ offen ist. Da $S_U = \bigcup_{g \in G} gU$ offen, folgt dass π offen ist.
Zeige nun (2): Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, ist S_A ebenfalls abgeschlossen, da die Vereinigung endlich ist. □

Satz 2.17. *Seien l stetige Wirkung, X kompakt und Hausdorffsch und G kompakt. Dann ist die Partition in Bahnen abgeschlossen*

Beweis. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist $A \subseteq X$ bzw. $G \times A \subseteq G \times X$ kompakt, da abgeschlossene Teilmengen eines Hausdorffraumes kompakt sind. Da l stetig ist, ist $l(G \times A) \subseteq X$ ebenfalls kompakt und ist wiederum als kompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes abgeschlossen.
Da $G \times A \mapsto l(G \times A) = S_A$ folgt, dass S_A abgeschlossen ist. Also ist die Partition in Bahnen abgeschlossen. □

Satz 2.18. *(1) Sei X zweitabzählbar. Dann ist auch X/G zweitabzählbar.*

(2) Sei G endlich und X normal. Dann ist auch X/G normal.

Beweis. Zeige zunächst (1): Sei also X zweitabzählbar, d.h. es existiert eine abzählbare Basis $B := \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ der Topologie. Da die Projektion $\pi : X \to X/G$ offen ist, ist auch $\pi(X_i)$ offen für alle $i \in \mathbb{N}$ und somit ist $B_\pi := \{\pi(X_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ abzählbare Basis der Topologie von X/G.

Zeige nun (2): Seien also $F_1, F_2 \subseteq X/G$ abgeschlossen und disjunkt. Damit folgt, dass $\pi^{-1}(F_1)$, $\pi^{-1}(F_2) \subseteq X$ abgeschlossen, disjunkt und gesättigt sind. Da X normal, existieren $U_1,\ U_2 \subseteq X$ offen und disjunkt mit $\pi^{-1}(F_i) \subseteq U_i$ für $i = 1, 2$. Weiter gilt, da $U_i^c \subseteq X$ abgeschlossen und da G endlich, dass $S_{U_i^c}$ abgeschlossen. Damit ist $S_{U_i^c}^c$ offen und gesättigt und es gilt $\pi^{-1}(F_i) \subseteq S_{U_i^c}^c$, denn: Angenommen es existiert ein $x \in \pi^{-1}(F_i) \cap S_{U_i^c}$. Dann existiert ein $y \in U_i^c$ mit $x \sim y$. Da $\pi^{-1}(F_i)$ gesättigt, folgt $y \in \pi^{-1}(F_i) \subseteq U_i$. Widerspruch.
Da π offen, folgt, dass $\pi(S_{U_i^c}^c)$ offen ist und dass $F_i \subseteq \pi(S_{U_i^c}^c)$. Damit sind $\pi(S_{U_i^c}^c)$ für $i = 1, 2$ die gesuchten disjunkten, gesättigten offenen Umgebungen von F_1 und F_2, also ist X/G normal. □

Bemerkung 2.19. Sei $G_1 \leq G$ Untergruppe. Dann ist jeder G-Raum bezüglich der eingeschränkten Wirkung ein G_1-Raum. Jeder invariante Unterraum $X_1 \subseteq X$ eines G-Raumes ist ebenfalls ein G-Raum und werden als *Unterräume* des ursprünglichen G-Raumes bezeichnet. Da das Produkt zweier stetiger Wirkungen wieder stetig ist, ist Produkt eines G_1-Raumes und eines G_2-Raumes ein $(G_1 \times G_2)$-Raum.

Definition 2.20.
(1) Eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$ zwischen zwei G-Räumen (X_i, l_i) mit $l_i : G \times X_i \to X_i$ für $i = 1, 2$ heißt *G-äquivariant*, falls f G-äquivariant im Sinne von Definition 1.17 und stetig ist.

(2) Analog definiert man *γ-äquivariant* für einen Homomorphismus $\gamma : G \to G'$ von topologischen Gruppen.

(3) Weiter sind zwei stetige Wirkungen von G *äquivalent*, falls die zugehörigen G-Räume *G-homöomorph* sind, d.h falls es ein $f : X_1 \to X_2$ gibt, welches ein G-äquivarianter Homöomorphismus ist.

Beispiel 2.21. Sei G eine topologische Gruppe. Dann sind die kanonische Linkswirkung und die innere Linkswirkung stetig.

Bemerkung 2.22. Sei $G_1 \leq G$ Untergruppe. Dann bezeichnet G/G_1 wieder sowohl den Raum der Bahnen als auch den Raum der Nebenklassen von G_1 in G.

