

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
Centre d'Orsay

**Analyse multifractale
de processus multiplicatifs ou additifs,
et ubiquité conditionnée**

Mémoire

présenté pour obtenir
le diplôme d'

Habilitation à diriger des recherches
Spécialité: Mathématiques

par

Julien BARRAL

Le 23 mai 2005 devant le jury composé des Professeurs

Jean BERTOIN

Stéphane JAFFARD

Jean-Pierre KAHANE

Benoît MANDELBROT

Jacques PEYRIÈRE

Wendelin WERNER

Table des matières

Introduction	1
0.1 Description succincte de mes travaux et de leur origine	1
0.2 Exemples de comportements multifractals remarquables	10
0.2.1 Dans le cadre du chaos multiplicatif	10
0.2.2 Dans le cadre du chaos additif	15
0.2.3 Combinaisons des chaos additifs et multiplicatifs, et ubiquité conditionnée	20
0.3 Organisation du mémoire	22
0.4 Quelques notations	23
1 Un résultat liant deux formalismes multifractals pour les mesures	25
1.1 Un formalisme multifractal avec boîtes	26
1.2 Un formalisme centré	27
1.3 Un passage du premier au second formalisme	28
2 Contributions à l'étude de certaines T-martingales et de leurs extensions.	
Application à deux problèmes de recouvrement aléatoire	31
2.1 Non-dégénérescence, moments, et analyse multifractale pour des $[0,1]$ -martingales statistiquement auto-similaires dans $\mathcal{M}$	35
2.1.1 Propriété d'auto-similarité en loi pour μ quand $\{Q_\varepsilon\} \in \mathcal{M}'$	36
2.1.2 Non dégénérescence et moments dans $\mathcal{M}'$	37
2.1.3 Analyse multifractale dans $\mathcal{M}'$	38
2.1.4 Remarque sur le remplacement de ℓ par une mesure quasi-Bernoulli σ . .	40
2.1.5 Un substitut à la cascade canonique dans le cas critique de dégénérescence et un complément au Théorème 2.1.4	41
2.1.6 Résultats complémentaires pour les cascades canoniques auto-similaires et certaines de leurs extensions	44
2.2 Non dégénérescence, régularité du processus multiplicatif, dimension de $Q \cdot \sigma$ et comportement multifractal de Q_ε sans auto-similarité en loi dans $\mathcal{M}$	47
2.2.1 $[0,1]$ -martingales dans une algèbre de Banach, non dégénérescence et régularité	47
2.2.2 Résultats supplémentaires de régularité du processus multiplicatif dans les cas de Q^C et Q^P	50
2.2.3 Estimation de la dimension de la mesure limite	53

2.2.4	Analyse multifractale de $Q_\varepsilon(t)$ pour des $[0,1]$ -martingales poissonniennes, et fréquences de recouvrement	59
2.3	Application au recouvrement aléatoire du cercle par des arcs aléatoires	60
2.4	Résultats pour des $[0,1]$ -martingales liées à certains opérateurs de Perron-Fröbenius	62
2.4.1	Non dégénérescence de μ	62
2.4.2	Analyse multifractale de μ pour des W présentant un ensemble dénombrable dense de points de saut	65
3	Ubiquité conditionnée et vitesse de renouvellement de la multifractalité	69
3.1	Résultats d'ubiquité conditionnée	69
3.1.1	Majoration de $\dim S_\mu(\rho, \delta, \alpha, \varepsilon)$	70
3.1.2	Minoration de $\dim S_\mu(\rho, \delta, \alpha, \varepsilon)$	71
3.1.3	Une application à l'approximation Diophantienne	75
3.2	Vitesse de renouvellement des ensembles de niveaux pour certains chaos multiplicatifs auto-similaires en loi	76
3.2.1	Le cas des mesures de Gibbs aléatoires ν_q	77
3.2.2	Le cas des $[0,1]$ -martingales μ_q	78
4	Combinaisons des chaos additifs et multiplicatifs	81
4.1	Sommes de masses de Dirac pondérées par des mesures multifractales	82
4.1.1	Analyse multifractale de ν_1	82
4.1.2	Analyse multifractale de ν_ρ pour $\rho \in (0,1)$	84
4.2	Séries d'ondelettes pondérées par des mesures multifractales	86
4.2.1	Application 1: Le modèle de turbulence de [ArnBaMu] comme perturbation de $F_{QC.\ell}$	87
4.2.2	Application 2: Combinaison de F_μ avec les sommes de masses de Dirac: F_ν	89
5	Analyse multifractale d'un processus additif inspiré par le trafic sur Internet	91

Introduction

Cette section présente le contexte dans lequel j'ai débuté mes travaux de recherche, ainsi que les moments importants de mon parcours de chercheur jusqu'à présent. Puis je consacre une section à l'illustration des notions de chaos multiplicatif, additif, et de leur combinaison, qu'il me semble important d'avoir à l'esprit pour comprendre les structures multifractales auxquelles je me suis intéressé, et qui m'occupent encore. Enfin, je détaille l'organisation de la suite du mémoire.

0.1 Description succincte de mes travaux et de leur origine

- **Apparition de l'analyse multifractale.**

L'analyse multifractale des mesures et des fonctions est un domaine d'étude relativement récent. Elle a commencé à se développer au milieu des années 80, à la suite de travaux dans lesquels B. Mandelbrot introduit ses modèles aléatoires de dissipation d'énergie en turbulence [M1, M4, M5]. B. Mandelbrot y discute en détail la nature fractale des ensembles sur lesquels se concentre l'énergie et observe que dans une cascade multiplicative, l'énergie se répartit en suivant un principe de grandes déviations. Cette propriété sera par la suite formulée explicitement en terme de multifractalité.

L'analyse multifractale s'intéresse à la description fine des ensembles fractals associés de façon naturelle à certains phénomènes physiques. Le terme multifractal, lui, est apparu dans [FrPa], toujours dans le cadre de la turbulence. Il est lié au phénomène de grandes déviations évoqué plus haut: lorsque la turbulence est pleinement développée dans un fluide, la vitesse v (resp. la dissipation d'énergie μ) considérée comme fonction scalaire (resp. comme mesure) est très irrégulière (resp. irrégulièrement répartie), en ce sens que son exposant ponctuel de Hölder $h_v(x)$ (resp. $h_\mu(x)$) varie beaucoup d'un point x à ses voisins. Plaçons nous d'emblée dans un cadre mathématique où l'on peut travailler à des échelles arbitrairement petites. Les exposants ponctuels de Hölder de v et de μ au point x peuvent être respectivement définis comme

$$\begin{aligned} h_v(x) &= \sup\{h : |v(y) - v(x)| = O(|y - x|^h), y \rightarrow x\}, \text{ et} \\ h_\mu(x) &= \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log(r)}. \end{aligned}$$

La vitesse v et la dissipation d'énergie μ sont bien sûr étroitement liées, mais nous n'explicitons pas ici ces liens.

Considérons la mesure μ . L'exposant $h_\mu(x)$ donne une information locale sur μ . Supposons le support de μ de mesure de Lebesgue positive. En règle générale, il existe un exposant presque

sûr, ou encore typique, H_{typ} au sens de la mesure de Lebesgue, c'est à dire qu'en presque tout point de la zone turbulente $h_\mu(x) = H_{typ}$. Mais la grande variabilité de l'exposant de Hölder (intimement liée au phénomène de grandes déviations dans le modèle de B. Mandelbrot) impose l'existence d'ensembles $E_\mu(H)$ plus "petits", constitués des points où l'énergie μ possède un exposant $h_\mu(x)$ égal à une valeur donnée $H \neq H_{typ}$. Ces ensembles de niveau ont une structure fractale. Leur multitude explique le terme *multifractal*.

Lorsque l'ensemble $E_\mu(H_{typ})$ est de mesure de Lebesgue positive, nous sommes informés de façon précise sur sa taille, et donc sur sa dimension qui vaut 3 quelle que soit la notion de dimension choisie. De la même manière on souhaite mesurer la taille des ensembles $E_\mu(H)$. Rappelons pourquoi la dimension de Hausdorff est un outil particulièrement adapté pour cela. Cette notion de dimension pour un ensemble borélien borné E est liée à la recherche, naturelle pour mesurer la taille de E , d'une mesure de probabilité ν qui soit uniformément répartie sur E , au sens faible suivant: il existe un exposant $d \geq 0$ tel que pour tout x de E , si r est assez petit on a $\nu(B(x,r)) \approx r^d$, ou dit plus correctement $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \nu(B(x,r))}{\log(r)} = d$ pour tout $x \in E$; l'exposant d définit alors la dimension de l'ensemble E . Les choses sont plus compliquées que cela en général, bien que dans certains des exemples que nous rencontrerons, des ensembles de niveau non-triviaux, et de mesure de Lebesgue nulle, portent de telles mesures. En fait, ce sont les mesures de Hausdorff qui jouent en quelque sorte ce rôle de mesures uniformes, et ainsi elles permettent de dégager une bonne notion de dimension associée à la taille, ou à la mesure d'un ensemble (voir [Mat] pour une définition). Finalement, pour l'ensemble E , avoir d pour dimension de Hausdorff équivaut à ce que pour tout $d' < d$, E porte une mesure de probabilité ν ayant presque partout par rapport à elle-même un exposant $h_\nu(x) \geq d'$, et simultanément à ne porter aucune mesure de probabilité ν possédant presque partout par rapport à elle-même un exposant $> d$ ([Fro]). La dimension de Hausdorff de E sera notée $\dim E$.

Les ensembles de niveaux de la fonction h_ν sont eux aussi fractals et multiples, et U. Frisch et G. Parisi développaient dans [FrPa] un argument heuristique montrant que la dimension de Hausdorff des ensembles de niveau $E_\nu(H)$ pouvait s'obtenir comme la transformée de Legendre d'une certaine fonction de type énergie libre. Ce principe est aujourd'hui appelé *formalisme multifractal*, ou conjecture de Frisch Parisi. Reformulé pour la mesure μ , ce principe dit qu'après avoir défini la fonction

$$\tau_\mu(q) = \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log(r)} \log \int \mu(B(t,r))^{q-1} \mu(dt) \quad (q \in \mathbb{R})$$

on doit avoir

$$\dim E_\mu(H) = \tau_\mu^*(H) := \inf_{q \in \mathbb{R}} Hq - \tau_\mu(q)$$

lorsque E_H n'est pas vide. En particulier, la fonction $H \mapsto \dim E_\mu(H)$ doit être concave. En fait, l'inégalité $\dim E_\mu(H) \leq \tau_\mu^*(H)$ est vraie sous des hypothèses assez faibles sur μ . L'inégalité inverse $\dim E_\mu(H) \geq \tau_\mu^*(H)$ s'obtient si l'on construit sur $E_\mu(H)$ une mesure ν telle que $h_\nu(x) \geq \tau_\mu^*(H)$ ν -presque partout.

Les articles déjà cités [M1, M4, M5, FrPa], et d'autres comme [HaJeKaPrSh, ArnGrHol, MuBaArn] ont suscité de nombreux travaux dédiés à établir de façon rigoureuse certaines de

leurs affirmations à propos d'exemples bien identifiés, et d'autres consacrés à l'exploration de nouvelles structures multifractales [KP, ColLebPo, Rand, AvBan, BrMiP, HoWa, CawMau, O1, Fal1, LedPo, Mol, Jaf2, Jaf3, Jaf4, Fan6, Jaf5, Jaf6, Law1, Law2, DemPeRoZe1, DemPeRoZe2, Jaf8, DemPeRoZe3, KoMo, Fal2, FeOl] (cette liste n'est pas exhaustive). Une partie de ces travaux a permis de dégager diverses notions de formalismes multifractals, ainsi que des classes de mesures et de fonctions pour lesquelles il sont valides. Ils ont également montré la généricité de la propriété de multifractalité pour les fonctions, et aussi le fait que les formalismes ne sont pas valides en général. Néanmoins, dans le cadre des modèles de dissipation d'énergie en turbulence développée assumant une propriété d'auto-similarité, il n'y a pas d'exemple pour lequel les divers formalismes ne soient pas vérifiés.

• **Mes premiers travaux sur les cascades canoniques.** Ma thèse portait justement sur un modèle aléatoire de turbulence proposé par B. Mandelbrot au début des années 70. Il s'agissait en réalité d'une simplification d'un modèle de dissipation d'énergie μ obtenue comme limite d'une martingale à valeurs mesures dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est en tout point une martingale log-normale [M1]. Voici le modèle unidimensionnel simplifié, appelé *cascade canonique*: soient b un entier ≥ 2 , W une variable aléatoire positive d'espérance 1, et $(W_{t_1 \dots t_k})_{\substack{k \geq 1 \\ t_1, \dots, t_k \in \{0, \dots, b-1\}}}$ une suite de copies de W indépendantes. Pour $n \geq 1$ et $t = \sum_{k=1}^{\infty} t_k b^{-k} \in [0, 1]$ ($t_k \in \{0, \dots, b-1\}$) définissons la martingale

$$Q_n(t) = \prod_{k=1}^n W_{t_1 \dots t_k},$$

puis la mesure μ_n sur $[0, 1]$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est donnée par $Q_n(t)$:

$$\mu_n(dt) = Q_n(t) dt. \quad (1)$$

La suite μ_n converge presque sûrement faiblement vers une mesure μ . Les premières propriétés de cette mesure ont été conjecturées et partiellement obtenus par B. Mandelbrot [M4, M5], puis établies par J.-P. Kahane et J. Peyrière [K1, P1, KP]. Ils ont trouvé à quelle condition nécessaire et suffisante (CNS) sur W la mesure μ est non nulle avec une probabilité strictement positive (μ est non dégénérée). Soit

$$\varphi(q) = -1 + q - \log_b \mathbb{E}(W^q) \quad (q \in \mathbb{R}).$$

Cette condition s'écrit $\varphi'(1^-) > 0$. Dans ce cas, ils ont établi une CNS pour l'existence d'un moment d'ordre $h > 1$ fini pour $\|\mu\|$: $\varphi(h) > 0$ (ils ont aussi décrit le comportement asymptotique des moments d'ordres positifs quand ils sont tous finis). Enfin, toujours dans l'hypothèse de non-dégénérescence, ils ont calculé la dimension de Hausdorff minimale d'un ensemble portant toute la mesure. Il s'avère qu'il existe un ensemble E portant μ pour lequel μ est uniformément répartie au sens faible décrit plus haut, et avec l'exposant $\varphi'(1^-)$.

La dissipation d'énergie est donc concentrée sur un ensemble de dimension de Hausdorff $\varphi'(1^-)$.

Par ailleurs, B. Mandelbrot observait dans [M5] qu'en vertu d'un théorème de grandes déviations, à mesure que n tend vers l'infini, les valeurs de $\mu_n(I)$, lorsque I décrit les intervalles b -adiques de la $n^{\text{ième}}$ génération, devaient se répartir de sorte que pour $H \geq 0$ tel

que $\varphi^*(H) = \inf_{q \in \mathbb{R}} Hq - \varphi(q) \geq 0$, $\#\{I : \mu_n(I) \approx b^{-nH}\} \approx 2^{n\varphi^*(H)}$. Ceci est une forme de réalisation spatiale du théorème de grandes déviations appliqué à une suite la forme $\sum_{k=1}^n \log W_k$ où les W_k sont des copies de W indépendantes. Cette propriété préfigure la notion de spectre des grandes déviations pour la mesure μ (notion dégagée dans le formalisme de [HaJeKaPrSh]), et aussi la nature multifractale de la mesure μ , qui est pressentie dans [FrPa] comme devant être un modèle assez général de mesure multifractale.

Quelques années plus tard, J.-P. Kahane est revenu sur le modèle initial dont les cascades canoniques représentaient une simplification accessible en 1974, lorsque rien n'était connu du sujet des martingales multiplicatives. Il a rendu rigoureux ce modèle en développant le “chaos multiplicatif gaussien” [K2], complété ensuite par une théorie des $\mathbf{T}$ -martingales [K4], dans laquelle on étudie les mesures limites de martingales de la forme $\mu_n(dt) = Q_n(t) \cdot \sigma(dt)$, où t vit dans un espace métrique localement compact $\mathbf{T}$, σ est une mesure localement finie, et $Q_n(t)$ est une martingale d'espérance 1 pour chaque $t \in \mathbf{T}$ ($((Q_n(t))_{t \in \mathbf{T}})_{n \geq 1}$ est la $\mathbf{T}$ -martingale). J.-P. Kahane et son élève A.-H. Fan ont abordé les questions relatives à la non dégénérescence, aux moments, et à la dimension de ces mesures limites de façon générale, et mis en évidence de nouveaux exemples intéressants [K4, Fan1, Fan2].

