

Der klassifizierende Raum einer diskreten Gruppe

Ramona Wohleib

Algebraische K-Theorie

26.10.2011

Der klassifizierende Raum einer diskreten Gruppe

Definition 1: (Die Kategorie Δ)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\underline{n} = \{0, 1, \dots, n\}$ versehen mit der üblichen Ordnung. Definiere dann die Kategorie Δ wie folgt: Die Objekte von Δ seien die \underline{n} für $n \in \mathbb{N}$ und für $n, m \in \mathbb{N}$ seien die Morphismen $f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ monotone Abbildungen (d.h. für $i < j$ gilt $f(i) \leq f(j)$).

Definition 2: (Die Abbildungen δ_i^n und σ_i^n)

Für jedes $n > 0$ und $i \in \underline{n}$ sei $\delta_i^n : \underline{n-1} \rightarrow \underline{n}$ der einzige Morphismus in $\Delta(\underline{n-1}, \underline{n})$, der injektiv mit $i \notin \text{im}(\delta_i^n)$ ist. Man nennt δ_i^n auch *Seitenabbildung*.

Für jedes $n \geq 0$ und $i \in \underline{n}$ sei $\sigma_i^n : \underline{n+1} \rightarrow \underline{n}$ der einzige surjektive Morphismus mit $(\sigma_i^n)^{-1}(\{i\})$ zweielementig. Man nennt σ_i^n auch *Ausartung*.

Bemerkung 3: (Kosimpliziale Identitäten)

Die obigen Abbildungen erfüllen die sogenannten *kosimplizialen Identitäten*

$$\delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n = \delta_j^{n+1} \circ \delta_{i-1}^n$$

für $n > 0$ und $j < i \leq n + 1$,

$$\sigma_i^{n-1} \circ \sigma_j^n = \sigma_j^{n-1} \circ \sigma_{i+1}^n$$

für $n > 0$ und $j \leq i \leq n - 1$ und

$$\sigma_i^n \circ \delta_j^{n+1} = \begin{cases} \delta_j^n \circ \sigma_{i-1}^{n-1} & \text{für } n > 0, j < i \leq n \\ \text{id}_{\underline{n}} & \text{für } n \geq 0, i \leq n, j = i, i + 1. \\ \delta_{j-1}^n \circ \sigma_i^{n-1} & \text{für } n > 0, n + 1 \geq j > i + 1 \end{cases}$$

Beweis:

Nachrechnen.

Bemerkung 4:

Jeder Morphismus in Δ lässt sich als Komposition von Seitenabbildungen und Ausartungen schreiben.

Beweis:

Sind $m, n \in \mathbb{N}$ und ist $f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ ein Morphismus, so lässt sich f eindeutig als Komposition $f = g \circ h$ schreiben mit surjektiven bzw. injektiven Morphismen $h : \underline{m} \rightarrow \underline{p}$ und $g : \underline{p} \rightarrow \underline{n}$ in Δ für ein geeignetes $p \in \mathbb{N}$. Dann ist h jedoch die Komposition von Ausartungen und g die Komposition von Seitenabbildungen.

Definition 5: (Simpliziale Objekte)

Ein *simpliziales Objekt* einer Kategorie \mathcal{C} ist ein kontravarianter Funktor $\Delta \rightarrow \mathcal{C}$ oder anders ausgedrückt ein Funktor $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$. Ein Morphismus zwischen simplizialen Objekten in \mathcal{C} ist eine natürliche Transformation.

Bemerkung 6: (Simpliziale Mengen)

Eine *simpliziale Menge* ist nach obiger Definition daher ein Funktor $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, wobei \mathbf{Set} die Kategorie der Mengen ist.

Ist $F : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ eine solche simpliziale Menge, so heißt $F(\underline{n})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die *Menge der n -Simplizes*.

Für $n > 0$ und $i \in \underline{n}$ nennen wir die von δ_i^n induzierte Abbildung $F(\delta_i^n) : F(\underline{n}) \rightarrow F(\underline{n-1})$ von Mengen wieder Seitenabbildung und für jeden n -Simplex $x \in F(\underline{n})$ heißt $F(\delta_i^n)(x)$ die *i -te Seite* von x .

Analog heißt für $n \geq 0$ und $i \in \underline{n}$ die Abbildung $F(\sigma_i^n) : F(\underline{n}) \rightarrow F(\underline{n+1})$ Ausartung und für $x \in F(\underline{n})$ das Element $F(\sigma_i^n)(x) \in F(\underline{n+1})$ der *i -te ausgeartete Simplex* von x .

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Ein Simplex $x \in F(\underline{n})$ heißt *nicht ausgeartet*, wenn er nicht der ausgeartete Simplex eines $(n-1)$ -Simplexes unter einer Ausartung ist.

Beispiel 7: (Der singuläre Kettenkomplex)

Sei X ein topologischer Raum und $\text{Sing}_*(X)$ der *totale singuläre Komplex* von X . Dann ist $\text{Sing}_n(X)$ für $n \in \mathbb{N}$ die Menge der singulären n -Simplizes in X ; d.h. die Menge der stetigen Abbildungen $\Delta_n \rightarrow X$, wobei

$$\Delta_n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

der Standard- n -Simplex ist.

Wir definieren einen Funktor $F : \Delta \rightarrow \mathcal{Top}$ wie folgt: Sind $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ ein Morphismus in Δ , so sei $F(\underline{n}) = \Delta_n$ und

$$\tilde{f} := F(f) : \Delta_m \rightarrow \Delta_n; \quad (s_0, \dots, s_m) \mapsto \left(\sum_{f(j)=0} s_j, \dots, \sum_{f(j)=n} s_j \right).$$

Man prüft leicht nach, dass F tatsächlich ein Funktor ist.