Satz 2.23. *Sei $G_1 \leq G$ Untergruppe. Die kanonische Wirkung einer Gruppe G auf dem Raum G/G_1 der Nebenklassen ist ebenfalls stetig.*

Beweis. Betrachte die Komposition der Abbildung $l_{kan} : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ mit der Projektion $\pi : G \to G/G_1$ und bezeichne diese mit $\psi = \pi \circ l_{kan} : G \times G \to G/G_1$. Dann ist ψ als Komposition stetiger Abbildungen wieder stetig und $e_G \times G_1$ liegt im Kern von ψ. Also faktorisiert ψ über $G \times G/G_1$ und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_G \times \pi"'] & & G/G_1 \\
& G \times G/G_1 \arrow[ur, "\bar{l}_{kan}"] &
\end{tikzcd}$$

Da die Projektion offen und ψ stetig, folgt die Stetigkeit von $\bar{l}_{kan}$. □

Definition 2.24. Sei X G-Raum. X heißt dann *homogener Raum*, falls G transitiv auf X wirkt.

Beispiel 2.25. Sei $G_1 \leq G$ Untergruppe. Dann ist G/G_1 mit der kanonischen Wirkung $G \times G/G_1 \to G/G_1$ ein homogener Raum.

Satz 2.26. *Seien G kompakte topologische Gruppe, (X, x_0) punktierter Hausdorffraum, $l : G \times X \to X$ stetige transitive Wirkung und $l_{kan} : G \times G/G_{x_0} \to G/G_{x_0}$, $(g, \overline{x}) \mapsto \overline{gx}$, die kanonische Wirkung der Gruppe G auf dem Raum der Nebenklassen von der Isotropiegruppe G_{x_0} an x_0.*
Dann ist (injectiv factor)

$$\begin{array}{rcl} f' : G/G_{x_0} & \to & X \\ \overline{g} & \mapsto & gx_0 \end{array}$$

kanonischer G-Homöomorphismus, d.h. l und l_{kan} sind kanonisch äquivalent.

Beweis. Die Abbildungen $f : G \to X$, $g \mapsto gx_0$ sowie f' sind stetig und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \\ & G/G_{x_0} \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Nach Satz 1.28 ist f' G-äquivariant. Also bleibt nur noch zu zeigen, dass $(f')^{-1}$ stetig ist. Da G kompakt, folgt $\pi(G) = G/G_{x_0}$ kompakt, da π stetig. Insgesamt ist daher f' eine stetige Bijektion zwischen dem kompakten Raum G/G_{x_0} und dem Hausdorffraum X und somit ist f' offen, also G-Homöomorphismus. □

Definition 2.27. Eine stetige Wirkung $l : G \times X \to X$ heißt *frei*, falls gilt: $\forall x \in X \ : \ f_x : G \to X, g \mapsto gx$, ist eine Einbettung (d.h. f_x injektiv und stetig). Vereinfacht bedeutet dies:

$$\forall x \in X, g \in G \ : \ gx = x \Leftrightarrow g = e_G$$

Beispiel 2.28. Die Untergruppen von $O(n)$ und $U(n)$, die nur aus Vielfachen der Einheitsmatrix bestehen, identifiziert man in der Regel mit S^0 bzw. S^1. Damit erhalten wir die freien stetigen Wirkungen $S^0 \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ bzw. $S^1 \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$. Insbesondere gelten die folgenden Beziehungen:

$$S^{n-1}/S^0 = \mathbb{R}P^{n-1}$$

$$S^{2n-1}/S^1 = \mathbb{C}P^{n-1}$$

Beispiel 2.29. Betrachte die Linkswirkungen aus Beispiel 2.2 (5). Diese Linkswirkungen sind alle treu und die einzigen nicht transitiven sind $SO(n) \times V_n(\mathbb{R}^n) \to V_n(\mathbb{R}^n)$ und $SU(n) \times V_k(\mathbb{C}^n) \to V_k(\mathbb{C}^n)$ für $n \geq 1$. Die Isotropiegruppen am Punkt $[(x_1, \dots x_k) \mapsto (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_k)] \in V_k(\mathbb{R}^n)$ sind $O(n-k)$ und $SO(n-k)$. Die Isotropiegruppen am Punkt $[(x_1, \dots x_k) \mapsto (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_k)] \in V_k(\mathbb{C}^n)$ sind