Les études rigoureuses de la nature multifractale des cascades canoniques et de leurs extensions ont commencé vers 1990 [HoWa]. A ma connaissance, il s'agit des premiers modèles aléatoires de mesures multifractales que les gens aient regardés.

J. Peyrière trouvait que les résultats de [HoWa] n'étaient pas complètement satisfaisants, d'une part car ils assumaient trop de restrictions sur la loi de W , et d'autre part, parce qu'ils se heurtaient à la difficulté suivante liée à la nature aléatoire de la construction: dans [HoWa] comme dans d'autres travaux sur les cascades canoniques et certaines de leurs variantes [K6, Fal1, Mol, ArPa], sous certaines hypothèses, on sait établir que “pour chaque $H \geq 0$ tel que $\varphi^*(H) > 0$, on a presque sûrement $\dim E_\mu(H) = \varphi^*(H)$ ”, ce qui donne la dimension de chaque ensemble de niveau, presque sûrement. Or, ce n'est pas le résultat attendu. Le résultat souhaité est, pour presque toute les réalisations de $\mu \neq 0$, une description simultanée de tous les ensembles de niveaux aléatoires $E_\mu(H)$, tandis que l'énoncé précédent ne fournit qu'une réponse faible, presque sûrement pour chaque point d'un ensemble dénombrable dense de valeurs de H .

J. Peyrière a accepté que je sois son élève, et il m'a lancé sur cette problématique. Dans ma thèse, j'ai obtenu un résultat d'analyse multifractale analogue à ceux des travaux précédemment cités, mais les hypothèses étaient plus faibles. En particulier, la loi de W était autorisée à avoir un atome en 0, ce qui donnait accès aux cas où le support de la mesure n'est plus de mesure de Lebesgue pleine, mais un ensemble de Cantor ayant la structure d'un arbre aléatoire. De plus, le rôle des moments d'ordre négatifs de $\|\mu\|$ était bien mis en évidence. J'ai également avancé vers la démonstration de l'énoncé fort “presque sûrement, pour tout $H \geq 0$ tel que $\varphi^*(H) > 0$, $\dim E_\mu(H) = \varphi^*(H)$ ”, en étudiant la continuité (en un sens qui sera précisé) du processus multiplicatif qui aux variables aléatoires $(W_{t_1 \dots t_k})_{\substack{k \geq 1 \\ t_1, \dots, t_k \in \{0, \dots, b-1\}}}$ associe la mesure limite μ . C'était en 1997. Ces résultats, et d'autres font l'objet de l'article [4]. Je réalise maintenant que les résultats de continuité établis dans [4] combinés au théorème de Fubini m'auraient permis de conclure à l'énoncé intermédiaire “presque sûrement, pour presque tout H au sens de la mesure

de Lebesgue, si $\varphi^*(H) > 0$, alors $\dim E_\mu(H) = \varphi^*(H)$. J'y reviendrai dans la Section 2.2.3.

• **Un énoncé fort pour l'analyse multifractale des cascades canoniques. Première collaboration avec B. Mandelbrot.** De retour de mon service national (où j'avais eu tout le loisir de laisser reposer ce problème), un an plus tard j'ai compris comment obtenir le résultat fort que nous attendions. Il est écrit dans [5]. Peu après, début 1999, J. Peyrière a eu la bienveillance de me mettre en relation avec B. Mandelbrot qui avait construit un nouveau modèle de cascade multiplicative qui s'appuyait sur la structure d'un processus ponctuel de Poisson plan statistiquement auto-similaire plutôt que sur celle d'un arbre homogène. Il s'agit des "produits de pulses multifractals", qu'il n'est pas plus mal d'appeler cascades de Poisson composées, comme l'on fait ensuite d'autres auteurs. Les mêmes questions que pour les cascades canoniques se posaient, mais la structure, bien qu'ayant une parenté avec les cascades canoniques, était à la fois nouvelle, plus riche et plus compliquée. Dans [16] j'ai apporté des réponses presque complètes aux questions de non dégénérescence, de finitude des moments et d'analyse multifractale. Ces réponses montraient que les cascades canoniques et les cascades de Poisson composées ont beaucoup de propriétés en commun.

• **Unification de plusieurs modèles de $\mathbf{T}$ -martingales.** B. Mandelbrot et moi avons aussi en tête d'autres exemples de cascades multiplicatives auto-similaires, et ces constructions se sont enrichies de la généralisation des cascades de Poisson composées proposée par E. Bacry et J.-F. Muzy [BaMu], les cascades log-infiniment divisibles. Comme ces structures avaient beaucoup de points communs, en dehors du fait d'être toutes des illustrations de la construction générale des $\mathbf{T}$ -martingales, il est devenu raisonnable de trouver un cadre abstrait dans lequel on puisse résoudre si possible une fois pour toutes les problèmes déjà évoqués (notamment celui de l'analyse multifractale). Des résultats généraux s'appliqueraient alors à chaque cas particulier. C'est ce qui est fait dans [17, 18] où l'on exhibe une sous-classe de $\mathbf{T}$ -martingales pour laquelle on peut obtenir des résultats fins, et qui est illustrée notamment par les cascades canoniques, les cascades de Poisson composées, et les cascades log-infiniment divisibles. C'est une façon de compléter la théorie de J.-P. Kahane. Ce travail, réalisé en 2003, a été l'occasion d'établir que les limites de ces $\mathbf{T}$ -martingales satisfont tous les formalismes multifractals raisonnables pour les mesures. C'est une application de [10], qui étudie les relations entre ces formalismes (voir le Chapitre 1).

• **Résultats en l'absence d'autosimilarité et résolution d'un problème lié au recouvrement de Dvoretzky pour le cercle.** Entre temps, je me suis naturellement intéressé à ce que l'on pouvait dire dans le cas de cascades non auto-similaires, en particulier dans [7] pour les cascades canoniques et dans [8] pour les cascades de Poisson composées. Dans le premier cas, cela consiste à faire dépendre la loi de $W_{t_1 \dots t_k}$ du mot $t_1 \dots t_k$. Dans le second, cela consiste à choisir un processus de Poisson dont l'intensité n'est pas auto-similaire. On peut étendre certains résultats du cas auto-similaire, mais on est techniquement restreint pour faire l'analyse multifractale de la mesure limite. Ces travaux seront décrits au Chapitre 2.2. Le fait très important à mes yeux est qu'il s'est trouvé un problème à la solution duquel ils ont grandement contribué, et par lequel ils ont été éclairés. J'ai rencontré A.-H. Fan en mai 2001 au congrès "Ondelettes et Fractales" de Monastir quand il venait de répondre partiellement à une question naturelle liée au recouvrement de Dvoretzky pour le cercle $\mathbb{T}$: on se donne une suite $\ell_n \in (0,1)$ décroissant vers 0,

une suite $(\omega_n)_{n \geq 1}$ de point jetés indépendamment et uniformément sur $\mathbb{T}$, et on considère sur le cercle la suite des arcs $I_n = (\omega_n, \omega_n + \ell_n)$. “Peut-on presque sûrement décrire pour chaque point $t \in \mathbb{T}$ le comportement asymptotique quand $n \rightarrow \infty$ du nombre $N_n(t)$ d’arcs I_k ayant recouvert t parmi les n premiers?” Cette question se reformule dans le contexte multifractal en demandant pour tout $\beta \geq 0$ quelle est la dimension de Hausdorff de l’ensemble des points pour lesquels $N_n(t)$ a le même comportement asymptotique de la forme $\beta \sum_{k=1}^n \ell_k$. A partir de là, A.-H. Fan avait répondu de façon partielle à cette question dans le cas particulier $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$ ($\alpha > 0$) [Fan7]. Pour cela il avait utilisé des $\mathbb{T}$ -martingales naturellement associées au problème, et comparables à certaines cascades de Poisson composées très particulières (considérées indépendamment de [16, 8]). L’étude réalisée dans [8] a beaucoup contribué à la résolution presque complète de la question [12]. On montre qu’il y a trois comportements typiques: si $\ell_n = o(\frac{1}{n})$, les ensembles de niveau du comportement asymptotique de N_n sont tous de dimension 1; si $\ell_n \approx \frac{1}{n}$, les dimensions de ces ensembles sont distribuées selon une fonction strictement concave (une hiérarchie s’instaure entre ces ensembles); si $\frac{1}{n} = o(\ell_n)$, il n’y a plus de multifractalité, car $N_n(t) \sim \sum_{k=1}^n \ell_k$ pour tout t . Ces travaux ont enrichi notre compréhension de la façon dont s’organise la multifractalité engendrée par des produits infinis de fonctions. L’enseignement que l’on peut en tirer, est que dans le cas de construction non strictement auto-similaires, l’étude du comportement asymptotique d’une $\mathbf{T}$ -martingale $Q_n(t)$ quand n tend vers l’infini peut renseigner davantage sur la structure du processus que celle de $\mu(B(t, r))$ (voir aussi [13]), tandis que dans le cas auto-similaire les deux comportements sont équivalents. En particulier, le comportement local de la martingale $Q_n(t)$ est intéressant même lorsque la mesure limite est dégénérée.

• **Une conjecture erronée qui enrichit la théorie des $\mathbf{T}$ -martingales.** A l’été 2000, B. Mandelbrot m’a montré une ébauche d’article qu’il écrivait avec M.-O. Coppens concernant des martingales engendrées par des produits d’harmoniques d’une fonction 1-périodique donnée, dans laquelle était introduite une phase uniforme: on se donne cette fois une fonction mesurable positive $\widetilde{W}$ 1-périodique telle que $\int_{[0,1]} \widetilde{W}(t) dt = 1$, une suite $(\theta_k)_{k \geq 0}$ de phases aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, on considère la $[0,1]$ -martingale

$$Q_n(t) = \prod_{k=0}^{n-1} \widetilde{W}(b^k(t + \theta_k)),$$

puis μ , la limite faible presque sûre de la suite μ_n définie par (1). C’est une façon naturelle de généraliser certains produits de Riesz, mais B. Mandelbrot et M.-O. Coppens l’ignoraient. Soit maintenant la fonction

$$\widetilde{\varphi}(q) = -1 + q - \log_b \int_{[0,1]} \widetilde{W}^q(t) dt.$$

Sa forme est analogue à celle de la fonction φ associée plus haut à la cascade canonique. B. Mandelbrot m’a demandé de démontrer que tout se passe comme dans le cas des cascades canoniques, la structure de μ étant régie par les valeurs de la fonction $\widetilde{\varphi}$. J’ai essayé en vain. En fait, les choses se passent de façon très différente. J’ai montré dans [11] que la condition nécessaire et suffisante de non dégénérescence de la martingale dépend dans ce cas de propriétés très restrictives satisfaites par les coefficients de Fourier de la fonction $\widetilde{W}$ (ceci reflète la parenté de la construction avec celle des produits de Riesz). Il s’avère donc que la dégénérescence de

la martingale est générique: elle a lieu sur un ensemble ouvert dans l'ensemble des fonctions $\widetilde{W}$ mesurables positives et de moyenne 1 sur $[0,1]$. La non dégénérescence est une propriété instable par petite perturbation. Ceci ne se produit pas pour les cascades canoniques: une petite perturbation de la loi du poids W n'affecte pas le fait que $\varphi'(1^-) > 0$.

Ce constat de l'existence de **T**-martingales dont on puisse caractériser la non dégénérescence par des propriétés complètement distinctes de celles unifiées dans [17, 18] incite à approfondir l'étude des **T**-martingales.

En cas de non dégénérescence, les mesures μ_n sont contraintes d'être presque sûrement des mesures de probabilité, et donc μ aussi. On a donc bien sûr $\mu_n = \frac{\mu_n}{\|\mu_n\|}$. Le point important est que si $\widetilde{W}$ est strictement positive et suffisamment régulière, on a de façon générale que $\frac{\mu_n}{\|\mu_n\|}$ converge presque sûrement faiblement vers une mesure de probabilité. C'est en fait qu'en cas de non dégénérescence, le bon cadre pour comprendre μ_n et μ est le formalisme thermodynamique pour les transformations aléatoires. Nous y reviendrons dans la Section 2.4. Dans ce contexte, des résultats sur la structure multifractale de μ étaient déjà connus [Ki2, Fan6]. Dans [11], on montre que ces résultats s'étendent à une classe de fonctions $\widetilde{W}$ possédant une suite dense de points de sauts.

• **Etude d'un modèle inspiré du trafic sur Internet.** Les travaux décrits plus haut concernent des problèmes dépendant fortement d'une structure multiplicative héritée de modèles conçus initialement pour décrire le phénomène de cascade auto-similaire observé en turbulence.

A mon arrivée à l'INRIA en septembre 2001, j'ai eu l'opportunité de m'intéresser au problème ouvert qui consiste à trouver une explication théorique à l'origine du comportement multifractal observé numériquement pour le trafic sur Internet. En collaboration avec J. Lévy Véhel dans [15], j'ai étudié un modèle qui fait en sorte de reproduire assez fidèlement une superposition de signaux élémentaires émis par des sources utilisant le réseau avec une plus ou moins grande intensité, et selon l'une des règles caractéristiques du mécanisme de TCP ("Traffic Control Protocol"), tout en générant un processus stochastique X mathématiquement abordable.

D'une part, ce modèle confirme l'idée que la structure de base du trafic, c'est à dire la superposition de sources régies par TCP, suffit à expliquer la présence de multifractalité, sans faire appel à un argument heuristique selon lequel ce comportement multifractal proviendrait de la structure arborescente du réseau et d'un phénomène de cascade. La forme du spectre du processus X est assez voisine de ce que l'on peut trouver en analysant certaines traces de trafic.

D'autre part, le processus X entretient des liens étroits avec certains processus de Lévy, dont la nature multifractale est comprise dans [Jaf6]. Les deux types de processus engendrent de la multifractalité comme somme infinie de processus stochastiques élémentaires. En ce sens, on peut dire qu'ils sont des formes de chaos additif. L'étude du processus X donne une idée des difficultés techniques que l'on peut rencontrer dans l'étude des processus multifractals à sauts s'écartant du cadre "idéal" (mais tout à fait non trivial) des processus à accroissements stationnaires et indépendants. Nous verrons en particulier à la Section 5 que l'étude de X plaide pour la recherche de théorèmes de recouvrements aléatoires élargissant le cadre du théorème de Shepp.

• **Un lien entre mesures multifractales et séries d'ondelettes multifractales.**

Continuons avec les comportements multifractals engendrés par des sommes. Après que U. Frisch et G. Parisi ont avancé l'idée que les singularités s'organisent en sous-ensembles de niveau fractals dans un fluide turbulent, il est apparu [ArnGrHol, MuBaArn] que les ondelettes seraient un bon outil pour l'étude et la synthèse de signaux multifractals possédant un peu de régularité, et aussi pour l'étude du formalisme multifractal pour les fonctions. Une partie des travaux de S. Jaffard est consacrée à l'étude de la validité de ce formalisme ainsi qu'à l'élaboration du bon point de vue pour comprendre ce problème [Jaf1, Jaf3, Jaf5, Jaf8, Jaf9, Jaf10]. A cette fin, ce dernier a utilisé les espaces de Besov et également introduit d'autres espaces fonctionnels dont les éléments peuvent être caractérisés par le comportement de leurs coefficients d'ondelettes.

Il s'avère que les exemples fondamentaux de séries d'ondelettes mis en exergue dans ces espaces ont des spectres croissants. Même si ce comportement est générique, si l'on revient à la turbulence il est souhaitable de trouver un moyen systématique de construire de telles séries satisfaisant un formalisme multifractal avec un spectre multifractal concave comportant une partie croissante et une partie décroissante. S. Seuret et moi avons commencé à réfléchir à cette question en mai 2002, et il nous est apparu que la structure additive d'une mesure permettait d'engendrer de façon très naturelle des coefficients de séries d'ondelettes dans les espaces de Besov. Nous avons ainsi construit des séries d'ondelettes pondérées par des mesures multifractales (voir Sections 0.2.3 et 4.2), de sorte qu'une telle série hérite des propriétés multifractales de la mesure μ à partir de laquelle elle est construite. C'est un moyen naturel de lier le domaine de l'analyse multifractale des mesures et celui des fonctions.

