

Thema:

**Klassifikation von 1-Mannigfaltigkeiten (mit Beweis) und von abgeschlossenen
2-Mannigfaltigkeiten (ohne Beweis)**

Ausarbeitung

im Rahmen des Seminars „Einführung in die Differentialtopologie“

im Fachgebiet Topologie
am Fachbereich für Mathematik

Themensteller: Prof. Dr. Christian Ausoni

Betreuer: Prof. Dr. Christian Ausoni

vorgelegt von: Markus Fishedick

Abgabetermin: 2011-04-12

Theorem Jede glatte, zusammenhängende 1-Dimensionale Mannigfaltigkeit ist diffeomorph zu S^1 oder einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Definition Eine stetige Abbildung $f : I \rightarrow M$ heißt Parametrisierung nach Bogenlänge, falls sie I diffeomorph auf eine offene Teilmenge von M abbildet und der Tangentialvektor $df_s(1) \in TM_{f(s)}$ für alle $s \in I$ die Länge 1 hat.

Lemma Seien $f : I \rightarrow M$ und $g : J \rightarrow M$ Parametrisierungen nach Bogenlänge. Dann besteht $f(I) \cap g(J)$ aus höchstens zwei Komponenten.

- Falls der Schnitt nur aus einer Komponente besteht, kann f zu einer Parametrisierung nach Bogenlänge von der Vereinigung $f(I) \cup g(J)$ erweitert werden.
- Falls der Schnitt aus zwei Komponenten besteht, muss M diffeomorph zu S^1 sein.

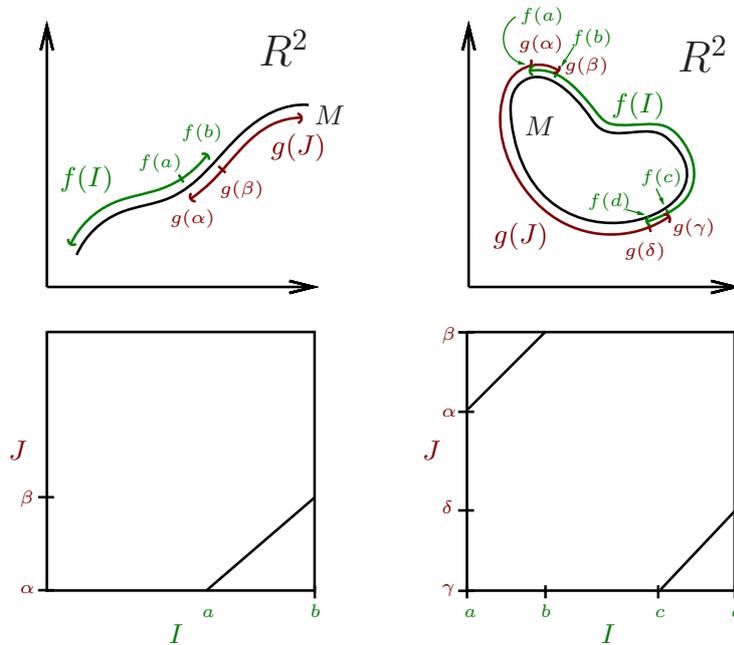


Abbildung 1: Zwei Möglichkeiten für die Parametrisierungen f und g und Skizzierung der zugehörigen Mengen Γ

Beweis des Lemmas Da f und g Parametrisierungen nach Bogenlänge sind, bildet $g^{-1} \circ f$ eine offene Teilmenge von I diffeomorph auf eine offene Teilmenge von J ab (da f die Menge I auf eine offene Teilmenge $U \subset M$ abbildet und da g stetig ist, das Urbild

$g^{-1}(U)$ der offenen Menge U auch offen ist) und die Ableitung von $g^{-1} \circ f$ ist überall ± 1 . Betrachte die Menge $\Gamma \subset I \times J$, bestehend aus allen (s, t) mit $f(s) = g(t)$. Dann ist Γ eine Teilmenge von $I \times J$, bestehend aus Geraden der Steigung ± 1 , da die Steigung der Parametrisierung nach Bogenlänge ± 1 ist. Die Abbildung $f \times g : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ist lokal diffeomorph und bildet $I \times J$ auf eine offene Umgebung von $\Delta \subset \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{2n}$ ab. Die Umkehrabbildung ist lokal stetig und da die Gerade in \mathbb{R}^2 abgeschlossen ist, ist auch das Urbild $(f \times g)^{-1}(\Delta) = \Gamma$ abgeschlossen (Abbildung 2).