Des Weiteren haben wir einen Funktor $G : (\mathcal{Top})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ mit

$$Y \mapsto \mathcal{Top}(Y, X)$$

und

$$(f : Y \rightarrow Z) \mapsto (\mathcal{Top}(Z, X) \rightarrow \mathcal{Top}(Y, X)); \quad g \mapsto g \circ f.$$

Verknüpft man diese beiden Funktoren, so erhält man einen Funktor $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$ mit

$$\underline{n} \xrightarrow{F} \Delta_n \xrightarrow{G} \mathcal{T}op(\Delta_n, X) = \text{Sing}_n(X).$$

Somit wird $\text{Sing}_*(X)$ zu einer simplizialen Menge.

Beispiel 8: (Die n -Sphäre¹)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei (S^n) die simpliziale Menge, deren m -Simplizes durch

$$(S^n)_m = \begin{cases} \{e_m\}, & \text{falls } 0 \leq m < n \\ \{e_n, f_n\}, & \text{falls } m = n \\ \{e_m\} \cup \{\text{alle ausgearteten} \\ m\text{-Simplizes assoziiert zu } f_n\}, & \text{falls } m > n \end{cases} \quad (1)$$

gegeben sind. Die Seiten von e_m sind gleich e_{m-1} für alle $m \geq 1$ und die ausgearteten Simplizes von e_m sind gleich e_{m+1} für $m \geq 0$. Die Seiten von f_n sind gleich e_{n-1} für $n \geq 1$. Diese Daten bestimmen in der Tat eine simpliziale Menge. Die Bilder der Objekte von Δ sind durch (1) gegeben. Beachte, dass es zur Bestimmung der Bilder der Morphismen von Δ nach Bemerkung 4 ausreicht, die Bilder der δ_i^n und σ_i^n unter (S^n) festzulegen. Beachte außerdem, dass die Seiten der zu f_n assoziierten ausgearteten Simplizes sich induktiv mit Hilfe der kosimplizialen Identitäten aus Bemerkung 3 ergeben.

Definition 9: (Geometrische Realisierung)

Jeder simplizialen Menge $F : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$ können wir einen topologischen Raum $|F|$, genannt die *geometrische Realisierung*, zuordnen. Diese ist definiert als der Quotientenraum

$$\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} F(\underline{n}) \times \Delta_n \right) / \sim,$$

wobei $F(\underline{n})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie versehen sei und die Äquivalenzrelation \sim wie folgt definiert sei. Sind $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ ein Morphismus in Δ . Sei $\tilde{f} : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$ die in Beispiel 7 definierte stetige Abbildung. Dann sei \sim die Äquivalenzrelation, die durch

$$(x, \tilde{f}(y)) \sim ((F(f))(x), y)$$

für $x \in F(\underline{n})$, $y \in \Delta_m$ erzeugt wird.

¹Wir werden in Beispiel 14 noch sehen, was die folgende Konstruktion mit der n -Sphäre zu tun hat.

Lemma 10: (Funktorialität der geometrische Realisierung)

Die Konstruktion der geometrischen Realisierung ist funktoriell.

Beweis:

Sei $\eta : F \rightarrow G$ ein Morphismus von simplizialen Mengen, also eine natürliche Transformation von Funktoren $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$, so erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ Abbildungen

$$\eta_{\underline{n}} : F(\underline{n}) \rightarrow G(\underline{n})$$

und $\text{id}_{\Delta_n} : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$. Diese sind stetig, da wir $F(\underline{n})$ mit der diskreten Topologie versehen haben. Diese Abbildungen induzieren daher eine stetige Abbildung

$$\eta_* : \coprod_{n \in \mathbb{N}} F(\underline{n}) \times \Delta_n \rightarrow \coprod_{n \in \mathbb{N}} G(\underline{n}) \times \Delta_n.$$

Es bleibt zu zeigen, dass η_* mit der Äquivalenzrelationen verträglich ist. Sei dazu $f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ ein Morphismus in Δ und $\tilde{f} : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$ die in Beispiel 7 definierte stetige Abbildung. Seien $x \in F(\underline{n})$ und $y \in \Delta_m$. Dann liefern $(x, \tilde{f}(y))$ und $((F(f))(x), y)$ dasselbe Element in $|F|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \eta_*(x, \tilde{f}(y)) &= (\eta_{\underline{n}}(x), \tilde{f}(y)) \sim ((G(f))(\eta_{\underline{n}}(x)), y) \\ &= (\eta_{\underline{m}}((F(f))(x)), y) = \eta_*((F(f))(x), y). \end{aligned}$$

Daher liefern die Bilder von $(x, \tilde{f}(y))$ und $((F(f))(x), y)$ unter η_* dasselbe Element in $|G|$. Folglich induziert η_* eine stetige Abbildung $|\eta| : |F| \rightarrow |G|$.