Ayant entendu A. Arnéodo évoquer un modèle de "cascades d'ondelettes" lors du congrès "Ondelettes et fractales" à Monastir un an plus tôt, nous avons pu voir ce modèle comme une petite perturbation de notre construction dans le cas où μ est une cascade canonique, et en exhiber la nature multifractale laissée en suspens dans [ArnBaMu].

La nature multifractale de ces séries d'ondelettes est stable par certaines perturbations. Ceci permet de synthétiser des processus gaussiens à spectre multifractal concave et intimement liés aux mesures auto-similaires en loi dont l'analyse multifractale est connue.

• Le substitut aux cascades canoniques dans le cas critique de dégénérescence, les sommes de masses de Dirac pondérées par une mesure, l'ubiquité conditionnée, et la vitesse de renouvellement des ensembles de niveaux.

L'analyse multifractale de la cascade canonique μ repose essentiellement sur le fait que presque sûrement, pour tout H de la forme $\varphi'(q)$ tel que $\varphi^*(H) > 0$, la cascade canonique $\mu_{q,n}$ engendrée par les poids $W_{q,t_1\dots t_k} := W_{t_1\dots t_k}^q / \mathbb{E}(W^q)$ converge vers une mesure μ_q non nulle dès que μ ne l'est pas; de plus, cette mesure est concentrée sur $E_\mu(H)$, et elle a la bonne dimension $\varphi^*(H)$. On montre assez facilement que $E_\mu(H) = \emptyset$ quand $\varphi^*(H) < 0$, mais qu'arrive-t-il lorsque $\varphi^*(H) = 0$? On sait que cet ensemble est de dimension au plus 0, mais est-il vide? Dans le cas où $H = \varphi'(q)$, la cascade canonique μ_q est dégénérée et ne peut donc pas charger $E_\mu(H)$ dans l'éventualité où cet ensemble n'est pas vide. On peut se demander s'il existe un moyen de modifier la martingale gouvernant la cascade canonique $\mu_{q,n}$ de manière à construire une mesure strictement positive $\tilde{\mu}_q$, de dimension 0, qui charge $E_\mu(H)$. La réponse est oui. Une telle construction est possible [5] grâce aux travaux portant sur l'existence de solutions non triviales à

une équation fonctionnelle satisfaite par la loi de $\|\mu\|$ (en particulier [Liu3]). C'est une propriété remarquable, qui permet de compléter le spectre multifractal de μ [5].

La mesure $\tilde{\mu}_q$ en question est de dimension nulle, mais je n'ai pas réussi à savoir si elle a des atomes ou non. En revanche, j'ai montré qu'elle est elle-même multifractale, et qu'elle se comporte de ce point de vue comme μ , si ce n'est que son spectre multifractal part du point (0,0).

L'existence d'une telle mesure m'a conduit naturellement à essayer de construire des sommes de masses de Dirac pouvant être reliées à une structure multiplicative. L'exemple le plus immédiat venant alors à l'esprit était les mesures ν du type

$$\nu = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \log^2 n} \sum_{t_1, \dots, t_n \in \{0, \dots, b-1\}} b^{-n} \prod_{k=1}^n W_{t_1 \dots t_k} \delta_{P_{t_1 \dots t_k}} \quad \left(\text{où } P_{t_1 \dots t_k} := \sum_{k=1}^n t_k b^{-k} \right). \quad (2)$$

J'ai laissé passer du temps avant de revenir à ces mesures, et je n'ai commencé à les étudier que début 2003 avec S. Seuret alors qu'il terminait sa thèse à l'INRIA. Nous avons commencé à étudier des sommes de masses de Dirac pondérées par des mesures multifractales engendrées par des processus multiplicatifs [20, 22] (voir Sections 0.2.3 et 4.1).

Les exemples de sommes de masses de Dirac bien comprises quand nous avons commencé correspondent aux masses de Dirac pondérées par la mesure de Lebesgue. Elles ont un spectre multifractal linéaire et croissant qui reflète strictement une propriété d'"ubiquité" des points où sont localisées les masses de Dirac (la notion d'ubiquité est explicitée à la Section 0.2.2).

Les mesures (certaines fonctions également [21]) que nous avons étudiées combinent l'ubiquité des points de discontinuité avec une pondération non plus homogène associée à la mesure de Lebesgue qui est monofractale, mais hétérogène associée typiquement à une cascade multiplicative. Ces deux aspects se retrouvent dans les spectres multifractals qui comportent une partie linéaire croissante partant de (0,0), puis une partie strictement concave comprenant une partie décroissante. Dans les cas les plus simples, la partie strictement concave correspond aux exposants pour lesquels la structure de cascade multiplicative domine le caractère discontinue de la somme. La partie linéaire, elle, reflète une combinaison de l'ubiquité des points de sauts avec le comportement de la cascade multiplicative en ces points (voir les figures de la Section 4.1). Cette combinaison est un phénomène nouveau que nous baptisons *ubiquité conditionnée*, et qui fait l'objet de résultats qui vont bien au delà des résultats classiques d'ubiquité [23].

La recherche de résultats d'ubiquité conditionnée nous a également conduits à dégager une notion nouvelle et importante, dite de *vitesse de renouvellement des ensembles de niveaux*, qui approfondit notre connaissance du comportement multifractal des mesures statistiquement auto-similaires [24].

Je dois dire pour finir, que ces travaux sur les sommes de masses de Dirac hétérogènes et l'ubiquité conditionnée ont des extensions non triviales et sans doute pertinentes à la modélisation des phénomènes par nature discontinus. Ces extensions sont à l'étude.

0.2 Exemples de comportements multifractals remarquables

0.2.1 Dans le cadre du chaos multiplicatif

Exemples naturels de sommes de fonctions dont le comportement asymptotique ponctuel est très variable et se classe grâce à des mesures produits infinis.

On notera $\sum_{k=1}^{\infty} t_k b^{-k}$ la représentation en base entière $b \geq 2$ d'un réel t de l'intervalle $[0,1]$, et T le shift $t \mapsto bt \mod 1$.

Considérons les exemples suivants A, B, C, et D de séries de fonctions.

Exemple A. (Occurrence d'une lettre dans la décomposition b -adique) Pour $0 \leq i \leq b-1$, on définit

$$A_n^{(i)}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{i\}}(t_k). \quad (3)$$

C'est un exemple très particulier de sommes de Birkhoff associées à T .

Exemple B. (Sommes de Birkhoff associées à T) On se donne $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-périodique, et $(\theta_k)_{k \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes dans $[0,1]$, on définit

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(b^k t) \quad \text{et} \quad \tilde{B}_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(b^k t + \theta_k). \quad (4)$$

Exemple C. (Marches aléatoires de branchement) On se donne une variable aléatoire X et $(X_{t_1 \dots t_k})_{\substack{k \geq 1 \\ t_1, \dots, t_k \in \{0, \dots, b-1\}}}$ une suite de copies de X indépendantes ainsi que $(\theta_{t_1 \dots t_k})_{\substack{k \geq 1 \\ t_1, \dots, t_k \in \{0, \dots, b-1\}}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes dans $[0,1]$ et φ une fonction comme dans l'Exemple B. Alors on définit

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n X_{t_1 \dots t_k} \quad \text{et} \quad \tilde{C}_n(t) = \sum_{k=1}^n \varphi(b^k t + \theta_{t_1 \dots t_k}). \quad (5)$$

Exemple D (Nombres de recouvrements dans les problèmes de Dvoretzky et du recouvrement poissonnien de la droite).

- Dans le problème de Dvoretzky [Dvo], on se donne $(\theta_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires uniformes et indépendantes dans $[0,1]$ ainsi que $(\ell_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissant vers 0. On étudie alors l'ensemble $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\theta_n, \theta_n + \ell_n)$. Nous nous intéressons ici plus particulièrement, dans le cas $\sum_{n \geq 1} \ell_n = \infty$, au nombres (aléatoires) de recouvrements $N_n^D(t)$ définis pour chaque $t \in (0,1)$ par le nombre d'intervalles $(\theta_k, \theta_k + \ell_k)$ ($1 \leq k \leq n$) recouvrant t :

$$N_n^D(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{(0, \ell_k)\}}(t - \theta_k). \quad (6)$$

- Dans le problème du recouvrement poissonnien de la droite introduit dans [M2], on se donne un processus de Poisson dans le demi-plan supérieur, S , d'intensité $\ell \otimes \nu$, où ℓ est la mesure de Lebesgue et ν est une mesure de Borel positive sur $(0,1]$, localement finie. On étudie alors,

lorsque $\nu((0,1]) = \infty$, le recouvrement de $\mathbb{R}$ par les intervalles $(s, s + \lambda)$, $(s, \lambda) \in S$. Ici, les nombres de recouvrements sont naturellement définis par

$$N_\varepsilon^P(t) = \sum_{\substack{(s, \lambda) \in S \\ \lambda \geq \varepsilon}} \mathbf{1}_{\{(s, s + \lambda)\}}(t) \quad (\varepsilon > 0). \quad (7)$$

La classification des comportements asymptotiques ponctuels possibles pour les sommes (3,4,5,6,7) conduit à la notion de multifractalité.

Afin de discuter de façon générique du comportement des sommes que nous venons de définir, fixons $S \in \{A^{(i)}, B, \tilde{B}, C, \tilde{C}, N^D, N^P\}$. Si la somme S_n ou S_ε est une fonction aléatoire, fixons une réalisation de ce processus. Nous nous intéressons au comportement asymptotique de $S_n(t)$ (resp. $S_\varepsilon(t)$) pour chaque t quand n tend vers l'infini (resp. ε tend vers 0). Dans les exemples A à C, on s'attend à ce que l'ordre de grandeur de $S_n(t)$ soit n , car la situation se prête à l'application de la loi des grands nombres, ou plus généralement du théorème ergodique. Une telle loi doit même donner un équivalent de $S_n(t)$. Plus précisément, on doit appliquer cette loi à une mesure de probabilité μ adaptée au problème considéré. On a alors un comportement asymptotique du type $S_n(t) = \beta_\mu n + o(n)$ pour μ -presque tout t , où β_μ est une constante. Il se trouve qu'excepté dans les situations triviales, on établit qu'il n'y a pas unicité du choix de μ , et que la constante β_μ décrit un intervalle non trivial de valeurs. Le comportement de S_n est donc hétérogène et appelle une classification par ensembles regroupant les points ayant le même comportement asymptotique. Ainsi, afin de décrire cette situation, on peut considérer dans les exemples A à C les ensembles de niveau

$$\underline{F}_\beta = \left\{ t : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(t)}{n} = \beta \right\}, \quad \overline{F}_\beta = \left\{ t : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(t)}{n} = \beta \right\}, \quad \text{et } F_\beta = \underline{F}_\beta \cap \overline{F}_\beta \quad (\beta \in \mathbb{R}).$$

Les théorèmes limites classiques appliqués à de bonnes mesures μ_β détectent les ensembles F_β en chaque point desquels on a le même équivalent βn de S_n .

Les ensembles ainsi mis en évidence sont denses dans $[0,1]$, et mis à part l'un d'entre eux, tous sont de mesure de Lebesgue nulle. La mesure μ_β est alors singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Il est naturel d'essayer de préciser quelle est la taille des ensembles $\underline{F}_\beta$, $\overline{F}_\beta$ et F_β , en estimant leur dimension de Hausdorff (ou celle de packing), que nous noterons $\dim$. C'est à la considération de ces ensembles et de leurs dimensions qu'est due la terminologie de *comportement multifractal* de S_n . L'estimation de ces dimensions passe par celle de la dimension des mesures μ_β (voir Section 2.2.3).

Les mesures μ_β , qui sont au coeur de l'explication du comportement multifractal de S_n , s'obtiennent dans tous les cas ci-dessus comme limite de processus multiplicatifs intimement liés à l'exponentielle de S_n . La terminologie "chaos multiplicatif" est associée à la construction d'objets singuliers comme les μ_β à l'aide d'un tel processus. Avant d'expliquer comment s'obtiennent ces produits infinis μ_β , nous revenons à l'exemple D.

Dans le cas du recouvrement de Dvoretzky, on s'attend à ce que $S_n(t)$ soit de l'ordre du nombre moyen d'intervalles parmi les n premiers ayant recouvert t , c'est à dire $\mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^n \ell_k$. On considère alors, quand $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n = \infty$, les ensembles de niveau définis pour $\beta \geq 0$ par

$$\underline{F}_\beta^D = \left\{ t : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(t)}{S_n} = \beta \right\}, \overline{F}_\beta^D = \left\{ t : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(t)}{S_n} = \beta \right\}, F_\beta^D = \underline{F}_\beta^D \cap \overline{F}_\beta^D.$$

Dans le cas du recouvrement poissonnien, le nombre moyen d'intervalles de longueur supérieure ou égale à ε recouvrant un point t est $\mathcal{S}_\varepsilon = \int_{[\varepsilon,1]} \lambda \nu(d\lambda)$. On considère donc, quand $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_\varepsilon = \infty$, pour $\beta \geq 0$ les ensembles

$$\underline{F}_\beta^P = \left\{ t : \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_\varepsilon(t)}{\mathcal{S}_\varepsilon} = \beta \right\}, \overline{F}_\beta^P = \left\{ t : \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_\varepsilon(t)}{\mathcal{S}_\varepsilon} = \beta \right\}, F_\beta^P = \underline{F}_\beta^P \cap \overline{F}_\beta^P.$$

Des produits infinis de fonctions pour minorer les dimensions des ensembles F_β

Nous avons besoin de savoir minorer la dimension de Hausdorff d'un ensemble portant un morceau d'une mesure donnée. Cela conduit à la notion de dimension de Hausdorff inférieure d'une mesure positive μ (voir Section 2.2.3), notée $\dim_*(\mu)$ et définie comme

$$\dim_*(\mu) = \inf \{ \dim(E) : E \in \mathcal{B}([0,1]), \mu(E) > 0 \}. \quad (8)$$

Nous reprenons les exemples de la section précédente et examinons les mesures μ_β donnant une minoration optimale des $\dim F_\beta$.

Exemple A. Dans ce cas, on considère plus volontiers les ensembles de Besicovich-Eggleston du type

$$F_{\beta_0, \dots, \beta_{b-1}} = \left\{ x : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^{(i)}}{n} = \beta_i, \forall i \in \{0, \dots, b-1\} \right\},$$

où $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{b-1})$ est un vecteur de probabilité. Il résulte de la Loi des Grands Nombres que la mesure multinômiale μ_β associée à $(\beta_0, \dots, \beta_{b-1})$ est portée par $F_{\beta_0, \dots, \beta_{b-1}}$, et ceci fournit la borne inférieure optimale pour $\dim F_{\beta_0, \dots, \beta_{b-1}}$, c'est à dire $-\sum_{k=0}^{b-1} \beta_k \log_b \beta_k$. De plus, la mesure μ_β résulte de la cascade multiplicative la plus élémentaire qui soit le long des branches d'un arbre homogène, cascade qui peut s'écrire comme limite de produits de fonctions au sens suivant: μ est la limite faible de la suite $\mu_{\beta,n}$ ainsi définie

$$\mu_{\beta,n}(dt) = \left(\prod_{k=1}^n \beta_{t_k} \right) dt.$$

On dit que μ est le produit infini des fonctions $f_k(t) = \beta_{t_k}$.

Exemple B. Considérons B_n . Pour tout $q \in \mathbb{R}$, le nombre

$$\Phi(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int_0^1 \exp(q B_n(t)) dt$$

existe (comme conséquence d'une propriété de sous-multiplicativité de l'intégrale dans le terme de droite). De plus, la fonction Φ est analytique (voir [Ru] ou [ParPol]).