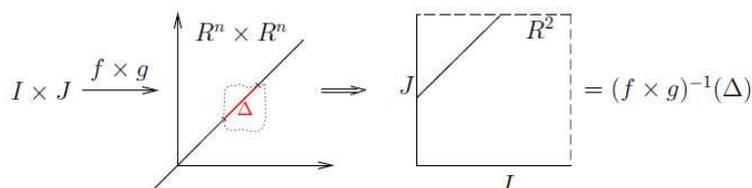


Abbildung 2: Abgeschlossenheit von Γ

Da Γ abgeschlossen und $g^{-1} \circ f$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, können diese Geraden nicht innerhalb von $I \times J$ enden, sondern müssen sich bis zum Rand erstrecken. (Würde eine Gerade innerhalb enden, gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder der Endpunkt der Geraden ist in der Geraden enthalten, oder der Endpunkt ist nicht enthalten. Im ersten Fall könnte die Gerade in einer Umgebung um den Endpunkt fortgesetzt werden, da die Funktion ein lokaler Diffeomorphismus ist. Dies kann wiederholt werden, bis der Rand von $I \times J$ erreicht ist. Im zweiten Fall wäre die Gerade an dieser Seite nicht abgeschlossen.) Da $g^{-1} \circ f$ injektiv ist, kann an jeder der vier Kanten des Rechtecks $I \times J$ höchstens eine der Geraden enden. Somit hat Γ höchstens zwei Komponenten (siehe Abb. 1). Falls Γ zwei Komponenten hat, haben sie die gleiche Steigung (da sonst zwei Geraden an einer Kante enden würden).

Falls Γ zusammenhängend ist (d.h. nur aus einer Geraden besteht), erstreckt sich $g^{-1} \circ f$ zu einer stetigen, linearen Abbildung $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nun fügen wir f und $g \circ L$ zusammen zu der Fortsetzung

$$F : I \cup L^{-1}(J) \rightarrow f(I) \cup g(J) .$$

Falls Γ aus zwei Komponenten mit Steigung $+1$ besteht, müssen sie sich wie im rechten Rechteck in Abb. 1 anordnen. Wir können annehmen, dass $\gamma = c$ und $\delta = d$, falls nötig, verschiebe das Intervall $J = (\gamma, \beta)$. Damit ergibt sich:

$$a < b \leq c < d \leq \alpha < \beta .$$

Nun setze $\Theta = \frac{2\pi}{\alpha - a}t$, um eine Abbildung auf den Einheitskreis zu erhalten. Der Nenner ergibt sich zu $\alpha - a$, da nach umlaufen des Kreisstücks durch $f(I)$ das Kreisstück von $g(J)$ nur noch bis α umlaufen werden darf, da sonst ein Teilstück doppelt abgebildet wird (siehe Abb 3.)

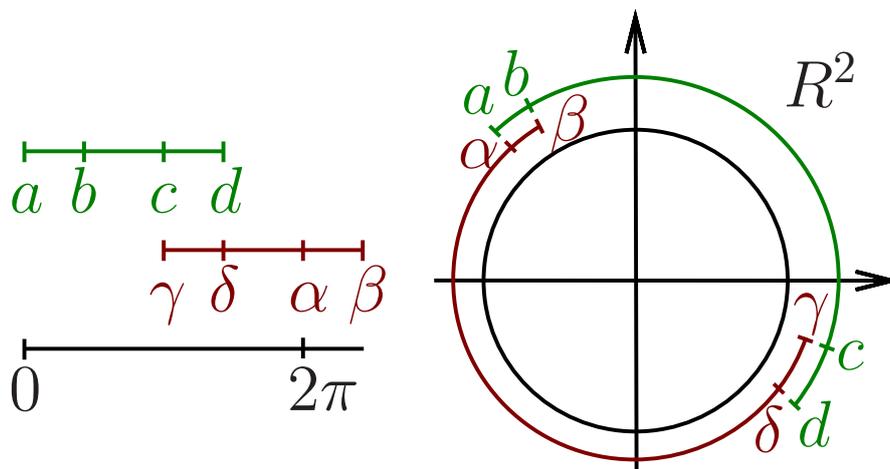


Abbildung 3: Skizze der Mengen zur Abbildung von S^1

Der Diffeomorphismus

$$h : S^1 \rightarrow M$$

ist definiert durch

$$h(\cos\Theta, \sin\Theta) = \begin{cases} f(t) & \text{für } a < t < d \\ g(t) & \text{für } c < t < \beta \end{cases}$$