Bemerkung 11: (Geometrische Realisierung)

Sei F eine simpliziale Menge. Dann ist $|F|$ homöomorph zu einem CW-Komplex, der eine n -Zelle für jeden nicht ausgearteten n -Simplex von F hat. Beachte dabei, dass $\coprod_{n \in \mathbb{N}} F(\underline{n}) \times \Delta_n$ eine kanonische Zellstruktur mit den n -Zellen $\{x\} \times \Delta_n$ für

$x \in F(\underline{n})$ besitzt. Die Äquivalenzrelation sorgt dafür, dass die entsprechenden Zellen in $|F|$ passend verklebt werden, sodass $|F|$ damit zu einem CW-Komplex wird. Ist $x \in F(\underline{n})$ ein ausgearteter Simplex, so existiert ein $x' \in F(\underline{n-1})$ und ein $0 \leq i < n$ mit $x = (F(\sigma_i^{n-1}))(x')$. Nach Definition der Äquivalenzrelation gilt dann für alle $y \in \Delta_n$

$$(x, y) = ((F(\sigma_i^{n-1}))(x'), y) \sim (x', \widetilde{\sigma_i^{n-1}}(y)).$$

Daher wird jede n -Zelle, die einem ausgearteten Simplex entspricht, vollständig mit dem $(n-1)$ -Skelett verklebt.

Sind F, G simpliziale Mengen, so sei $F \times G$ die simpliziale Menge mit

$$\underline{n} \mapsto F(\underline{n}) \times G(\underline{n})$$

und

$$(f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}) \mapsto (F(f) \times G(f)).$$

Nach einem Theorem von Milnor ([Mil, Theorem 2, S.359]) ist die natürliche Abbildung $|F \times G| \rightarrow |F| \times |G|$, die von den Morphismen $F \times G \rightarrow F$ und $F \times G \rightarrow G$ von simplizialen Mengen induziert wird, eine stetige Bijektion und ein Homöomorphismus, falls $|F| \times |G|$ mit der kompakt erzeugten Topologie bzgl. der Produkttopologie versehen ist (d.h. wenn wir das Produkt in der Kategorie der kompakt erzeugten Räume bilden). Insbesondere sind $|F \times G|$ und $|F| \times |G|$ homöomorph, falls $|F|$ oder $|G|$ lokal kompakt ist.

Die Homologie von $|F|$ kann man wie folgt berechnen. Bezeichne $C_n(F)$ die abelsche Gruppe auf $F(\underline{n})$ und sei $\bar{\delta}_i^n : C_n(F) \rightarrow C_{n-1}(F)$ die von $F(\delta_i^n)$ induzierte Abbildung. Mit $d_n = \sum_{i \in \underline{n}} (-1)^i \bar{\delta}_i^n$ ist $C(F) = (C_n(F), d_n)_{n>0}$ ein Kettenkomplex. Für jede abelsche Gruppe A gilt dann

$$H_*(|F|, A) = H_*(C(F) \otimes_{\mathbb{Z}} A)$$

und

$$H^*(|F|, A) = H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C(F), A)).$$

(Siehe [May, Proposition (16.2), S.63] und [May, Corollary (22.3), S.95].)

Beispiel 12: (Die simpliziale Menge $\Delta(n)$)

Sei $\Delta(n) = \Delta(\cdot, \underline{n})$ die simpliziale Menge, die auf natürliche Weise zu $\underline{n} \in \text{Ob}\Delta$ assoziiert ist. Es gilt $|\Delta(n)| = \Delta_n$.

Beweis:

Betrachte die Abbildung

$$\alpha : |\Delta(n)| = \left(\prod_{m \in \mathbb{N}} \Delta(\underline{m}, \underline{n}) \times \Delta_m \right) / \sim \rightarrow \Delta_n; \quad [(g, y)] \mapsto \tilde{g}(y).$$

Seien $f : \underline{m} \rightarrow \underline{p}$ ein Morphismus in Δ , $g \in \Delta(n)(\underline{p}) = \Delta(\underline{p}, \underline{n})$ und $y \in \Delta_m$. Dann gilt

$$\alpha([(g, \tilde{f}(y))]) = \tilde{g}(\tilde{f}(y)) = \widetilde{g \circ f}(y)$$

und

$$\alpha([((\Delta(n)(f))(g), y)]) = \alpha([(g \circ f, y)]) = \widetilde{g \circ f}(y).$$

Somit ist obige Abbildung wohldefiniert und offensichtlich stetig. Ebenso ist die Abbildung

$$\beta : \Delta_n \rightarrow |\Delta(n)|; \quad y \mapsto [(\text{id}_{\underline{n}}, y)]$$

stetig. Es gilt für $y \in \Delta_n$

$$\alpha(\beta(y)) = \alpha([\text{id}_{\underline{n}}, y]) = \widetilde{\text{id}}_{\underline{n}}(y) = \text{id}_{\Delta_n}(y) = y$$

und für $(g, y) \in \Delta(\underline{m}, \underline{n}) \times \Delta_m$

$$\beta(\alpha([(g, y)])) = \beta(\tilde{g}(y)) = [(\text{id}_{\underline{n}}, \tilde{g}(y))] = [(\text{id}_{\underline{n}} \circ g, y)] = [(g, y)].$$

Also sind α und β zueinander inverse Homöomorphismen.

Sei X ein topologischer Raum und $\text{Sing}_*(X)$ der totale singuläre Komplex (vgl. Beispiel 7). Dann gibt es eine surjektive Abbildung

$$f : |\text{Sing}_*(X)| \rightarrow X; \quad [(g, y)] \mapsto g(y).$$

Die Abbildung f ist wohldefiniert, da für jeden Morphismus $h : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ in Δ , $g : \Delta_n \rightarrow X$ stetig und $y \in \Delta_m$

$$\begin{aligned} f([(g, \tilde{h}(y))]) &= g(\tilde{h}(y)) = g \circ \tilde{h}(y) = ((\text{Sing}_*(X))(h))(g)(y) \\ &= f([((\text{Sing}_*(X))(h), y)]) \end{aligned}$$

gilt. Außerdem ist f surjektiv, da für jedes $x \in X$ die Abbildung

$$g : \Delta_0 = \{1\} \rightarrow X; \quad 1 \mapsto x$$

stetig ist und $f([(g, 1)]) = g(1) = x$ gilt.

Sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Dann ist $\text{Sing}_*(x_0) \subseteq \text{Sing}_*(X)$ ein Unterkomplex; d.h. es gilt $\text{Sing}_*(x_0)(\underline{n}) = \text{Sing}_n(x_0) \subseteq \text{Sing}_n(X) = \text{Sing}_*(X)(\underline{n})$. Der Raum $|\text{Sing}_*(x_0)|$ ist ein Punkt, da alle Simplizes von $\text{Sing}_*(x_0)$ ausgeartet sind, und wird unter f auf x_0 geschickt.

Satz 13:

Die Abbildung

$$f : (|\text{Sing}_*(X)|, |\text{Sing}_*(x_0)|) \rightarrow (X, x_0)$$

induziert einen Isomorphismus auf Homotopiegruppen. Ist X ein CW-Komplex, so ist f daher eine Homotopieäquivalenz.

Beweis:

Siehe [May, Theorem (16.6), S.65].

Beispiel 14: (Die geometrische Realisierung von (S^n))

Sei (S^n) die simpliziale Menge aus Beispiel 1. Dann ist die geometrische Realisierung $|(S^n)|$ natürlich homöomorph zu der n -Sphäre S^n .

Beweis:

Die einzigen nicht ausgearteten Simplizes von (S^n) sind e_0 und f_n . Somit ist $|(S^n)|$ ein CW-Komplex mit einer 0-Zelle und einer n -Zelle. Die Seiten von f_n sind alle ausgeartet, sodass wir $|(S^n)|$ durch Ankleben einer n -Zelle an eine 0-Zelle entlang der konstanten Klebeabbildung erhalten. Dies ist die Standardbeschreibung von S^n als CW-Komplex.

Definition 15: (Der Nerv einer Kategorie)

Sei \mathcal{C} eine kleine Kategorie; d.h. eine Kategorie, deren Objekte eine Menge bilden. Der *Nerv* von \mathcal{C} , bezeichnet mit NC , ist die folgende simpliziale Menge

$$\begin{aligned} \Delta^{\text{op}} &\rightarrow \mathbf{Set}; \\ \underline{n} &\mapsto \left\{ A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n \mid A_i \in \text{Ob}\mathcal{C}, f_i \in \text{Mor}\mathcal{C} \right\} \\ (f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}) &\mapsto \left(\begin{array}{c} NC(\underline{n}) \rightarrow NC(\underline{m}); \\ (A_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n) \mapsto (B_0 \xrightarrow{g_1} \cdots \xrightarrow{g_m} B_m) \end{array} \right) \end{aligned}$$

wobei $B_j = A_{f(j)}$ gilt und $g_j : B_{j-1} \rightarrow B_j$ die Komposition der entsprechenden f_i ist. Nach Definition ist dann für $n > 0$ und $i \in \underline{n}$ die i -te Seite von

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n \tag{2}$$

der Simplex

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} A_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1} \circ f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

und der i -te ausgeartete Simplex von (2) der Simplex

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{\text{id}_{A_i}} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n.$$

Definition 16: (Der klassifizierende Raum einer Kategorie)

Sei \mathcal{C} eine kleine Kategorie. Dann ist der *klassifizierende Raum* von \mathcal{C} der Raum

$$BC = |NC|.$$

Bemerkung 17: (Funktorialität des klassifizierenden Raumes)

Die Konstruktion des klassifizierenden Raumes ist funktoriell.

Beweis:

Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor zwischen kleinen Kategorien. Dann induziert F eine natürliche Transformation $NF : N\mathcal{C} \rightarrow N\mathcal{D}$, die durch

$$NF_{\underline{n}} : \quad N\mathcal{C}(\underline{n}) \rightarrow N\mathcal{D}(\underline{n});$$

$$(A_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} A_n) \mapsto (F(A_0) \xrightarrow{F(f_1)} \dots \xrightarrow{F(f_n)} F(A_n))$$

gegeben ist. Es ist klar, dass es sich bei NF tatsächlich um eine natürliche Transformation handelt. Die Funktorialität der geometrischen Realisierung (siehe Lemma 10) liefert uns eine stetige Abbildung $BF : B\mathcal{C} \rightarrow B\mathcal{D}$.

Beispiel 18: (Der klassifizierende Raum der Kategorie $\{0 < 1\}$)

Sei $\{0 < 1\}$ die kleine Kategorie mit den Objekten $0, 1$, deren einziger Morphismus (außer den beiden Identitätsmorphissen) $0 \rightarrow 1$ ist. Dann gilt $B\{0 < 1\} = [0, 1]$.

Beweis:

Die einzigen nicht ausgearteten Simplexes von $N\{0 < 1\}$ sind $0, 1$ und $0 \rightarrow 1$. Also ist $B\{0 < 1\}$ ein CW-Komplex mit zwei 0-Zellen und einer 1-Zelle. Die Seiten von $0 \rightarrow 1$ sind 0 und 1 , sodass die 1-Zelle entlang der Abbildung

$$S^0 \rightarrow \{0, 1\}; \quad -1 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto 1$$

an die 0-Zellen angeklebt wird. Also gilt $B\{0 < 1\} = [0, 1]$.