Si $\beta \in \mathbb{R}$ est de la forme $\beta = \Phi'(q)$ pour $q \in \mathbb{R}$, on considère la mesure de probabilité μ_β , limite faible de la suite

$$\mu_{q,n}(dt) = \frac{\exp(qB_n(t))}{\int_0^1 \exp(qB_n(u)) du} dt = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} e^{q\varphi(b^k t)}}{\int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1} e^{q\varphi(b^k u)} du} dt.$$

Alors, d'après [FanLau, Fan6] $\mu_\beta(F_\beta) = 1$ et $\dim_*(\mu_\beta) = 1 - \frac{q\Phi'(q) - \Phi(q)}{\log(b)}$. Donc $\dim F_\beta \geq 1 - \frac{q\Phi'(q) - \Phi(q)}{\log(b)}$. L'inégalité opposée ne pose pas de problème. De plus, si $\beta \notin \overline{\Phi'(\mathbb{R})}$, on a $F_\beta = \emptyset$.

La suite $\tilde{B}_n$ est une version aléatoire de B_n . On doit dans ce cas considérer

$$\Phi(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int_0^1 \exp(q\tilde{B}_n(t)) dt$$

qui existe presque sûrement pour tout $q \in \mathbb{R}$. La fonction Φ n'est pas aléatoire et elle est analytique ([Ki2]). Les mesures μ_β à considérer s'obtiennent comme limites faibles presque sûres des suites de mesures de la forme

$$\mu_{q,n}(dt) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} e^{q\varphi(b^k t + \theta_k)}}{\int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1} e^{q\varphi(b^k u + \theta_k)} du} dt.$$

On obtient sans difficulté un résultat d'analyse multifractale analogue à celui obtenue pour B_n , mais cette fois on a presque sûrement, pour tout β de la forme $\beta = \Phi'(q)$, $\dim F_\beta = 1 - \frac{q\Phi'(q) - \Phi(q)}{\log(b)}$.

Exemple C. Difficulté liée à l'aléa dans ce cas. Considérons le cas de C_n . Les mesures μ_β à considérer sont des mesures μ obtenues comme limite faible d'une martingale à valeurs mesures μ_n de la forme

$$\mu_n(dt) = Q_n(t) dt, \text{ où } Q_n(t) = (\mathbb{E}(e^Y))^{-n} \left(\prod_{k=1}^n e^{Y_{t_1 \dots t_k}} \right),$$

la suite de variables aléatoires $Y_{t_1 \dots t_k}$ possédant les mêmes propriétés que $X_{t_1 \dots t_k}$, et $\mathbb{E}(e^Y) < \infty$. Cette mesure est appelée *cascade canonique* par B. Mandelbrot. L'existence presque sûre d'une limite faible pour μ_n est une conséquence du théorème de convergence des martingales positives dans $\mathbb{R}$ et du théorème de représentation de Riesz. La mesure μ n'est pas en général une mesure de probabilité, il n'est même pas certain qu'elle ne soit pas presque sûrement nulle. De fait, on a $\mathbb{P}(\mu \neq 0) > 0$ si et seulement si $\mathbb{E}(W \log W) < \log(b)$ [KP], où $W = (\mathbb{E}(e^Y))^{-1} e^Y$. De plus, si tel est le cas, on a $\mathbb{P}(\mu \neq 0) = 1$.

Pour $q \in \mathbb{R}$, soit $\Phi(q) = \log \mathbb{E}(W^q)$. Supposons Φ partout finie. Fixons $\beta \in \mathbb{R}$ de la forme $\beta = \Phi'(q)$ pour $q \in \mathbb{R}$. Soit alors μ_β la cascade canonique engendrée par les $Y_{t_1 \dots t_k} = qX_{t_1 \dots t_k}$. Si la mesure μ_β n'est pas dégénérée, on peut montrer que μ_β est presque sûrement concentrée sur F_β en appliquant la loi des grands nombres aux variables aléatoires $V_k : (\omega, t) \mapsto Y_{t_1 \dots t_k}(\omega)$ vues par la probabilité $\mathcal{Q}$ (introduite dans [P1]) définie sur $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}([0,1])$ par

$$\mathcal{Q}(A) = \mathbb{E} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_A(\omega, t) \mu(\omega)(dt) \right) \quad (A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}([0,1])).$$

En fait, μ_β n'est pas dégénérée si et seulement si $D_\beta = 1 - \frac{q\Phi'(q) - \Phi(q)}{\log(b)} > 0$. De plus, il résulte de [KP] que $\dim_*(\mu_\beta) \geq D_\beta$ presque sûrement. Là encore l'inégalité opposée est sans problème, et F_β est vide si $D_\beta < 0$.

On obtient finalement que pour chaque $\beta \in \Phi'(\mathbb{R})$ tel que μ_β n'est pas dégénérée, on a presque sûrement $\mathcal{P}(\beta) : \dim F_\beta = \dim \underline{F}_\beta = \dim \overline{F}_\beta = D_\beta$. L'écueil ici est qu'en utilisant la probabilité de Peyrière $\mathcal{Q}$ on n'obtient pas le résultat plus fort auquel on s'attend, à savoir que presque sûrement, pour chaque $\beta \in \Phi'(\mathbb{R})$ tel que μ_β n'est pas dégénérée, $\mathcal{P}(\beta)$ est vraie. On peut au mieux obtenir que presque sûrement $\mathcal{P}(\beta)$ est vraie pour chaque β d'un sous-ensemble dénombrable dense et déterministe de l'ensemble de ces valeurs de β .

Nous verrons dans le Chapitre 2 que ce problème de permutation de quantificateurs peut être résolu.

La suite $\tilde{C}_n$ a une nature très voisine de celle de C_n (elle appartient à la classe $\mathcal{M}'$ de la Section 2.1). Il faut considérer la fonction $\Phi(q) = \log \int_0^1 e^{q\varphi(t)} dt$, et les mesures μ_β obtenues comme limites faibles presque sûres des martingales

$$\mu_{q,n}(dt) = \mathbb{E} \left(\int_0^1 e^{q\varphi(u)} du \right)^{-n} \left(\prod_{k=1}^n e^{q\varphi(b^k t + \theta_{t_1 \dots t_k})} \right) dt.$$

Exemple D. Les sommes liées au recouvrement de Dvoretzky s'analysent à l'aide des mêmes mesures que celles requises dans le cas du recouvrement poissonnien. Dans ce dernier cas, comme dans l'exemple C, les mesures à considérer forment des martingales positives. Pour $\beta > 0$, une telle mesure μ s'obtient sur $\mathbb{R}_+$ comme limite vague, quand ε tend vers 0, de mesure $\mu_{\beta,\varepsilon}$ de la forme

$$\mu_{\beta,\varepsilon}(dt) = Q_{\beta,\varepsilon}(t) dt, \text{ où } Q_{\beta,\varepsilon}(t) = e^{-(\beta-1)S_\varepsilon} \beta^{N_\varepsilon^P(t)} dt.$$

Pour cette martingale, on a des résultats fins de convergence dans L^p pour la variable aléatoire $\mu_{\beta,\varepsilon}(I)$, quand I est un sous-intervalle borné de $\mathbb{R}_+$.

Ici aussi, l'introduction de la probabilité de Peyrière $\mathcal{Q}$ permet de montrer que μ_β est portée par F_β^P lorsque celle-ci n'est pas dégénérée. La minoration de $\dim_*(\mu_\beta)$ dépend de la géométrie du processus de Poisson, et le problème de permutation des quantificateurs rencontré dans l'exemple C se pose ici aussi.

La classification des comportements asymptotiques des S_n , $S \in \{A, B, \tilde{B}, C, \tilde{C}, N^D, N^P\}$, est intimement liée à l'analyse multifractale des mesures, en l'occurrence les μ_β .

Analyse multifractale d'une mesure

Soit μ une mesure de Borel positive dont nous supposons le support inclus dans $[0,1]$. On peut formuler le problème de son analyse multifractale de la façon suivante: pour chaque $t \in [0,1]$, les exposants ponctuels de Hölder inférieurs et supérieurs de μ au point t sont définis respectivement par

$$\underline{h}_\mu(t) = \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \mu(B(t,r))}{\log(r)} \quad \text{et} \quad \overline{h}_\mu(t) = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \mu(B(t,r))}{\log(r)}.$$

Alors, pour chaque $H \geq 0$, on définit les ensembles

$$\begin{aligned} \underline{E}_\mu(H) &= \{t \in \text{supp}(\mu) : \underline{h}_\mu(t) = H\}, \quad \overline{E}_\mu(H) = \{t \in \text{supp}(\mu) : \overline{h}_\mu(t) = H\}, \\ E_\mu(H) &= \underline{E}_\mu(H) \cap \overline{E}_\mu(H), \end{aligned}$$

et il s'agit de déterminer pour $G \in \{\underline{E}, \overline{E}, E\}$ la fonction $H \mapsto \dim G_\mu(H)$, c'est à dire le spectre de Hausdorff de μ associé au type d'exposant dont les $G_\mu(H)$ sont les lignes de niveau.

Dans les exemples B et C, si β est fixé de sorte que μ_β ne soit pas dégénérée, les comportements asymptotiques de $\frac{\log \mu_\beta(B(t,r))}{\log(r)}$ quand $r \rightarrow 0$ et $\frac{\log(S_n(t))}{n}$ quand $n \rightarrow \infty$ ($S \in \{B, \tilde{B}, C, \tilde{C}\}$) sont liés par le fait que $\mu_\beta(B(t, b^{-n})) \approx b^{-n} \exp q S_n(t)$ où $\beta = \Phi'(q)$.

Ainsi, on peut reformuler ce qui a été dit dans la Section 0.2.1 en terme d'analyse multifractale des mesures μ_β :

Considérons la mesure $\mu = \mu_\beta$ quand $\beta = \Phi'(1)$ dans les exemples B et C. Soit aussi $\tau(q) = -1 + q \left(1 + \frac{\Phi(1)}{\log b}\right) - \frac{\Phi(q)}{\log b}$. Le nombre $\dim G_\mu(H)$ est donné par $\tau^*(H) := \inf_{q \in \mathbb{R}} Hq - \tau(q)$ quand $\tau^*(H) > 0$ car pour q tel que $\mu_{\Phi'(q)}$ est non nulle, cette mesure est concentrée sur $E_\mu(H) \cap E_{\mu_{\Phi'(q)}}(\tau^*(H))$ pour $H = \tau'(q)$. Notons qu'au sens faible donné à cette notion dans la Section 0.1, la mesure $\mu_{\Phi'(q)} / \|\mu_{\Phi'(q)}\|$ est uniformément répartie sur une partie de $E_\mu(H)$.

Dans l'exemple C, on retrouve le problème de permutation de quantificateur rencontré dans la Section 0.2.1.

Cette équivalence entre l'étude de $S_n(t)$ et celle de $\mu_\beta(B(t, b^{-n}))$ cesse en l'absence d'auto-similarité. C'est ce que révèle l'étude des nombres de recouvrements de l'exemple D [12]. Dans ce cas, il est important de bien distinguer l'information contenue dans la densité $Q_\varepsilon(t)$ et celle contenue dans la mesure limite dans ce genre de constructions:

Une nuance importante entre $\log Q_\varepsilon(t)$ et $\log \mu_\beta(B(t, \varepsilon))$ dans l'exemple D en l'absence d'auto-similarité.

Dans l'exemple D, la mesure possède une structure d'auto-similarité en loi lorsque la mesure ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et que sa densité est un multiple de $\frac{1}{\lambda^2}$. Dans ce cas, $\mathcal{S}_\varepsilon$ est le même multiple de $\mathcal{S}_\varepsilon^{ref} = |\log \varepsilon|$, et si μ_β est non-dégénérée, $S_\varepsilon(t)$ et $\log \mu_\beta(B(t, \varepsilon))$ ont des comportements intimement liés, qui sont de l'ordre de grandeur de $\log \varepsilon$.

Supposons maintenant que l'on rompe l'auto-similarité dans le sens où $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_\varepsilon = +\infty$ mais $\mathcal{S}_\varepsilon = o(\mathcal{S}_\varepsilon^{ref})$ (le processus de Poisson est asymptotiquement moins intense que dans le cas auto-similaire).

Alors, la dimension de Hausdorff inférieure de μ_β est égale à 1, ce quel que soit le choix de β , c'est à dire que $\log \mu_\beta(B(t, \varepsilon)) \sim \log \varepsilon$ μ -presque partout. D'autre part, $S_\varepsilon(t) \sim \beta \mathcal{S}_\varepsilon$ μ -presque partout, et $\log Q_\varepsilon(t)$ a un comportement du même ordre. Par conséquent, l'information fournie par le comportement local de μ masque une information plus riche contenue dans le produit $Q_\varepsilon(t)$ en l'absence d'auto-similarité.

0.2.2 Dans le cadre du chaos additif

Nous allons décrire le comportement multifractal de fonctions et de mesures s'écrivant comme somme infinie de fonctions très régulières ou très simples, ou de masses de Dirac, et dont la construction ne fait appel à aucune structure multiplicative de type cascade comme nous en avons rencontré auparavant. Il ressort des exemples de ce type qui ont été regardés jusqu'ici que

leur nature multifractale s'explique par une propriété d'ubiquité, notion dégagée un peu plus loin (Section 0.2.2). Avant de décrire ces exemples, faisons quelques rappels.

Pour une fonction complexe f localement bornée définie sur un intervalle non trivial $I \subset \mathbb{R}$, l'exposant ponctuel de Hölder de f en $t \in I$, $h_f(t)$ est défini de la façon suivante [Jaf1]: $\mathbb{C}[x]$ désignant l'espace des fonctions polynomiales

$$h_f(t) = \sup \left\{ h : \exists P \in \mathbb{C}[x], |f(u) - P(u)| = O(|u - t|^h) \text{ (} u \rightarrow t \text{)} \right\}.$$

C'est la contrepartie de l'exposant $\underline{h}_\mu(t)$ définie pour une mesure dans la Section 0.2.1.

On définit ensuite les ensembles de niveaux

$$E_f(H) = \{t : h_f(t) = H\}$$

et le spectre de Hausdorff de f comme la fonction $H \mapsto \dim E_f(H)$.

Par chaos additif, nous entendons ici un comportement multifractal engendré par l'addition d'une infinité dénombrable de fonctions ou de mesures (qui peuvent avoir, elles, un comportement très simple) et qui ne se ramène pas à l'étude de produits infinis comme les exemples de la Section 0.2.1. En particulier, la détermination des ensembles de niveaux ne relève plus d'un argument d'ergodicité permettant de concentrer sur ces ensembles une "bonne" mesure engendrée par un produit infini de fonctions. Comme nous l'avons dit, elle dépend plutôt d'une propriété d'ubiquité.

L'étude de sommes de fonctions multifractales a débuté vers la fin des années 80 lorsqu'il a été compris que la décomposition en série d'ondelettes des signaux était un outil pertinent pour l'étude de leur multifractalité, notamment lorsque ceux-ci proviennent de la turbulence développée. Ce point de vue a conduit S. Jaffard à élaborer [Jaf3, Jaf5, Jaf8, Jaf9, Jaf10] un cadre mathématique formalisant ces idées. S. Jaffard a aussi étudié la nature multifractale d'exemples classiques de séries de fonctions. Certaines d'entre elles, suffisamment régulières (f est uniformément höldérienne sur chaque intervalle compact), se prêtent bien au cadre des ondelettes qui en détectent les exposants de Hölder en chaque point, comme dans le cas de la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ [Jaf2]. Pour d'autres, qui ont trop de points de régularité nulle ($h_f(t) = 0$), comme les fonctions ayant un ensemble dense de discontinuités (les processus de Lévy en font partie), les ondelettes ne sont d'aucune aide. Là encore, S. Jaffard a utilisé une approche fort utile pour étudier la nature multifractale de ces fonctions [Jaf4, Jaf6].

L'étude de séries de fonctions à sauts est étroitement liée à celle des sommes de masses de Dirac dont le support est un intervalle. Des exemples de ces dernières ont été étudiés en particulier dans [AvBan, Jaf4, Jaf6, Fal2].

Donnons quelques exemples. D'abord, fixons une ondelette ψ dans la classe de Schwartz comme il en est construit dans [LemMe], de sorte que les fonctions $2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}^2$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ et que tous les moments de ψ soient nuls.