Das Bild $h(S^1)$ ist kompakt und offen in M und somit die vollständige Mannigfaltigkeit von M . \square

Beweis des Theorems

Jede Parametrisierung nach Bogenlänge kann erweitert werden zu einem

$$f : I \rightarrow M,$$

dass maximal ist, im Sinne, dass f als Parametrisierung nach Bogenlänge nicht auf ein größeres Intervall erweiterbar ist:

Es ist nur nötig f so weit wie möglich nach links und dann so weit wie möglich nach rechts zu erweitern.

Falls M nicht diffeomorph zu S^1 ist, können wir zeigen, dass f surjektiv und daher ein Diffeomorphismus ist. Falls die offene Menge $f(I)$ nicht ganz M ist (also nicht surjektiv ist), gibt es einen Grenzpunkt $x \in M \setminus f(I)$. Durch Parametrisieren einer Umgebung von x nach Bogenlänge und anwenden des Lemmas sehen wir, dass f auf ein größeres Intervall erweitert werden kann. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass f maximal ist. Also ist f surjektiv. \square

Klassifikation von 2-Mannigfaltigkeiten Jede geschlossene zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu genau einer aus den drei folgenden Familien von Räumen

- i) einer 2-Sphäre
- ii) einer zusammenhängenden Summe von Tori
- iii) einer zusammenhängenden Summe von projektiven Ebenen

Bemerkung

- Die zusammenhängende Summe zweier 2-Sphären ist diffeomorph zu einer 2-Sphäre
- Die zusammenhängende Summe zweier Tori erhält man, indem man aus zwei Tori jeweils eine kreisförmige Umgebung der Punkte P_1 und P_2 heraus nimmt und die Schnittflächen aneinander fügt (siehe Abbildung 5).
- Der projektive Raum ist die Menge aller Geraden im \mathbb{R}^3 durch den Nullpunkt. Betrachte Abbildung 6: Um die projektive Ebene einer 2-Sphäre zu erhalten, zieht man alle gegenüberliegenden Punkte aufeinander. Die Punkte der oberen Halbschale mit den Punkten der unteren zu „verkleben“ ist leicht nachvollziehbar. „Verklebt“ man nun noch alle gegenüberliegenden Punkte des Äquators miteinander, so ist dies bis auf zwei Punkte P_1 und P'_1 leicht zu verfolgen. Klebt man nun auch diese beiden Punkte zusammen, so erhält man einen doppelt umlaufenden Kreis.



Abbildung 4: 2-Sphäre¹

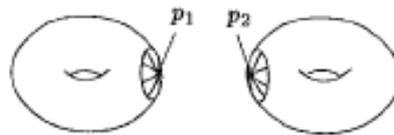


Abbildung 5: Tori²

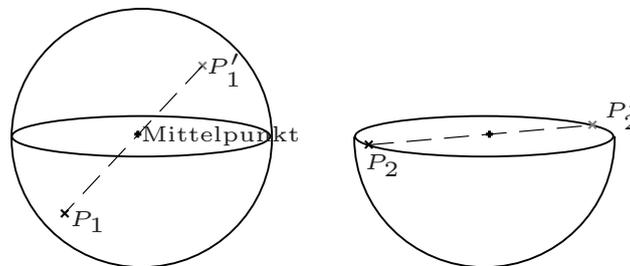


Abbildung 6: 2-Sphäre zur veranschaulichung eines Projektiven Raumes

¹http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7e/Sphere_wireframe_10deg_6r.svg/220px-Sphere_wireframe_10deg_6r.svg.png, 07.04.2010 um 18.00 Uhr

²Klaus Janich, Topologie, Springer-Verlag, 2005