Seien \mathcal{C} und \mathcal{C}' kleine Kategorien und $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ ihr Produkt, sodass

$$\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}') = (\text{Ob}\mathcal{C}) \times (\text{Ob}\mathcal{C}')$$

und

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C}'((A, B), (C, D)) = \mathcal{C}(A, C) \times \mathcal{C}'(B, D)$$

gilt. Dann ist $N(\mathcal{C} \times \mathcal{C}')$ offensichtlich das Produkt $N\mathcal{C} \times N\mathcal{C}'$ simplizialer Mengen. Somit ist $B(\mathcal{C} \times \mathcal{C}') \rightarrow B\mathcal{C} \times B\mathcal{C}'$ eine stetige Bijektion, die ein Homöomorphismus ist, wenn das Produkt auf der rechten Seite mit der kompakt erzeugten Topologie versehen ist; insbesondere wenn $B\mathcal{C}$ oder $B\mathcal{C}'$ lokal kompakt sind.

Folglich gilt $B(\mathcal{C} \times \{0 < 1\}) = B\mathcal{C} \times [0, 1]$. Ein Funktor $H : \mathcal{C} \times \{0 < 1\} \rightarrow \mathcal{D}$ ist einfach ein Paar von Funktoren $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ (gegeben durch $F(A) = H((A, 0))$ und $G(A) = H((A, 1))$) zusammen mit einer natürlichen Transformation $\eta : F \rightarrow G$ (gegeben durch $\eta_A = H((\text{id}_A, 0 \rightarrow 1))$). Daraus folgt das folgende Lemma.

Lemma 19:

Seine $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren zwischen kleinen Kategorien, sodass eine natürliche Transformation $\eta : F \rightarrow G$ existiert. Dann sind $BF, BG : B\mathcal{C} \rightarrow B\mathcal{D}$ homotop.

Beweis:

F, G und η liefern nach obigen Überlegungen einen Funktor $H : \mathcal{C} \times \{0 < 1\} \rightarrow \mathcal{D}$ mit $F(A) = H((A, 0))$ und $G(A) = H((A, 1))$. Dann induziert H eine stetige Abbildung

$$BH : B(\mathcal{C} \times \{0 < 1\}) = BC \times [0, 1] \rightarrow B\mathcal{D}$$

mit $BH(\cdot, 0) = BF$ und $BH(\cdot, 1) = BG^2$. Also sind BF und BG homotop.

Korollar 20:

Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor zwischen kleinen Kategorien. Nehmen wir an, dass F entweder ein Links- oder ein Rechtsadjungiertes besitzt. Dann ist BF eine Homotopieäquivalenz. Insbesondere ist $B\mathcal{C}$ zusammenziehbar, falls \mathcal{C} eine kleine Kategorie mit initialem oder finalem Objekt ist.

Beweis:

Sei $(F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C})$ ein adjungiertes Paar. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\Phi : \mathcal{D}(F(\cdot), \cdot) \rightarrow \mathcal{C}(\cdot, G(\cdot))$$

von Funktoren $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}et$. Wir wollen nun mit Hilfe von Φ eine natürliche Transformation $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ definieren. Für $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$ setze dazu $\eta_X = \Phi_{X, F(X)}(\text{id}_{F(X)})$. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus in \mathcal{C} . Da Φ eine natürliche Transformation ist, haben

²Sei $A_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} A_n$ ein Diagramm in \mathcal{C} und $y \in \Delta_n$. Dann gilt unter der Abbildung

$$BH : BC \times [0, 1] = BC \times B\{0 < 1\} = B(\mathcal{C} \times \{0 < 1\}) \rightarrow B\mathcal{D}$$

$$\begin{aligned} ((A_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} A_n, y), 0) &\mapsto ((A_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} A_n, y), [(0, 1)]) \\ &= ((A_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} A_n, y), [(0 \xrightarrow{\text{id}_0} \dots \xrightarrow{\text{id}_0} 0, y)]) \\ &\mapsto ((A_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} A_n, 0 \xrightarrow{\text{id}_0} \dots \xrightarrow{\text{id}_0} 0), y) \\ &\mapsto [(A_0 \times 0 \xrightarrow{f_1 \times \text{id}_0} \dots \xrightarrow{f_n \times \text{id}_0} A_n \times 0, y)] \\ &\mapsto [(H(A_0 \times 0) \xrightarrow{H(f_1 \times \text{id}_0)} \dots \xrightarrow{H(f_n \times \text{id}_0)} H(A_n \times 0), y)] \\ &= [(F(A_0) \xrightarrow{F(f_1)} \dots \xrightarrow{F(f_n)} F(A_n), y)] \\ &= BF([(A_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} A_n, y)]). \end{aligned}$$

Analoges gilt für $BH(\cdot, 1)$.

wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}(F(X), F(X)) & \xrightarrow{\Phi_{X,F(X)}} & \mathcal{C}(X, G(F(X))) \\
\downarrow (\text{id}_{F(X)}, F(f)) & & \downarrow (\text{id}_X, G(F(f))) \\
\mathcal{D}(F(X), F(Y)) & \xrightarrow{\Phi_{X,F(Y)}} & \mathcal{C}(X, G(F(Y))) \\
\uparrow (F(f), \text{id}_{F(Y)}) & & \uparrow (f, \text{id}_{G(F(Y))}) \\
\mathcal{D}(F(Y), F(Y)) & \xrightarrow{\Phi_{Y,F(Y)}} & \mathcal{C}(Y, G(F(Y))).
\end{array}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
\eta_Y \circ f &= (f, \text{id}_{G(F(Y))})(\eta_Y) \\
&= (f, \text{id}_{G(F(Y))})(\Phi_{Y,F(Y)}(\text{id}_{F(Y)})) \\
&= \Phi_{X,F(Y)}((F(f), \text{id}_{F(Y)})(\text{id}_{F(Y)})) \\
&= \Phi_{X,F(Y)}(F(f)) \\
&= \Phi_{X,F(Y)}((\text{id}_{F(X)}, F(f))(\text{id}_{F(X)})) \\
&= (\text{id}_X, G(F(f)))(\Phi_{X,F(X)}(\text{id}_{F(X)})) \\
&= (\text{id}_X, G(F(f)))(\eta_X) \\
&= G(F(f)) \circ \eta_X.
\end{aligned}$$