Exemples étroitement liés à une propriété d'ubiquité

Exemple E. (Fonctions de saturation dans certains espaces de Besov) Soient $p, q, s \in (0, \infty)$ tels que $s - 1/p > 0$. Soit alors la fonction

$$f(t) = \sum_{j \geq 1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{\frac{1}{p}J_k \psi} (2^j t - k),$$

où $a = \frac{2}{p} + \frac{2}{q} + 1$ et J_k est l'unique entier J de $[1, j]$ tel que $k2^{-j}$ s'écrive sous forme irréductible $K2^{-J}$ avec K impair.

Cette fonction s -Höldérienne de l'espace de Besov $B_q^{s,p}(\mathbb{R})$ est introduite dans [Jaf8], où sa nature multifractale est également démontrée. Restreignons la à $(0,1)$. Pour tout $t \in (0,1)$ [Jaf8] établit que

$$h_f(t) = s - \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha^D(t)p},$$

où $\alpha^D(t)$ est le taux d'approximation de t par les nombres dyadiques, c'est à dire

$$\alpha^D(t) = \sup \left\{ \alpha : t \in \limsup_{j \rightarrow \infty} \bigcup_{k=0}^{2^j-1} [k2^{-j} - 2^{-j\alpha}, k2^{-j} + 2^{-j\alpha}] \right\}.$$

La détermination de la dimension des ensembles de niveaux de f se réduit donc à celle des ensembles de niveaux de la fonction α^D . Il s'ensuit que $\dim E_f(H) = p(H-s) + 1$ si $H \in [s - \frac{1}{p}, s]$, et $E_f(H) = \emptyset$ sinon (en particulier α^D prend ses valeurs dans $[1, \infty]$). Comme dans le cadre du chaos multiplicatif, dans le calcul des dimensions de ces ensembles, c'est la minoration qui pose problème. Elle s'obtient à l'aide du résultat d'ubiquité ci-dessous (Théorème 0.2.1).

Ensuite [Jaf8] montre qu'au sens de Baire quasi-toute fonction de $B_q^{s,p}(\mathbb{R})$ possède le même spectre que f car ses coefficients d'ondelettes aux hautes fréquences sont très proches de ceux de f .

Exemple F. (Processus de Lévy) Soit X un processus de Lévy sans partie Brownienne, dont la mesure de Lévy (sur $\mathbb{R}^d$) est notée Π (voir par exemple [Ber] pour une construction).

L'exposant de Blumenthal et Gettoor de Π noté ici β est défini par

$$\beta = \inf \left\{ \gamma : \int_{|u| \leq 1} |u|^\gamma \Pi(du) \right\}.$$

La formule de Lévy-Khintchine impose que $\beta \in [0, 2]$.

L'approximation des points de $\mathbb{R}_+$ par les points de saut du processus joue ici un rôle central. L'ensemble D des points de sauts de X se représente comme $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} D_j$, où chaque D_j est l'ensemble des points de sauts d'un processus de Poisson d'intensité $C_j = \Pi(\{x : |x| \in (2^{-(j+1)}, 2^{-j}]\})$, ces processus étant mutuellement indépendants.

Le taux d'approximation $\alpha^P(t)$ d'un point t de $\mathbb{R}_+$ par les points de $\bigcup_{j \geq 1} D_j$ est défini par

$$\alpha^P(t) = \sup \left\{ \alpha : t \in \limsup_{j \rightarrow \infty} \bigcup_{t_j \in D_j} [t_j - 2^{-j\alpha}, t_j + 2^{-j\alpha}] \right\}.$$

Le théorème de Shepp [S1] permet de montrer que α^P prend ses valeurs dans $[\beta, \infty]$.

Dans [Jaf6], il est établi que si $\beta > 0$, sous la condition

$$(C) \sum_{j \geq 1} 2^{-j} \sqrt{C_j \log(1 + C_j)} < \infty$$

(toujours vérifiée quand $\beta < 2$), avec probabilité 1 on a

$$E_X(H) = \begin{cases} \{t : \alpha^P(t) = \infty\} \cup D & \text{si } H = 0, \\ \{t : \alpha^P(t) = H^{-1}\} \setminus D & \text{si } H \in (0, \beta^{-1}], \\ \emptyset & \text{si } H > \beta^{-1}. \end{cases}$$

Puis, le calcul des dimensions de Hausdorff de ces ensembles repose encore essentiellement sur le Théorème 0.2.1. Avec probabilité 1, on a $\dim E_X(H) = \beta H$ si $H \in [0, \beta^{-1}]$ et $E_X(H) = \emptyset$ sinon.

Exemple G. (Sommes de masses de Dirac homogènes)

De telles sommes ont été considérées dans [AvBan] et dans [Fal2]; la dérivée au sens des distributions d'un subordonateur de Lévy sans drift est de la même nature. Dans [AvBan], on répartit la masse $2^{-j\gamma}$ ($\gamma > 1$) sur chaque point dyadique de $[0,1]$ de la $j^{\text{ième}}$ génération pour obtenir la mesure

$$\mu_D = \sum_{j \geq 1} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-j\gamma} \delta_{k2^{-j}}.$$

Dans [Fal2], on répartit la masse $\frac{1}{q^2 \log^2 q}$ sur les rationnels irréductibles de la forme p/q . Détaillons la structure multifractale de la mesure ainsi obtenue

$$\mu_R = \sum_{q \geq 2} \sum_{\substack{1 \leq p \leq q \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{q^2 \log^2 q} \delta_{\frac{p}{q}}.$$

On définit le taux d'approximation d'un point t de $[0,1]$ par les rationnels comme

$$\alpha^R(t) = \sup \left\{ \alpha : t \in \limsup_{q \rightarrow \infty} \bigcup_{\substack{1 \leq p \leq q \\ p \wedge q = 1}} \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^\alpha}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^\alpha} \right] \right\}.$$

Il est prouvé dans [Fal2] que

$$E_{\mu_R}(H) = \begin{cases} \{t : \alpha^R(t) = \infty\} \cup D & \text{si } H = 0, \\ \{t : \alpha^R(t) = 2H^{-1}\} \setminus D & \text{si } H \in (0,1], \\ \emptyset & \text{si } H > 1. \end{cases}$$

Grâce au Théorème 0.2.1, qui dans ce cas n'est autre que le théorème de Jarnick, on obtient $\dim E_{\mu_R}(H) = H$ si $H \in [0,1]$ et $E_{\mu_R}(H) = \emptyset$ sinon.

Une propriété d'ubiquité cause la linéarité des spectres dans les exemples précédents

Dans les exemples E, F et G, les ensembles de niveaux sont caractérisés par un taux d'approximation par une famille de points. Redisons que cette situation est très différente de celle

décrite dans la Section 0.2.1, où les ensembles de niveau sont déterminés par le comportement asymptotique de sommes de type Birkhoff.

Le résultat qui suit est central dans la minoration des dimensions de Hausdorff des ensembles de niveau des fonctions α^D , α^P et α^R définies plus haut. C'est un résultat connu dans la communauté qui étudie spécifiquement la notion d'ubiquité [DodRyVi, DodMePesVel]. Dans le contexte qui nous préoccupe, cette notion peut être introduite de la façon suivante. Etant données une suite $(x_n)_{n \geq 0} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et une suite strictement positive $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers 0, pour chaque $\alpha \geq 1$ définissons l'ensemble

$$S(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} [x_n - \lambda_n^\alpha, x_n + \lambda_n^\alpha]. \quad (9)$$

Chaque $S(\alpha)$ est donc l'ensemble des points de $[0,1]$ qui voient infiniment souvent un point x_n , à une distance inférieure à λ_n^α , c'est à dire qui sont approchés par les x_n à la vitesse λ_n^α .

Pour être plus précis le taux d'approximation de t par les x_n relativement à $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ peut être défini par

$$\alpha(t) = \sup\{\alpha : t \in S(\alpha)\}.$$

Les ensembles de niveau de la fonction $\alpha(\cdot)$ (c'est à dire les ensembles de la forme $F(\alpha) = S(\alpha) \setminus \bigcup_{\alpha' > \alpha} S(\alpha')$) et leur taille mesurée par leur dimension de Hausdorff, informent sur les propriétés d'ubiquité, c'est à dire l'omniprésence des x_n dans $[0,1]$.

Le Théorème 0.2.1 fournit une minoration des dimensions des ensembles $S(\alpha)$ dès que les points x_n sont suffisamment uniformément répartis dans $[0,1]$, au sens où la mesure de Lebesgue de $S(1) \cap [0,1]$ est égale à 1. Ce théorème est établi notamment dans [DodRyVi, Jaf7].

Théorème 0.2.1 () *Soient $(x_n)_{n \geq 0} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n \geq 0} \in (0,\infty)^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0. Supposons que la mesure de Lebesgue de $\limsup_{n \rightarrow \infty} [x_n - \lambda_n, x_n + \lambda_n]$ soit égale à 1. Pour chaque $\alpha > 1$ il existe une mesure de Borel positive m_α sur $[0,1]$ telle que $m_\alpha(S(\alpha)) > 0$ et*

$$\forall x \in (0,1), \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{m_\alpha(B(x,r))}{r^{\frac{1}{\alpha} - 2 \frac{\log |\log(r)|}{|\log r|}}} < \infty.$$

En particulier, $\dim(S(\alpha)) \geq \frac{1}{\alpha}$.

Dans les exemples de la Section 0.2.2, la famille $\{(x_n, \lambda_n)\}$ à laquelle on peut appliquer le Théorème 0.2.1 peut être choisie ainsi:

Exemple E: $\{(x_n, \lambda_n)\} = \{(k2^{-j}, 2^{-j})\}_{j \geq 1, 0 \leq k < 2^j}$. On utilise ensuite le fait que $\alpha(t) = \alpha^D(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Exemple F: Soit $(j_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement croissante telle que $\beta_{j_n} = \frac{\log_2 C_{j_n}}{j_n}$ converge vers β . On choisit $\{(x_n, \lambda_n)\} = \{(t_{j_n}, 2^{j_n \beta_{j_n}})\}_{n \geq 1, t_{j_n} \in D_{j_n}}$. On utilise ensuite le fait que si $\alpha(t) = a$ alors $\alpha^P(t) = a$.

Exemple G: $\{(x_n, \lambda_n)\} = \{(\frac{p}{q}, \frac{1}{q^2})\}_{q \geq 1, 1 \leq p \leq q, p \wedge q = 1}$. On utilise ensuite le fait que $\alpha(t) = \alpha^R(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

D'autres exemples

D'autres exemples importants de séries de fonctions dont l'analyse multifractale utilise des propriétés de vitesse d'approximation par des familles de points ont été étudiés. Les plus remarquables sont la fonction de Riemann [Jaf2], et les séries aléatoires d'ondelettes [Jaf7, AuJ]. Dans tous ces cas, comme dans ceux présentés dans la Section 0.2.2, le graphe du spectre de Hausdorff est constituée d'une partie croissante, à laquelle il faut adjoindre un point dans le cas de la fonction de Riemann.

Les fonctions présentant un ensemble dense de points de discontinuité sont pertinentes pour la description de phénomènes naturels ou sociaux intrinsèquement discontinus. Dans cet esprit, nous examinerons au Chapitre 5 une classe de processus stochastiques obtenus comme séries de fonctions aléatoires, inspirée par l'étude de la multifractalité du trafic sur Internet, et qui possède des points communs avec des processus de Lévy.

0.2.3 Combinaisons des chaos additifs et multiplicatifs, et ubiquité conditionnée

Les fonctions auto-similaires étudiées par S. Jaffard dans [Jaf3] (voir aussi [AouBenSl] qui étudie des distorsions de la construction de [Jaf3]) s'écrivent comme séries infinies de fonctions pondérées par des produits de poids (déterministes). En ce sens elles combinent chaos additif et multiplicatif. Pour obtenir une telle fonction sur $\mathbb{R}$, on se donne $b \geq 2$ similitudes S_i de $\mathbb{R}$ de rapports respectifs $\mu_i < 1$ telles qu'il existe un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}$ stable par les S_i et telles que l'hypothèse de séparation $S_i(\Omega) \cap S_j(\Omega) = \emptyset$ si $i \neq j$ soit satisfaite; b nombres complexes λ_i tels que $\sum_{i=1}^b \mu_i |\lambda_i| < 1$; et une fonction g sur $\mathbb{R}$ de classe C^k , $k \geq 0$, telle que g et ses dérivées soient à décroissance rapide à l'infini. Alors, la série

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{I_1, \dots, I_n \in \{0, \dots, b-1\}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} g(S_i^{-1}(x))$$

définit une fonction de L^1 qui est auto-similaire en ce sens qu'elle est (l'unique) solution (dans L^1) de l'équation fonctionnelle

$$F(x) = \sum_{i=1}^d \lambda_i F(S_i^{-1}(x)) + g(x).$$

[Jaf3] donne la structure multifractale de F , sous l'hypothèse qu'il existe $x \in \Omega$ tel que F n'est pas de classe C^k en x et que $\alpha_{\min} = \min_{1 \leq i \leq b} \frac{\log |\lambda_i|}{\log \mu_i} > 0$.

La détermination des exposants ponctuels de Hölder de F se fait à l'aide de la transformée en ondelettes continue de F . Il s'avère que F ne peut être de régularité différente de celle de g en un point t que si t est dans l'ensemble de Cantor K limite du système de fonctions itérées défini par les S_i . En un tel point, l'examen des coefficients d'ondelettes montre que l'exposant ponctuel de Hölder est étroitement lié à celui d'une mesure μ de type quasi-Bernoulli [BrMiP], et donc de nature voisine de celle des exemples A et B de la Section 0.2.1. On est donc en quelque sorte ramené à l'analyse multifractale d'une mesure. En particulier, si l'on se restreint à la partie du

spectre multifractal de F correspondant aux exposants $H < k$, c'est une partie de celui de μ à une déformation simple près si $\alpha_{\min} < k$. Ceci reflète la structure multiplicative injectée dans les coefficients de la série.

Les séries d'ondelettes pondérées par des mesures considérées dans [19] sont de la forme suivante:

$$F_\mu(t) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{2^j-1} \pm 2^{-j(s-\frac{1}{p})} \mu([k2^{-j}, (k+1)2^{-j}])^{\frac{1}{p}} \psi(2^j t - k), \quad (10)$$

où μ est une mesure de Borel finie sur $[0,1]$, $s, p > 0$ et $s - \frac{1}{p} > 0$. Sous des hypothèses raisonnables, la fonction F_μ hérite de la structure multifractale de la mesure μ , au sens où $h_{F_\mu}(t) = s - \frac{1}{p} + \frac{h_\mu(t)}{p}$ et $d_{F_\mu}(H) = d_\mu(pH - ps)$. En particulier, on peut retrouver des spectres multifractals strictement concaves provenant de mesures produits infinis, mais aussi des spectres tels que celui de la fonction de l'exemple E. En effet, cette fonction a la même nature multifractale que F_{μ_D} , μ_D étant l'une des mesures introduites dans l'exemple G. Plus précisément, la raison en est que les coefficients d'ondelettes de la fonction de saturation sont égaux à ceux de F_{μ_D} à une petite perturbation près.

L'un des attraits de cette construction est que l'on peut avoir un certain contrôle sur sa régularité locale par perturbation de ses coefficients d'ondelettes. En particulier, on peut construire des processus gaussiens à spectres multifractal prescrits en multipliant les coefficients de F_μ par des variables gaussiennes indépendantes. Aussi, cela permet de décrire la nature multifractal d'un modèle aléatoire de turbulence introduit dans [ArnBaMu]. Nous reviendrons sur les fonctions F_μ dans la Section 4.2.

Les sommes de masses de Dirac pondérées par une mesure considérées dans [20] et [22] réalisent une fusion plus riche des chaos additifs et multiplicatifs que les constructions précédentes. Elles s'écrivent sous la forme

$$\nu_\rho = \sum_{j \geq 1} \sum_{k=0}^{b^j-1} \frac{b^{-j(1-\rho)}}{j^2} \mu([kb^{-j} - b^{-j\rho}, kb^{-j} + b^{-j\rho}]) \delta_{kb^{-j}}.$$

C'est une pondération hétérogène des masses de Dirac, par référence à l'exemple G de la Section précédente. Ici, sous certaines hypothèses sur la mesure μ quand elle est construite comme un produit infini de fonctions, le spectre de ν_ρ reflète la structure additive par la présence d'une première partie linéaire croissante, suivie d'une partie strictement concave croissante, puis décroissante, qui reflète, elle, la structure multiplicative injectée dans les poids $\frac{b^{-j(1-\rho)}}{j^2} \mu([kb^{-j} - b^{-j\rho}, kb^{-j} + b^{-j\rho}])$.