$U(n-k)$ und $SU(n-k)$. Wegen Satz 2.26 erhält man also die folgenden Homöomorphismen:

$$O(n)/O(n-k) \to V_k(\mathbb{R}^n), \qquad SO(n)/SO(n-k) \to V_k(\mathbb{R}^n),$$

$$U(n)/U(n-k) \to V_k(\mathbb{C}^n), \qquad SU(n)/SU(n-k) \to V_k(\mathbb{C}^n).$$

Beispiel 2.30. Betrachte die Rechtswirkungen aus Beispiel 2.2 (6). Diese Rechtswirkungen sind alle frei und man erhält:

$$V_k(\mathbb{R}^n)/O(k) \cong G_k(\mathbb{R}^n) \text{ kanonisch homöomorph, sowie}$$

$$V_k(\mathbb{C}^n)/U(k) \cong G_k(\mathbb{C}^n) \text{ kanonisch homöomorph}$$

bezüglich des 'injectiv factors' der Abbildung $V_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ bzw. $V_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^n)$, $(v_1, \ldots v_k) \mapsto < v_1, \ldots, v_k >$.

Bemerkung 2.31. Insgesamt liefert dies die Existenz von folgenden kanonischen Homöomorphismen:

$$O(n)/\left(O(n-k) \times O(k)\right) \to G_k(\mathbb{R}^n),$$

$$U(n)/\left(U(n-k) \times U(k)\right) \to G_k(\mathbb{C}^n).$$

Bemerkung 2.32. Jede freie Wirkung $l : G \times X \to X$ ist treu, denn: Sei $\Phi_l : G \to Top\ X$, $g \mapsto l_g$, mit $l_g : X \to X$, $x \mapsto gx$, der adjungierte Homomorphismus. Dann ist

$$\begin{aligned} ker\ \Phi_l &= \{g \in G \mid g \mapsto l_g = \mathrm{id}\} \\ &= \{g \in G \mid gx = l_g(x) = \mathrm{id}(x) = x\ \forall x \in X\} \\ &\overset{l \text{ frei}}{=} e_G \end{aligned}$$

Also ist Φ_l injektiv, also l treu.

Bemerkung 2.33. Sei $l : G \times X \to X$ frei, $G_1 \leq G$ Untergruppe. Dann ist $l_1 : G_1 \times X \to X$ frei

Bemerkung 2.34. Produkte freier Wirkungen sind frei.

Beispiel 2.35. (1) Die kanonische Wirkung ist frei.

(2) Sei $G_1 \leq G$ Untergruppe. Die kanonische Wirkung $l : G \times G/G_1 \to G/G_1$, $(g, \overline{x}) \mapsto \overline{gx}$ auf dem Raum der Bahnen ist *nicht* frei, falls $G_1 \neq e_G$, denn: $\forall g \in G_1\ :\ \overline{gx} = \overline{x}$.

Satz 2.36. *Sei $l : G \times X \to X$ freie Wirkung, die eigentlich diskontinuierlich operiert, d.h. es gelte*

$$\forall u \in X \exists U \ni u \text{ Umgebung } : gU \cap g'U = \emptyset\ \forall g \neq g' \in G.$$

Betrachte das Bündel $(X, \pi, X/G)$. Dann gilt:

(1) $\pi(U) \subseteq X/G$ *offen,*

(2) $(\pi^{-1}(\pi(U)), \pi, \pi(U))$ *ist triviales Bündel mit diskreten Fasern.*

Beweis. (1) ist klar, da π offen.
Zeige also (2): Da l eigentlich diskontinuierlich operiert, ist G diskret, denn: Sei $g_i \to g$ Folge in G mit $g_i \neq g\ \forall i \in N$, dann ist $g_i x \to gx\ \forall x \in X$.
Es genügt nun zu zeigen, dass die Abbildung h in dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\pi(U)) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G \times \pi(U) \arrow[dl, "pr_2"] \\ & \pi(U) & \end{tikzcd}$$

mit $h(u) = (g, \pi(u))$ mit $u \in gU$ ein Homöomorphismus ist: Da $\forall g \neq g' \in G$ gilt $gU \cap g'U = \emptyset$, folgt$\pi^{-1}(\pi(U)) = \dot{\bigcup}_{g\in G}\ gU$. Also ist h wohldefiniert und $\pi|_U : U \to \pi(U)$ ist Homöomorphismus und somit ist $h : \pi^{-1}(\pi(U)) \to G \times \pi(U)$ Homöomorphismus. $\square$

Bemerkung 2.37. Falls G endlich und X Hausdorffsch, dann operiert eine freie Wirkung l stets eigentlich diskontinuierlich.