Somit ist η eine natürliche Transformation zwischen $\text{id}_{\mathcal{C}}$ und $G \circ F$. Analog erhält man eine natürliche Transformation zwischen $\text{id}_{\mathcal{D}}$ und $F \circ G$. Nach Lemma 19 sind $B(G \circ F) = BG \circ BF$ und $B(F \circ G) = BF \circ BG$ homotop zu id_{BC} bzw. $\text{id}_{\mathcal{D}}$. Also ist BF eine Homotopieäquivalenz.

Sei nun \mathcal{C} eine kleine Kategorie, die ein initiales Objekt X besitzt. Sei $\underline{*}$ die Kategorie mit einem Objekt $*$, die lediglich den Morphismus id_* besitzt. Dann bilden die Funktoren

$$\begin{aligned}
F : \underline{*} &\rightarrow \mathcal{C}; \\
* &\mapsto X \\
\text{id}_* &\mapsto \text{id}_X
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
G : \mathcal{C} &\rightarrow \underline{*}; \\
Y &\mapsto * \\
f &\mapsto \text{id}_*
\end{aligned}$$

ein adjungiertes Paar, da

$$\Phi : \mathcal{C}(F(\cdot), \cdot) \rightarrow \underline{*}(\cdot, G(\cdot))$$

mit

$$\Phi_{*,Y} : \mathcal{C}(F(*), Y) = \mathcal{C}(X, Y) = \{X \rightarrow Y\} \rightarrow \underline{*}(*, G(Y)) = \underline{*}(*, *) = \{\text{id}_*\}$$

ein natürlicher Isomorphismus von Funktoren $\underline{*}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ ist. Damit hat BC den selben Homotopietyp wie $B\underline{*} = \{*\}$. Somit ist BC zusammenziehbar. Analog folgt die Behauptung im Fall, dass \mathcal{C} ein finales Objekt besitzt.

Lemma 21:

Sei I eine kleine filtrierte Kategorie und sei $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ eine Familie von kleinen Kategorien indiziert durch I . Sei $\mathcal{C} = \varinjlim_I \mathcal{C}_i$ der direkte Limes. Sei $X_i \in \text{Ob}\mathcal{C}_i$ eine Familie von Objekten, sodass $X_i \mapsto X_j$ unter den Übergangsfunktoren $\mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}_j$ der gegebenen Familie (entsprechend den Morphismen $i \rightarrow j$ in I) gilt und sei $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$ das gemeinsame Bild der X_i . Dann gilt

$$\pi_n(BC, X) = \varinjlim_I \pi_n(BC_i, X_i)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Jedes endliche Diagramm in \mathcal{C} ist das Bild eines entsprechenden Diagramms in einem \mathcal{C}_i . Somit gilt $NC = \varinjlim_I NC_i$ (wobei $\left(\varinjlim_I NC_i\right)(\underline{n}) = \varinjlim_I NC_i(\underline{n})$ gilt) und jeder endliche Unterkomplex³ von NC ist das isomorphe Bild eines Unterkomplexes eines NC_i . Da $\pi_n(BC, X)$ der direkte Limes der π_n aller endlichen Unterkomplexe von NC , die X (betrachtet als Element von $NC(\underline{0})$) enthalten, ist⁴ und das entsprechende für jedes NC_i gilt, folgt die Behauptung.

Wir nennen eine Kategorie *zusammenziehbar*, wenn dies für ihren klassifizierenden Raum gilt und analog einen Funktor F eine *Homotopieäquivalenz*, wenn BF eine ist.

³Das ist eine simpliziale Teilmenge von NC mit einer endlichen Anzahl von nicht ausgearteten Simplizes.

⁴ $\pi_n(BC, X)$ ist die Menge der Homotopieklassen von punktierten Abbildungen $f : (S^n, *) \rightarrow (BC, X)$. Da S^n kompakt ist, ist auch das Bild von f kompakt in BC . Daher liegt das Bild von f in einem endlichen Unterkomplex Y von X . Daher faktorisiert f über Y und wegen $f(*) = X$ gilt $X \in Y$. Da BC eine n -Zelle für jeden nicht ausgearteten Simplex von NC besitzt, entspricht Y einem endlichen Unterkomplex von NC .

Korollar 22:

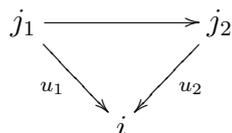
Jede kleine filtrierte Kategorie ist zusammenziehbar.