Cette construction a des extensions et une contrepartie en terme de fonctions possédant un ensemble dense et dénombrable de points de saut, et elle peut être utilisée de façon à engendrer la série d'ondelettes F_{ν_ρ} par la formule (10). Ceci sera précisé dans le Chapitre 4.

La partie linéaire du spectre reflète une propriété d'ubiquité plus fine que celle décrite dans la Section 0.2.2. En effet, on est amené à estimer la dimension de Hausdorff de sous-ensembles

des ensembles $S(\alpha)$ (voir (9)):

$$S_\mu(\alpha, H) = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{\substack{n \geq N, \\ \lambda_n^{H+\varepsilon_n} \leq \mu([x_n - \lambda_n, x_n + \lambda_n]) \leq \lambda_n^{H-\varepsilon_n}}} [x_n - \lambda_n^\alpha, x_n + \lambda_n^\alpha] \quad (11)$$

où ε_n est une suite positive convergeant vers 0.

Ceci sera l'objet du Chapitre 3.

0.3 Organisation du mémoire

Le Chapitre 1 présente un résultat obtenu en collaboration avec F. Ben Nasr et J. Peyrière dans [10], qui lie les deux principaux formalismes multifractals pour les mesures, et s'applique notamment aux mesures considérées dans le Chapitre 2.

Le Chapitre 2 est consacré à deux classes de mesures illustrant la notion de **T**-martingales introduite dans [K2, K4].

Les deux premières sections présentent une classe abstraite $\mathcal{M}$ de $[0,1]$ -martingales dans laquelle on peut répondre de façon précise aux questions de non dégénérescence, de finitude des moments, du calcul de la dimension, et plus généralement de l'analyse multifractale. Cette classe unifie un certain nombre d'exemples de $[0,1]$ -martingales, dont font partie les cascades canoniques et les cascades de Poisson composées. Ce point de vue, présenté dans [17, 18, 9], est l'aboutissement d'un cheminement auquel ont contribué les articles [4, 5, 6, 7, 16, 8] (une partie de ces travaux est écrite en collaboration avec B. Mandelbrot). La première section est consacrée aux éléments de $\mathcal{M}$ auto-similaires en loi, qui sont ceux pour lesquels on peut donner les énoncés les plus complets. La seconde section, qui ne suppose plus d'auto-similarité en loi, propose plusieurs approches pour plonger dans un cadre vectoriel le problème de la non dégénérescence et du calcul de la dimension des mesures dans $\mathcal{M}$ dans un cadre vectoriel, afin d'obtenir des résultats valables presque sûrement pour des familles non dénombrables d'éléments de $\mathcal{M}$. Ce point de vue est nécessaire pour obtenir une description complète de la nature multifractale de ces $[0,1]$ -martingales.

La troisième section présente les résultats obtenus en collaboration avec A.-H. Fan dans [14] concernant la fréquence de recouvrement des points dans le recouvrement de Dvoretzky du cercle par des arcs aléatoires. Ces résultats sont intimement liés à ceux obtenus pour l'analyse multifractale de $[0,1]$ -martingales poissonniennes non auto-similaires. On met en évidence trois comportements typiques qui dépendent de la vitesse à laquelle les longueurs des arcs tendent vers 0.

La dernière section est consacrée à une classe de $[0,1]$ -martingales qui généralisent les produits de Riesz avec phases uniformes, et qui est intimement liée au formalisme thermodynamique pour les transformations aléatoires. Sous certaines hypothèses, ces produits sont des mesures de Gibbs aléatoires. Cette classe est mise en contraste avec $\mathcal{M}$. On présente une condition nécessaire et suffisante de non dégénérescence d'une nature étrangère à celle qui régit les éléments auto-similaires en loi de $\mathcal{M}$. On donne aussi un résultat d'analyse multifractale dans lequel le potentiel de ces mesures de Gibbs "faibles" est autorisé à avoir un ensemble dense de points de saut. Ce

travail a été motivé par certaines conjectures émises par B. Mandelbrot et M.-O. Coppins, et fait l'objet de [11].

Le Chapitre 3 présente deux notions nouvelles qui ont émergé quand nous avons étudié des sommes de Dirac pondérées par des mesures. La première de ces notions est celle d'ubiquité conditionnée. L'ubiquité classique étudie dans $\mathbb{R}^d$ la dimension de Hausdorff d'ensembles du type $\limsup_{n \rightarrow \infty} B(x_n, \lambda_n^\delta)$, afin de décrire finement les ensembles de points approchés infiniment souvent par les points d'un ensemble dénombrable $\{x_n, n \geq 1\}$ à la vitesse λ_n^δ . Cela donne par exemple le Théorème de Jarnick. Etant donnée une mesure positive μ sur $\mathbb{R}^d$ et $\alpha \geq 0$, l'ubiquité conditionnée se pose la même question mais impose une sélection des x_n qui sont tels que $\mu(B(x_n, \lambda_n)) \approx \lambda_n^\alpha$. On fait donc une sorte d'analyse multifractale à l'intérieur de $\limsup_{n \rightarrow \infty} B(x_n, \lambda_n^\delta)$. On énonce un résultat qui permet de calculer les dimensions de ces ensembles $\limsup$ conditionnés par μ auto-similaire en loi. Ce résultat fait appel à une autre notion nouvelle, dite de vitesse de renouvellement de l'auto-similarité. Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec S. Seuret, et sont écrits dans [23, 24].

Le Chapitre 4 expose les résultats obtenus concernant la nature multifractale de séries de masses de Dirac et de séries d'ondelettes pondérées par une mesure. Les résultats sur les sommes de masses de Dirac dépendent de façon essentielle de ceux du Chapitre 3, et ils éclairent sous un jour nouveau certains travaux les ayant précédés. Les résultats sur les séries d'ondelettes permettent de faire l'analyse multifractale du modèle de turbulence d'A. Arnéodo, E. Bacry et J.-F. Muzy.

Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec S. Seuret, et sont écrits dans [20, 22, 21, 19].

Le Chapitre 5 expose les résultats obtenus concernant la nature multifractale d'une série de fonctions à sauts dont la construction s'inspire de certaines propriétés du protocole de contrôle du trafic sur Internet. Le processus obtenu peut s'écrire comme somme de deux composantes, dont l'une a des points communs avec certains processus de Lévy sans partie brownienne. On compare attentivement la façon d'aborder leur analyse multifractale.

Ce travail est une collaboration avec J. Lévy Véhel [15].

0.4 Quelques notations

Dans toute la suite, si b est un entier ≥ 2 fixé, A désigne l'alphabet $\{0, \dots, b-1\}$, A^n l'ensemble des mots de longueur n sur A (A^0 étant le mot vide noté ϵ), $A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$, ∂A^* l'ensemble des mots infinis sur A , et $A^* \cup \partial A^*$ est muni de l'opération de concaténation. L'intervalle I_w désigne le sous-intervalle b -adique fermé de $[0,1]$ naturellement codé par le mot w de A^* . On désigne par t_w son centre.

Si $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(t)$ désigne l'adhérence de l'intervalle b -adic semi-ouvert à droite et de longueur b^{-n} contenant t .

Pour $t \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, $B(t,r)$ désigne la boule fermée de centre t et de rayon r .

Les dimensions de Hausdorff et de packing seront notées respectivement $\dim$ et Dim (voir [Mat] pour leurs définitions).

Nous adoptons la convention suivante. Si f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, sa transformée de Legendre est la fonction $f^* : \alpha \in \mathbb{R} \mapsto \inf_{q \in \mathbb{R}} \alpha q + f(q)$.

La restriction de la mesure de Lebesgue à $[0,1]$ sera notée ℓ .

Le fait que deux variables aléatoires X et Y sont égales en loi sera noté $X \stackrel{d}{=} Y$.

Chapitre 1

Un résultat liant deux formalismes multifractals pour les mesures

Les idées avancées dans [FrPa] et [HaJeKaPrSh] ont permis de dégager des notions de formalismes multifractals pour les fonctions et pour les mesures. Nous sommes ici concernés par les mesures. L’approche (pratique) adoptée par les physiciens pour étudier finement le comportement local d’une mesure μ sur $\mathbb{R}^d$ consiste à se donner une grille régulière, b -adique par exemple, de plus en plus fine pour découper le support de μ , puis à classifier par ensembles de niveau le comportement asymptotique local des densités logarithmiques de la forme $\frac{\log(C_n(t))}{\log|C_n(t)|}$ lorsque n tend vers l’infini, où $C_n(t)$ est la boîte b -adique de la $n^{\text{ième}}$ génération contenant t et $|C_n(t)|$ son diamètre. D’un point de vue théorique, cette approche est particulièrement adaptée lorsque la construction de μ est liée à une structure d’arbre homogène, comme c’est le cas pour les mesures de Gibbs associées à certains systèmes dynamiques et aussi pour les cascades canoniques de B. Mandelbrot. La mise en forme rigoureuse d’un formalisme multifractal, dit “formalisme avec boîtes”, associé à ce point de vue a été opérée principalement dans [BrMiP], où une large classe de mesures déterministes satisfaisant à ce formalisme a été mise en évidence: les mesures dites “quasi-Bernoulli”.

D’autre part, il n’est pas moins naturel d’étudier le comportement local de μ en considérant les densités logarithmiques $\frac{\log(\mu(B(t,r)))}{\log(r)}$ quand r tend vers 0. Cela a donné lieu au formalisme multifractal dit “centré”, développé dans [O2] et complété dans [BeBh, BeBhH]. Il est prouvé dans [O1, O2] que ce formalisme est valide pour un certain nombre de mesures classiques dépendant d’une structure d’arbre, mais sous des hypothèses restrictives. En particulier, il n’est pas établi qu’il soit valide pour les mesures quasi-Bernoulli en général. Un résultat préliminaire se trouve dans [Bh]. Les difficultés que l’on rencontre dans cette question viennent du fait qu’on cherche à se libérer de la structure de grille dont dépendent intrinsèquement ces mesures.

En collaboration avec F. Ben Nasr et J. Peyrière, nous avons développé dans [10] une approche permettant de passer du formalisme avec boîtes de [BrMiP] au formalisme centré de [O2]. Grâce à elle on conclut à la validité du formalisme centré pour les mesures quasi-Bernoulli. Elle permet aussi de montrer que les éléments de la classe de $[0,1]$ -martingales considérée dans la Section 2.1, classe qui contient les cascades canoniques de B. Mandelbrot, vérifient les deux formalismes multifractals sous des hypothèses raisonnables.

Afin de pouvoir présenter le résultat principal de [10], nous rappelons les points essentiels des deux formalismes multifractals en question.

Nous allons nous cantonner au cadre euclidien et travailler en dimension 1. Le cas des dimensions supérieures est seulement un peu moins aisé à exposer.

1.1 Un formalisme multifractal avec boîtes

Soient μ une mesure de Borel positive et finie sur $[0,1]$ et b un entier ≥ 2 .

Les ensembles de niveaux et les spectres multifractals

Etant donné $\alpha \geq 0$, on définit les ensembles de niveau α de la densité logarithmique de μ

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{E}}_\mu(\alpha) = \left\{ t \in \text{supp}(\mu) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(t))}{\log |I_n(t)|} = \alpha \right\}, \\ \overline{\mathcal{E}}_\mu(\alpha) = \left\{ t \in \text{supp}(\mu) : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(t))}{\log |I_n(t)|} = \alpha \right\}, \\ \mathcal{E}_\mu(\alpha) = \underline{\mathcal{E}}_\mu(\alpha) \cap \overline{\mathcal{E}}_\mu(\alpha). \end{cases}$$

Les spectres multifractals de μ associés à ces ensembles sont les fonctions $\alpha \geq 0 \mapsto \dim S_\mu(\alpha)$ et $\alpha \geq 0 \mapsto \text{Dim } S_\mu(\alpha)$ pour $S \in \{\mathcal{E}, \underline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{E}}\}$.

La fonction τ_μ

La fonction τ_μ est la fonction convexe définie par

$$\tau_\mu : q \in \mathbb{R} \mapsto \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_b \sum_{w \in A^n} \mu(I_w)^q,$$

avec la convention $0^q = 0$ si $q \leq 0$.

Une définition alternative est

$$\tau_\mu(q) = \sup \{ t \in \mathbb{R} : \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{w \in A^n} \mu(I_w)^q |I_w|^t = +\infty \}.$$

Il est important de retenir que si le support de μ est $[0,1]$, alors la fonction τ_μ ne dépend pas du choix de b .

Le résultat suivant est une conséquence de [BrMiP].

Proposition 1.1.1 *Pour tout $\alpha \geq 0$ et $S \in \{\mathcal{E}, \underline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{E}}\}$ on a $\dim S_\mu(\alpha) \leq \text{Dim } S_\mu(\alpha) \leq \tau_\mu^*(\alpha)$.*

Il est implicite dans cette proposition que si $\tau_\mu^*(\alpha) < 0$ alors l'ensemble $S_\mu(\alpha)$ est vide.

Définition 1.1.1 *On dit que le formalisme multifractal est valide en $\alpha \geq 0$ si l'on a $\dim \mathcal{E}_\mu(\alpha) = \tau_\mu^*(\alpha)$.*

Commentaires

(1) Il découle de la Proposition 1.1.1 que si le formalisme est valide en α , alors on a $\dim S_\mu(\alpha) = \text{Dim } S_\mu(\alpha) = \tau_\mu^*(\alpha)$ pour $S \in \{\mathcal{E}, \underline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{E}}\}$.

(2) Ce formalisme sera illustré dans la Section 2.1.3. En fait, il est présenté sous une forme plus générale dans [BrMiP] qui prend aussi en compte le cas de grilles non homogènes. Mis à part les mesures quasi-Bernoulli (voir [BrMiP] et Section 2.1.4) ce formalisme s'adresse alors notamment aux cascades de Mandelbrot construites sur une grille aléatoire d'intervalles obtenue à l'aide d'une telle mesure (voir [P3, 4, 5]).

1.2 Un formalisme centré

Soit μ une mesure de Borel positive et finie sur $[0,1]$.

Les ensembles de niveaux et les spectres multifractals

Etant donné $\alpha \geq 0$ on définit les ensembles de niveau

$$\begin{cases} \underline{E}_\mu(\alpha) = \left\{ t \in \text{supp}(\mu) : \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \mu(B(t,r))}{\log r} = \alpha \right\}, \\ \overline{E}_\mu(\alpha) = \left\{ t \in \text{supp}(\mu) : \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \mu(B(t,r))}{\log r} = \alpha \right\}, \\ E_\mu(\alpha) = \underline{E}_\mu(\alpha) \cap \overline{E}_\mu(\alpha). \end{cases}$$

Les spectres multifractals de μ associés à ces ensembles sont les fonctions $\alpha \geq 0 \mapsto \dim S_\mu(\alpha)$ et $\alpha \geq 0 \mapsto \text{Dim } S_\mu(\alpha)$ pour $S \in \{E, \underline{E}, \overline{E}\}$.

Les fonctions dimensions généralisées b_μ , B_μ et Λ_μ

Pour définir son formalisme multifractal, [O2] introduit plusieurs pré-mesures indexées par un couple (q,t) de réels.

Si $E \subset [0,1]$ et $\delta > 0$ soit

$$\overline{\mathcal{P}}_{\mu,\delta}^{q,t}(E) = \sup \sum^* \mu(B(x_j, r_j))^q r_j^t,$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les collections $\{B(x_j, r_j)\}$ d'intervalles fermés deux à deux disjoints centrés sur E , et dont les diamètres sont inférieurs ou égaux à 2δ . L'étoile signifie que l'on retire de la somme les termes correspondant à une masse ou un rayon nul.