Beweis:

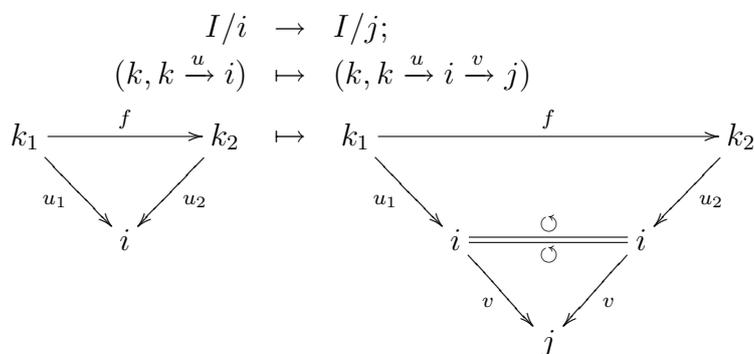
Sei I eine kleine filtrierte Kategorie. Für jedes $i \in \text{Ob}I$ bezeichne I/i die Kategorie der Objekte über i , bestehend aus Paaren $(j, j \xrightarrow{u} i)$ und Morphismen

$$(j_1, j_1 \xrightarrow{u_1} i) \rightarrow (j_2, j_2 \xrightarrow{u_2} i)$$

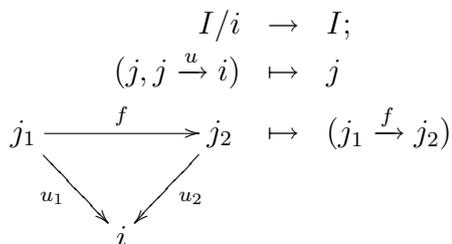
sind kommutative Diagramme



Dann ist $(I/i)_{i \in I}$ ein direktes System mit den Übergangsfunktoren

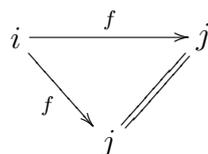


für $i \xrightarrow{v} j$ in I . Die Funktoren



sind offensichtlich mit den Übergangsfunktoren verträglich und induzieren damit einen Funktor $F : \varinjlim I/i \rightarrow I$. Wir wollen zeigen, dass F eine Äquivalenz von Kategorien ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass F volltreu und wesentlich surjektiv ist.

Ist $f : i \rightarrow j$ ein Morphismus in I , so ist das Diagramm



kommutativ und somit ein Morphismus in I/j . Das Bild dieses Morphismus in $\varinjlim I/i$ wird unter F auf f abgebildet. Somit ist F voll.
Seien kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} j_1 & \xrightarrow{f} & j_2 \\ & \searrow u_1 & \swarrow u_2 \\ & i & \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} j_1 & \xrightarrow{f} & j_2 \\ & \searrow v_1 & \swarrow v_2 \\ & k & \end{array}$$

gegeben (also Elemente, deren Bilder in $\varinjlim I/i$ unter F auf den selben Morphismus in I abgebildet werden). Da I filtriert ist, gibt es ein Objekt l und Morphismen $i \rightarrow l$, $k \rightarrow l$ in I . Dann stimmen die Bilder der obigen beiden kommutativen Diagramme mit den Bildern der beiden kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} j_1 & \xrightarrow{f} & j_2 \\ & \searrow \tilde{u}_1 & \swarrow \tilde{u}_2 \\ & l & \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} j_1 & \xrightarrow{f} & j_2 \\ & \searrow \tilde{v}_1 & \swarrow \tilde{v}_2 \\ & l & \end{array}$$

in $\varinjlim I/i$ überein, wobei $\tilde{u}_n : j_n \xrightarrow{u_n} i \rightarrow l$ und $\tilde{v}_n : j_n \xrightarrow{v_n} k \rightarrow l$ für $n = 1, 2$ gilt. Da I filtriert ist, existiert ein Objekt m und ein Morphismus $l \xrightarrow{w} m$ in I , sodass $w \circ \tilde{u}_1 = w \circ \tilde{v}_1 =: w_1$ und $w \circ \tilde{u}_2 = w \circ \tilde{v}_2 =: w_2$ gilt. Somit stimmen die Bilder dieser kommutativen Diagramme mit dem Bild des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} j_1 & \xrightarrow{f} & j_2 \\ & \searrow w_1 & \swarrow w_2 \\ & m & \end{array}$$

in $\varinjlim I/i$ überein, sodass F treu ist.

Ist i ein Objekt in I , so ist $(i, i \xrightarrow{\text{id}_i} i)$ ein Objekt in I/i , dessen Bild in $\varinjlim I/i$ unter F auf i abgebildet wird. Somit ist F wesentlich surjektiv.

Aber $(i, i \xrightarrow{\text{id}_i} i)$ ist ein finales Objekt in I/i . Somit ist I/i nach Korollar 20 zusammenziehbar. Nach Lemma 19 und 21 verschwinden daher die Homotopiegruppen von BI ; d.h. BI ist schwach zusammenziehbar. Da BI ein CW-Komplex ist, ist BI nach Whiteheads Theorem ([Ros, Theorem 5.1.3, S.253]) schon zusammenziehbar.

Bemerkung 23:

Der Funktor der klassifizierenden Räume ist nicht voll. Ein interessantes Beispiel ist gegeben durch den natürlichen Homöomorphismus $BC \cong BC^{\text{op}}$.

Betrachtet man etwa die Kategorie \mathcal{C} mit den Objekten $0, 1, 2$ und den Morphismen $\text{id}_0, \text{id}_1, \text{id}_2, 0 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2$, so kann ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ auf den Objekten keine

surjektiv Abbildung liefern. Somit kann F keinen Homöomorphismus auf den klassifizierenden Räumen induzieren.

Definition 24: (Der klassifizierende Raum einer diskreten Gruppe)

Sei G eine diskrete Gruppe. Der *klassifizierende Raum* BG von G ist ein zusammenhängender Raum⁵ mit $\pi_1(BG) = G$ und $\pi_n(BG) = 0$ für alle $n \geq 2$.

Lemma 25: (Der klassifizierende Raum einer diskreten Gruppe)

Sei G eine diskrete Gruppe und \underline{G} die Kategorie mit einem Objekt $*$ und $\underline{G}(*, *) = G$. Dann ist $B\underline{G}$ der klassifizierende Raum von G .