On considère alors la limite

$$\overline{\mathcal{P}}_\mu^{q,t}(E) = \lim_{\delta \searrow 0} \overline{\mathcal{P}}_{\mu,\delta}^{q,t}(E).$$

La fonction $\overline{\mathcal{P}}_\mu^{q,t}$ est appelée *pré-mesure de packing*. Il lui manque d'être σ -sous-additive pour être une mesure extérieure (au sens de Carathéodory). On définit

$$\mathcal{P}_\mu^{q,t}(E) = \inf_{E \subset \bigcup E_j} \sum \overline{\mathcal{P}}_\mu^{q,t}(E_j),$$

qui, comme fonction de E , est une mesure extérieure (on obtient la mesure de packing t -dimensionnelle sur $[0,1]$ introduite dans [T] en prenant pour μ une mesure de support égal à $[0,1]$, $q = 0$ et $t \geq 0$).

De façon analogue, on définit des mesures de Hausdorff généralisées.

$$\overline{\mathcal{H}}_{\mu,\delta}^{q,t}(E) = \inf \sum^* \mu(B(x_j, r_j))^q r_j^t,$$

la borne inférieure étant prise sur tous les recouvrements $\{B(x_j, r_j)\}$ de E par des intervalles fermés centrés sur E et dont les diamètres ne dépassent pas 2δ , et on considère la limite

$$\overline{\mathcal{H}}_{\mu}^{q,t}(E) = \lim_{\delta \searrow 0} \overline{\mathcal{H}}_{\mu,\delta}^{q,t}(E).$$

Pour travailler avec une mesure extérieure, on définit

$$\mathcal{H}_{\mu}^{q,t}(E) = \sup_{F \subset E} \overline{\mathcal{H}}_{\mu}^{q,t}(F).$$

Ces mesures sont des généralisations de la mesure de Hausdorff centrée introduite dans [Sa-RaT].

Une valeur de q étant fixée, si, pour une valeur de t on a $\overline{\mathcal{P}}_{\mu}^{q,t}(\text{supp } \mu) < +\infty$, alors quel que soit $t' > t$, on a $\overline{\mathcal{P}}_{\mu}^{q,t'}(\text{supp } \mu) = 0$. Il existe donc un unique réel $\Lambda_{\mu}(q) \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\overline{\mathcal{P}}_{\mu}^{q,t}(\text{supp } \mu)$ est infini si $t < \Lambda_{\mu}(q)$ et nul si $t > \Lambda_{\mu}(q)$.

De la même façon deux fonctions B_{μ} et b_{μ} sont associées respectivement à $\mathcal{P}_{\mu}^{q,t}$ et $\mathcal{H}_{\mu}^{q,t}$.

Ces trois fonctions sont décroissantes; Λ_{μ} et B_{μ} sont convexes. Il est immédiat que $B_{\mu} \leq \Lambda_{\mu}$, et l'utilisation du Théorème de recouvrement de Besicovitch permet de montrer que $b_{\mu} \leq B_{\mu}$.

La proposition suivante se déduit de [O2].

Proposition 1.2.1 *Soit $\alpha \geq 0$. On a $\dim E_{\mu}(\alpha) \leq b_{\mu}^*(\alpha)$, et $\dim S_{\mu}(\alpha) \leq \text{Dim } S_{\mu}(\alpha) \leq B_{\mu}^*(\alpha)$ si $S \in \{E, \underline{E}, \overline{E}\}$.*

Définition 1.2.1 *On dit que le formalisme multifractal est valide en $\alpha \geq 0$ si l'on a $\dim E_{\mu}(\alpha) = (B_{\mu})^*(\alpha)$.*

1.3 Un passage du premier au second formalisme

Si $w \in A^n$ on définit le nombre $\imath(w)$ de sorte que $I_w = [\imath(w)b^{-n}, (\imath(w)+1)b^{-n}]$, et si $v, w \in A^n$, on pose $\delta(v, w) = |\imath(v) - \imath(w)|$.

On établit le résultat suivant dans [10].

Théorème 1.3.1 *Soit $q \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une mesure μ_q non nulle sur $[0,1]$ et une fonction C_q sur A^* telles que $\mu_q(I_w) \leq C_q(w) \mu(I_w)^q b^{-|w|\tau_{\mu}(q)}$ pour tout $w \in A^*$ tel que $\mu(I_w) > 0$. Si $\tau'_{\mu}(q)$ existe et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait*

$$\sum_{n>0} c^{-n(\tau_{\mu}(q)+\eta\varepsilon)} \sum_{\substack{v,w \in A^n \\ \delta(v,w) \leq b'}} \mu(I_v)^{-\eta q} C_q(w)^{1+\eta} \mu(I_w)^{(1+\eta)q} < +\infty \quad (1.1)$$

(où $b' = 3$ si $q < 0$ et $b' = 4b + 2$ sinon), alors μ satisfait les deux formalismes multifractals en $-\tau'_{\mu}(q)$, B_{μ} est dérivable en q et $B'_{\mu}(q) = \tau'_{\mu}(q)$, et on a $b_{\mu}(q) = B_{\mu}(q) = \Lambda_{\mu}(q) = \tau_{\mu}(q)$.

Commentaires

(1) Le point de vue adopté dans [10] est un peu plus général, en ce sens qu'il prend aussi en compte les analogues à b_μ , B_μ et Λ_μ considérées dans [Be1] pour le formalisme avec boîtes. Ici, nous avons précisé le fait que les dimensions des ensembles de niveaux associés aux $\liminf$ et aux $\limsup$ des densités logarithmiques sont bien contrôlées.

(2) Si dans la condition (1.1) on impose seulement $b' = 0$, alors on peut conclure que le formalisme avec boîtes est valide en $-\tau'_\mu(q)$. La condition (1.1) assure pour μ_q -presque tout t un contrôle de la μ -mesure des voisins de l'intervalle $I_n(t)$ qui sont de la même génération, quand n tend vers l'infini. Cela permet ensuite pour μ_q -presque tout t un contrôle de $\mu(B(t,r))$ quand t tend vers 0. On passe alors du premier au second formalisme.

(3) Dans le cas des mesures de type quasi-Bernoulli, la fonction C_q peut être choisie constante, et le Théorème 1.3.1 s'applique à ces mesures [10]. La situation est plus subtile dans le cas des mesures limites de martingales étudiées dans [10, 18, 9] et que nous présentons à la Section 2.1. Le Théorème 1.3.1 s'applique aussi à cette classe de mesures. Il représente un progrès théorique par rapport à [O2] et [BeBhH] car aucune des conditions suffisantes de validité du formalisme centré proposées dans ces travaux n'est vérifiable pour cette classe de martingales (voir aussi la Remarque 5.8 de [18]).

Chapitre 2

Contributions à l'étude de certaines T-martingales et de leurs extensions. Application à deux problèmes de recouvrement aléatoire

Les **T**-martingales sont une classe de martingales à valeurs mesures introduites par J.-P. Kahane [K2, K4] afin d'inscrire dans une théorie mathématique rigoureuse les modèles de turbulence de B. Mandelbrot [M1, M4, M5, KP]. Nos travaux sur des exemples de tels objets nous ont conduit à distinguer une sous-classe de ces martingales, dans laquelle la théorie de J.-P. Kahane peut être complétée.

Commençons par définir les **T**-martingales.

Notion de T-martingale. Nous travaillons sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Soit **T** un espace métrique compact. On désigne par $\mathcal{B}(\mathbf{T})$ la tribu Borélienne de **T** et pour $B \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$, $\mathcal{B}(B)$ la trace de $\mathcal{B}(\mathbf{T})$ sur B .

Soit σ une mesure de Borel positive, non nulle, et bornée sur **T**.

Soit $Q_\varepsilon : (\mathbf{T} \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbf{T}) \otimes \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, $0 < \varepsilon \leq 1$, une famille de fonctions mesurables, et q , une fonction positive appartenant à $L^1(\mathbf{T}, \sigma)$ telle que $\int_{\mathbf{T}} q(t) d\sigma(t) > 0$.

Pour $\varepsilon \in (0, 1]$, on désigne par $\mathcal{F}_\varepsilon$ la tribu engendrée dans $\mathcal{B}$ par la famille de variables aléatoires $\{Q_\lambda(t, \cdot)\}_{t \in \mathbf{T}, \lambda \in [\varepsilon, 1]}$.

Supposons que la famille $\{Q_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$ satisfasse la propriété suivante:

(P1) Pour tout $t \in \mathbf{T}$, $(\{Q_{s^{-1}}(t, \cdot), \mathcal{F}_{s^{-1}}\})_{s > 1}$ est une martingale continue à droite d'espérance 1. De plus, avec probabilité 1, pour tout $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ il existe une fonction positive et intégrable $h(\cdot, \omega)$ telle que $\sup_{\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq 1} Q_\varepsilon(t, \omega) \leq h(t, \omega)$ pour σ -presque tout $t \in \mathbf{T}$.

Soit alors pour chaque $\varepsilon \in (0, 1]$ la mesure μ_ε dont la densité par rapport à σ est donnée par

$$\frac{d\mu_\varepsilon}{d\sigma}(t) = Q_\varepsilon(t) q(t).$$

La famille $\{Q_\varepsilon\}$ aussi bien que la famille $\{\mu_\varepsilon\}$ est ce que l'on appelle une **T**-martingale. D'après [K4], les mesures μ_ε convergent faiblement (c'est à dire dans le dual de l'espace des fonctions continues sur **T**), lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers une mesure positive μ .

Puisque l'on peut substituer à σ la mesure $q \cdot \sigma$, on peut supposer sans perte de généralité que $q \equiv 1$. Alors, on désigne μ_ε et μ respectivement par $Q_\varepsilon \cdot \sigma$ et $Q \cdot \sigma$.

Remarque 1 Dans [K2, K4] les martingales sont définies à temps discret, et il n'est pas nécessaire d'invoquer la fonction $h(t, \omega)$ qui ici assure que pour $f \in C(\mathbf{T}, \mathbb{R})$, la famille $\left(\int_{[0,1]} f(t) d\mu_{s^{-1}}(t) \right)_{s>1}$ est aussi une martingale continue à droite, ce qui permet de conclure à l'existence d'une unique limite μ .

Les questions liées à ces martingales.

B. Mandelbrot a considéré une série de questions naturelles concernant les premiers modèles de martingales qu'il a proposés. Ces questions ont ensuite été reprises dans la théorie des **T**-martingales [K2, K4]. La toute première d'entre elles consiste à se demander à quelle condition la limite $Q \cdot \sigma$ n'est pas dégénérée, autrement dit $\mathbb{P}(Q \cdot \sigma \neq 0) > 0$. La seconde consiste à demander lesquels des moments d'ordres positifs et négatifs de la variable $Q \cdot \sigma((T))$ sont finis afin d'avoir une idée de sa distribution.

La troisième concerne la détermination de la dimension de la mesure $Q \cdot \sigma$.

Dans [K2, K4] ces questions sont abordées de façon très générale, et mis à part pour les cascades canoniques auto-similaires en loi initialement étudiées dans [KP] (voir Sections 0.2.1 et 2.1) et certaines de leur généralisations (voir aussi [Fan8]), ces travaux n'exhibent pas de classes de **T**-martingales pour lesquelles on sache répondre de façon très précise à toutes ces questions simultanément.

Concernant la dégénérescence, [K2, K4] donne une condition nécessaire et suffisante générale de convergence dans L^2 . Mais au regard de la condition nécessaire et suffisante de convergence dans L^1 trouvée pour les cascades canoniques on aimerait améliorer cette condition pour au moins obtenir une condition suffisante de convergence dans L^p pour $p > 1$ proche de 1.

Des conditions suffisantes de finitude des moments d'ordres entiers positifs sont donnés dans [K2] et [Fan1] pour le chaos multiplicatif gaussien.

Des résultats précis sont donnés pour l'estimation des dimensions inférieures des mesures $Q \cdot \sigma$ pour certains chaos multiplicatifs gaussiens et de Lévy dans [K2] et [Fan2].

La question de l'analyse multifractale (voir Sections 1 et 0.2.1) de $Q \cdot \sigma$ est la quatrième question. Elle est apparue plus tard (voir Section 0.1). Comme nous l'avons dit dans la Section 0.2.1, cette question est subtile, et elle conduit à poser aussi celle de la classification multifractale du comportement asymptotique de $Q_\varepsilon(t)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

A la lumière des **T**-martingales étudiées dans [KP, HoWa, K6, Mol, 5, Liu5] et [16, 8], nous avons dégagé une sous-famille de $[0,1]$ -martingales, que nous noterons $\mathcal{M}$, dans laquelle on peut compléter la théorie de J.-P. Kahane en répondant de façon précise aux questions précédentes, et qui est illustrée par de nouveaux exemples.

Une certaine classe de **T**-martingales.

Chronologiquement, les premières **T**-martingales ont été considérées par B. Mandelbrot dans [M4, M5]. Il s'agit des cascades dites "canoniques" (cf. exemple C de la Section 0.2.1). Elles, et leurs variantes, ont été étudiées intensivement [K1, P1, KP, K5, K6, HoWa, Mol, ArPa, WaWi, 4, 5, Liu3, Liu4, Fan8].

D'autres **T**-martingales ont été considérées par J.-P. Kahane et A.-H. Fan dans leur travaux sur le chaos multiplicatif [K2, K4, Fan1, Fan2, Fan5].

Un modèle de $[0,1]$ -martingales, dites cascades de Poisson composées, a été considéré récemment de façon indépendante dans [M6], afin de parer au défaut des cascades canoniques de dépendre d'une grille, et dans [Fan7] afin d'étudier les ensembles F_β associés à l'exemple D de la Section 0.2.1. Des propriétés fines de ces martingales ont été dégagées dans [16] et [8], et ce travail a permis d'établir des liens entre ces martingales et les cascades canoniques. D'autre part [M6] proposait des constructions plus générales que celle étudiée dans [16], pour lesquelles il existe des contreparties très proches des cascades canoniques. En outre, les mesures construites dans [M6, 16] ont été généralisées par les $[0,1]$ -martingales log-infiniment divisible considérées dans [BaMu]. Ces martingales ont beaucoup à voir avec celle construites dans [Fan2]. Il nous a semblé concevable de trouver un cadre abstrait qui ferait apparaître toutes ces martingales comme des exemples illustrant une sous-classe de $[0,1]$ -martingales, pour laquelle on peut établir de façon générale des propriétés fines. Ceci a été fait dans [17, 18, 9].

Présentons maintenant cette classe de martingales.

La classe $\mathcal{M}$. Nous décidons de travailler avec $\mathbf{T} = [0,1]$, mais notre propos s'étend assez simplement en dimension supérieure à un, pour des $[0,1]^d$ -martingales.

On dira que la $[0,1]$ -martingale $\{Q_\varepsilon\}$ ou $\{Q_\varepsilon \cdot \sigma\}$ appartient à la classe $\mathcal{M}$ si, en plus de **(P1)**, les propriétés suivantes **(P2)** à **(P4)** sont vérifiées:

(P2) La famille $\{Q_\varepsilon\}$ possède une factorisation

$$Q_{\varepsilon'} = Q_\varepsilon Q_{\varepsilon, \varepsilon'} \quad (0 < \varepsilon' \leq \varepsilon \leq 1),$$

avec $Q_{\varepsilon, \varepsilon} = 1$, où $Q_{\varepsilon, \varepsilon'} : ([0,1] \times \Omega, \mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon \leq 1$, est une famille de fonctions mesurables.

Pour tout $\varepsilon \in (0,1]$ et tout sous-intervalle I de $[0,1]$, soit $\overline{\mathcal{F}}_\varepsilon^I$ la tribu engendrée dans $\mathcal{B}$ par les familles de variables aléatoires $\{Q_{\varepsilon, \lambda}(t, \cdot)\}_{t \in I, \lambda \in (0, \varepsilon)}$. La tribu $\overline{\mathcal{F}}_\varepsilon^{[0,1]}$ est simplement notée $\overline{\mathcal{F}}_\varepsilon$.

(P3) Pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$, $\mathcal{F}_\varepsilon$ et $\overline{\mathcal{F}}_\varepsilon$ sont indépendantes.

(P4) Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0,1]$ et toute famille $\mathcal{G}$ d'intervalles non triviaux de $[0,1]$ et de même longueur ε satisfaisant la propriété de séparation $d(I, J) \geq \beta\varepsilon$ si $I \neq J \in \mathcal{G}$, les tribus $\overline{\mathcal{F}}_\varepsilon^I$, $I \in \mathcal{G}$, sont mutuellement indépendantes ($d(I, J) = \inf \{|t - s| : t \in I, s \in J\}$).