Beweis:

Als CW-Komplex ist $B\underline{G}$ genau dann zusammenhängend, wenn sein 1-Skelett zusammenhängend ist. Da $B\underline{G}$ genau eine 0-Zelle besitzt und jede 1-Zelle mit dieser 0-Zelle verklebt ist, ist letzteres offensichtlich der Fall.

Sei \tilde{G} die Kategorie mit $\text{Ob}(\tilde{G}) = G$ und $\tilde{G}(g, h) = \{g \rightarrow h\}$ für alle $g, h \in G$, sodass die Kompositionsregel

$$(g_2 \rightarrow g_3) \circ (g_1 \rightarrow g_2) = g_1 \rightarrow g_3$$

für $g_1, g_2, g_3 \in G$ erfüllt ist. Dann haben wir einen Funktor

$$\begin{aligned} \tilde{G} &\rightarrow \underline{G}; & g &\mapsto * \\ & & (g \rightarrow h) &\mapsto hg^{-1}. \end{aligned}$$

Die Gruppe G wirkt auf \tilde{G} durch

$$g \cdot h = hg^{-1}$$

und

$$g \cdot (h_1 \rightarrow h_2) = (h_1 g^{-1} \rightarrow h_2 g^{-1}).$$

Diese Wirkung induziert auf natürliche Weise Wirkungen von G auf $N\tilde{G}$ und $\coprod_{n \in \mathbb{N}} N\tilde{G}(n) \times \Delta_n$ (dabei wirkt G trivial auf den Δ_n). Man sieht leicht, dass letz-

tere Wirkung mit der Äquivalenzrelation \sim verträglich ist und somit eine Wirkung von G auf $B\tilde{G}$ induziert.

Da die Isotropiegruppe eines Elementes von \tilde{G} für die G -Wirkung trivial ist, ist die Isotropiegruppe eines n -Simplexes in $N\tilde{G}$ ebenfalls trivial. Also wirkt G frei auf $B\tilde{G}$.

⁵vom Homotopietyp eines CW-Komplexes

Der Funktor $\tilde{G} \rightarrow \underline{G}$ ist G -invariant für die triviale G -Wirkung auf \underline{G} , da für alle $g \in G$ und Morphismen $h_1 \rightarrow h_2$ in \tilde{G}

$$g \cdot (h_1 \rightarrow h_2) = (h_1 g^{-1} \rightarrow h_2 g^{-1}) \mapsto h_2 g^{-1} (h_1 g^{-1})^{-1} = h_2 g^{-1} g h_1^{-1} = h_2 h_1^{-1} = g \cdot (h_2 h_1^{-1})$$

gilt. (Auf den Objekten ist die G -Invarianz ohnehin klar.) Daher ist $B\tilde{G} \rightarrow B\underline{G}$ ebenfalls G -invariant für die triviale G -Wirkung auf $B\underline{G}$.

Mit Hilfe von [Sri, Corollary (A.49)] sehen wir, dass $B\tilde{G} \rightarrow B\underline{G}$ ein lokal trivialer Überlagerungsraum mit (diskreten) Fasern isomorph zu G betrachtet als das 0-Skelett von $B\tilde{G}$ ist und die Gruppe G transitiv auf diesen Fasern wirkt.

Somit gilt $B\underline{G} \cong B\tilde{G}/G$ und $B\tilde{G} \rightarrow B\underline{G}$ ist eine normale Überlagerung mit Decktransformationsgruppe G . Da \tilde{G} ein initiales Objekt hat⁶, ist $B\tilde{G}$ nach Korollar 20 zusammenziehbar. Also gilt $\pi_1(B\underline{G}) = G$ und $\pi_n(B\underline{G}) = \pi_n(B\tilde{G}) = 0$ für $n \geq 2$ (benutze [Ros, Corollary 5.1.25, S.262]).

Bemerkung 26: (Die (Ko-)Homologie des klassifizierenden Raumes)

Sei G eine diskrete Gruppe und BG sein klassifizierender Raum. Nach Bemerkung 11 berechnet sich die (Ko-)Homologie von BG mit Hilfe des Kettenkomplexes $C(N\underline{G})$. Für $n \geq 1$ ist dabei

$$C_n(N\underline{G}) = \bigoplus_{* \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_n} *} \mathbb{Z} = \bigoplus_{(g_1, \dots, g_n) \in G^n} \mathbb{Z}.$$

Außerdem gilt für $n > 1$ und $i \in \underline{n}$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_i^n : C_n(N\underline{G}) &\rightarrow C_{n-1}(N\underline{G}); \\ (g_1, \dots, g_n) &\mapsto \begin{cases} (g_2, \dots, g_n), & \text{falls } i = 0 \\ (g_1, \dots, g_{n-1}) & \text{falls } i = n \\ (g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n), & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} d_n : C_n(N\underline{G}) &\rightarrow C_{n-1}(N\underline{G}); \\ (g_1, \dots, g_n) &\mapsto (g_2, \dots, g_n) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n) \right) \\ &\quad + (g_1, \dots, g_{n-1}). \end{aligned}$$

⁶Jedes Objekt ist ein initiales Objekt in \tilde{G} !

Literatur

- [May] J.P. May: *Simplicial objects in algebraic topology*, D. Van Nostrand Company, 1967.
- [Mil] J. Milnor: *The geometric realisation of a semi-simplicial complex*, Annals of Mathematics 65 (1957), S.357-362.
- [Ros] J. Rosenberg: *Algebraic K-theory and its applications*, Graduate Texts in Mathematics 147, Springer, 1994.
- [Sri] V. Srinivas: *Algebraic K-theory*, Progress in Mathematics 90, Birkhäuser, 1996.