Nous aurons aussi parfois besoin de l'hypothèse d'invariance en loi par translation:

(P5) La loi de $Q_\varepsilon(t, \cdot)$ ne dépend pas de t .

Deux exemples fondamentaux appartenant à $\mathcal{M}$.

Pour $t \in [0,1]$, on note $\mathcal{C}_\varepsilon(t)$ le cône tronqué $\{(s, \lambda) \in \mathbb{R} \times [0,1] : \varepsilon \leq \lambda < 1, t - \frac{\lambda}{2} < s \leq t + \frac{\lambda}{2}\}$.

Cascades canoniques non nécessairement auto-similaires:

Soit b un entier ≥ 2 et $(W_{t_1 \dots t_k})_{\substack{k \geq 1 \\ 0 \leq t_1, \dots, t_k \leq b-1}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes (non nécessairement de même loi), toutes d'espérance 1 .
 Soit $S^C = \left\{ \left(\frac{b^{-n}}{2} + \sum_{k=1}^n t_k b^{-k}, b^{-n} \right) : n \geq 1, 0 \leq t_1, \dots, t_n \leq b-1 \right\}$. Si $M \in S^C$ et si M s'écrit $M = \left(\frac{b^{-n}}{2} + \sum_{k=1}^n t_k b^{-k}, b^{-n} \right)$, on note W_M la variable $W_{t_1 \dots t_k}$.
 On obtient alors la $[0,1]$ -martingale (avec $\beta = 1$)

$$Q_\varepsilon^C(t) = \prod_{M \in S^C \cap \mathcal{C}_\varepsilon(t)} W_M. \quad (2.1)$$

Cascades de Poisson composées:

Soit Λ une mesure de Borel positive et localement finie sur $\mathbb{R} \times (0,1]$.

Soit $\{B_k\}_{k \geq 1}$ une partition de $\mathbb{R} \times (0,1]$ en ensembles boréliens de Λ -mesure strictement positive et finie.

Soient $\Lambda|_{B_k}$ la restriction de Λ à $\mathcal{B}(B_k)$ et $(M_{k,n})_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans B_k et de loi $\frac{\Lambda|_{B_k}}{\Lambda(B_k)}$. Soit aussi N_k une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\Lambda(B_k)$.

On suppose que les $M_{k,n}$ et les N_k sont mutuellement indépendantes. L'ensemble aléatoire $S^P = \{M_{k,n}; 1 \leq k, 1 \leq n \leq N_k\}$ est un processus ponctuel de Poisson d'intensité Λ .

Soient maintenant W une variable aléatoire positive d'espérance finie, et $(W_{k,n})_{n \geq 1}$ une suite de copies de W indépendantes.

On suppose que les tribus définissant S^P et les copies de W sont indépendantes. Alors, pour $M = M_{k,n} \in S^P$, on pose $W_M = W_{k,n}$.

On obtient alors la $[0,1]$ -martingale (avec $\beta = 1$)

$$Q_\varepsilon^P(t) = \exp \left(- \Lambda(C_\varepsilon(t)) (\mathbb{E}(W) - 1) \right) \prod_{M \in S^P \cap \mathcal{C}_\varepsilon(t)} W_M. \quad (2.2)$$

Remarque 2 Ces deux martingales ont en quelque sorte des structure duales. Dans Q^C , la struture de l'ensemble S^C est figée et la richesse de la structure provient de la possibilité de faire varier les lois des $W_{t_1 \dots t_k}$. Dans Q^P , si la loi de W est fixée, la struture varie avec la distribution de la loi Λ de S^P . On trouve d'autres exemples dans [17] et [18].

Notons également que si les constructions de Q_ε^C et Q_ε^P sont supposées faites indépendamment, le produit $Q_\varepsilon^P Q_\varepsilon^C$ est encore un élément de $\mathcal{M}$.

La section qui suit traite spécifiquement des éléments d'une sous-classe $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ possédant une propriété d'auto-similarité. Le cas général est abordé dans la section suivante. La troisième section est consacrée à la résolution d'une question liée aux recouvrement de Dvoretzky pour le cercle et à sa transposition en terme de recouvrement poissonnien sur la droite. Une dernière section traite d'une classe de $[0,1]$ -martingales pour laquelle **(P4)** est violée, et cette classe est mise en contraste avec $\mathcal{M}'$.

On utilisera les notations de la Section 0.4 et du Chapitre 1.

2.1 Non-dégénérescence, moments, et analyse multifractale pour des $[0,1]$ -martingales statistiquement auto-similaires dans $\mathcal{M}$

On montre dans [16] qu'en consentant certains efforts il est possible d'utiliser pour l'étude des cascades de Poisson composées dans le cas auto-similaire en loi les arguments développés pour celle des cascades canoniques auto-similaires en loi (en particulier dans [KP] et [5]). Le point important est de relier l'équation fonctionnelle (2.4) dans le cadre poissonnien à celle, plus simple, correspondant à la cascade sur l'arbre homogène (voir aussi les équations (6.1) et (6.2) dans [18]). Ces équations sont importantes car elles sont l'expression analytique exploitable de l'auto-similarité. Finalement, l'équation fonctionnelle satisfaite par les cascades de Poisson composées et l'approche développée dans [16] sont assez générales pour qu'on en tire des résultats de non-dégénérescence, de finitude des moments et d'analyse multifractale pour une sous-classe de $\mathcal{M}$.

Nous désignons par $\mathcal{M}'$ le sous ensemble de $\mathcal{M}$ constitué des $[0,1]$ -martingales Q_ε telles que (P5) est vraie, ainsi que la propriété d'auto-similarité en loi suivante:

(P6) Il existe un entier $b \geq 2$ tel que pour tout $w \in A^*$ les processus stochastiques $(Q_\varepsilon(t))_{t \in [0,1], \varepsilon \in (0,1]}$ et $(Q_{b^{-|w|}, b^{-|w|}\varepsilon}(f_w(t)))_{t \in [0,1], \varepsilon \in (0,1]}$ ont la même loi, où f_w est l'application affine croissante envoyant $[0,1]$ sur I_w .

Exemples. La classe $\mathcal{M}'$ est illustrée par Q^C dans le cas où les $W_{t_1 \dots t_k}$ ont tous la même loi, et par Q^P dans les cas suivants: $\Lambda(dtd\lambda) = \rho \frac{dtd\lambda}{\lambda^2}$ et $\Lambda = \ell \otimes \sum_{n \geq 1} \rho \log(b) b^n \delta_{b^{-n}}$ ($\rho > 0$). D'autres exemples sont donnés dans la Sections 6 de [18] (voir aussi [BaMu]).

Nous allons nous concentrer sur les propriétés de la martingale à valeurs mesure $Q_\varepsilon \cdot \sigma$ dans le cas où $\sigma = \ell$.

Donc, nous fixons $\{Q_\varepsilon\} \in \mathcal{M}'$. Nous rappelons que μ_ε désigne $Q_\varepsilon \cdot \ell$ et μ désigne $Q \cdot \ell$. Aussi, nous définissons sur $\mathbb{R}$ la fonction concave

$$\begin{aligned} \varphi(q) &= -1 + q - \log_b \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{Q_{b^{-1}}(t) > 0\}} Q_{b^{-1}}(t)^q \right) \\ &= -1 + q - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(1/\varepsilon)} \log \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{Q_\varepsilon(t) > 0\}} Q_\varepsilon(t)^q \right) \end{aligned}$$

avec la convention $0 \times \infty = 0$ (la seconde égalité provient de (P2), (P3), (P5) et (P6)).

Nos résultats font appel à certaines des conditions suivantes qui ont pu être extraites de l'étude des cascades de Poisson composées [16].

Soit $t \in [0,1)$, et pour tout $n \geq 0$ soit I_n un sous-intervalle b -adique de $[0,1]$ de la n ième génération.

$$(C_1) \mathbb{E} \left(\sup_{s \in I_n} Q_{b^{-n}}(s) \right) = \psi(n), \text{ où } \psi(n) = o(n);$$

$$(C_2(q)) \quad q \in \mathbb{R}_+ \text{ et}$$

$$\mathbb{E} \left(\sup_{s \in I_n} Q_{b^{-n}}(s)^q \right) \leq e^{\psi_q(n)} \mathbb{E} (Q_{b^{-n}}(t)^q),$$

où $\psi_q(n) = o(n)$;

(**C₃(q)**) $q \in \mathbb{R}_+$ et

$$\mathbb{E} \left(\inf_{s \in I_n} Q_{b^{-n}}(s)^q \right) \geq e^{-\psi_q(n)} \mathbb{E} (Q_{b^{-n}}(t)^q),$$

où $\psi_q(n) = o(n)$;

(**C'₃(q)**) $q \in \mathbb{R}_+$, et il existe une variable aléatoire Q_n et un processus stochastique $t \in I_n \mapsto \overline{Q}_n(t)$ tels que $Q_{b^{-n}}(t) = Q_n \overline{Q}_n(t)$ pour tout $t \in I_n$, Q_n et $\overline{Q}_n$ sont indépendants, et il existe une fonction $\psi_q(n) = o(n)$ telle que pour tout $t \in I_n$

$$\mathbb{E} (Q_n^q) \mathbb{E} (\overline{Q}_n(t))^q \geq e^{-\psi_q(n)} \mathbb{E} (Q_{b^{-n}}(t)^q);$$

(**C₄(q)**) $Q_{b^{-1}} > 0$, $q < 0$, et il existe $n \geq 1$ tel que

$$\mathbb{E} \left(\left(\inf_{s \in I_n} Q_{b^{-n}}(s) \right)^q \right) < +\infty.$$

Dans le langage des dynamiciens, ces conditions expriment une propriété de distorsions bornées en moyenne.

2.1.1 Propriété d'auto-similarité en loi pour μ quand $\{Q_\varepsilon\} \in \mathcal{M}'$.

Pour $w \in A^*$, la restriction de $\mu_{b^{-|w|}\varepsilon}$ à I_w s'écrit

$$d\mu_{b^{-|w|}\varepsilon} = Q_{b^{-|w|}}(t) \cdot d\mu_\varepsilon^{I_w},$$

où $\mu_\varepsilon^{I_w}$ est la mesure sur I_w dont la densité par rapport à ℓ est

$$\frac{d\mu_\varepsilon^{I_w}}{d\ell}(t) = Q_{b^{-|w|}, b^{-|w|}\varepsilon}(t)$$

(voir **(P2)** pour la définition de $Q_{\varepsilon, \varepsilon'}$).

D'après **(P1)** et **(P6)**, pour tout $w \in A^*$ la famille $(Q_\varepsilon^w(t, \omega) = Q_{b^{-|w|}, b^{-|w|}\varepsilon}(f_w(t), \omega))$, $0 < \varepsilon \leq 1$, doit satisfaire **(P1)**. Et donc presque sûrement, pour tout $w \in A^*$, $\mu_\varepsilon^{I_w}$ converge faiblement, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, vers une mesure μ^{I_w} . Bien sûr, on a $\mu^{I_\epsilon} = \mu$.

Les propriétés **(P3)** et **(P6)** imposent immédiatement les propriétés suivantes.

Proposition 2.1.1 (auto-similarité en loi) *Soit $w \in A^*$. Avec probabilité 1, pour tout $\varepsilon \in (0, b^{-|w|}]$,*

$$\mu_\varepsilon(I_w) = \int_{I_w} Q_{b^{-|w|}}(t) d\mu_{b^{-|w|}\varepsilon}^{I_w}(t),$$

où $t \mapsto Q_{b^{-|w|}}(t)$ est indépendant des $\mu_\varepsilon^{I_w}$. De plus, pour tout $f \in C(I_w)$:

1. $\int_{I_w} f(t) \mu_\varepsilon^{I_w}(dt) \stackrel{d}{=} |I_w| \int_{[0,1]} f \circ f_w(t) \mu_\varepsilon(dt)$ pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$. En particulier, $\|\mu_\varepsilon^{I_w}\| \stackrel{d}{=} |I_w| \|\mu_\varepsilon\|$.
2. $\int_{I_w} f(t) \mu^{I_w}(dt) \stackrel{d}{=} |I_w| \int_{[0,1]} f \circ f_w(t) \mu(dt)$. En particulier, $\|\mu^{I_w}\| \stackrel{d}{=} |I_w| \|\mu\|$.

On a également les relations suivantes, précieuses pour tous les résultats qui suivent: pour tout $n > m \geq 1$

$$\mu_{b^{-n}}([0,1]) = \sum_{w \in A^m} \mu_{b^{-n}}(I_w) = \sum_{w \in A^m} \int_{I_w} Q_{b^{-m}}(t) \mu_{b^{m-n}}^{I_w}(dt). \quad (2.3)$$

Si de plus, avec probabilité 1, les éventuelles discontinuités de $t \mapsto Q_{b^{-m}}(t)$ sont des sauts,

$$\mu(I_w) = \int_{I_w} Q_{b^{-m}}(t) \mu^{I_w}(dt) \quad \forall w \in A_m \quad (2.4)$$

(voir la Section 4 de [18] pour plus de détails).

2.1.2 Non dégénérescence et moments dans $\mathcal{M}'$

Les résultats suivants sont obtenus dans la Section 5 de [18].

Théorème 2.1.1 (Non dégénérescence)

1. Supposons $(\mathbf{C}_1)$ vérifiée. Si $\varphi'(1^-) > 0$ alors la martingale $\mu_\varepsilon([0,1])$ converge vers $\mu([0,1])$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, presque sûrement et en norme L^1 . En particulier μ n'est pas dégénérée. De plus, si la fonction Q_ε est presque sûrement strictement positive, $\mathbb{P}(\mu \neq 0) = 1$.
2. Supposons l'existence d'un $h < 1$ tel que $(\mathbf{C}_2(\mathbf{h}))$ soit vérifiée. Si μ est non dégénérée on a $\varphi'(1^-) \geq 0$. De plus ceci est vrai même si $(\mathbf{P4})$ n'est pas satisfaite.

Théorème 2.1.2 (Moments d'ordres > 1) Soit $h > 1$.

1. Supposons $\varphi(h) > 0$. Si $h \in (1,2]$, ou si $(\mathbf{C}_2(\mathbf{q}))$ est vérifiée pour tout $q \in \{h\} \cup (2,h) \cap \mathbb{N}$, alors $0 < \mathbb{E}(\mu([0,1])^h) < +\infty$.
2. Supposons que $0 < \mathbb{E}(\mu([0,1])^h) < +\infty$ et que $(\mathbf{C}_3(\mathbf{h}))$ ou $(\mathbf{C}'_3(\mathbf{h}))$ soit vérifiée. Alors $\varphi(h) \geq 0$. De plus ceci est vrai même si $(\mathbf{P4})$ n'est pas satisfaite.

Théorème 2.1.3 (Moments d'ordres négatifs) Soit $q < 0$. Supposons μ non dégénérée. Supposons aussi que $\varphi(q) > -\infty$ et que $(\mathbf{C}_4(\mathbf{q}))$ soit vérifiée. Alors $\mathbb{E}(\mu([0,1])^q) < +\infty$.

Commentaires.

Ces résultats généraux ont un prix. En effet, s'ils sont presque optimaux, ils ne redonnent pas toute l'information que l'on peut obtenir en exploitant les spécificités de chaque construction particulière.

C'est particulièrement patant pour les moments d'ordres négatifs. Le Théorème 2.1.3 donne une condition suffisante générale pour l'existence d'un moment d'ordre négatif donné. Il se trouve que pour $q < 0$, la condition $\varphi(q) > -\infty$ est nécessaire et suffisante à la finitude de $\mathbb{E}(\mu([0,1])^q)$ dans le cas des cascades de Poisson composées strictement positives [16]. Mais elle ne l'est pas dans le cas des cascades canoniques. En effet, dans ce cas, si $\mathbb{E}(\mu([0,1])^q) < +\infty$, alors $\varphi(q') > -\infty$ pour tout $q' \in (\frac{q}{b}, 0]$; réciproquement, si $q < 0$ et $\varphi(q) > -\infty$, alors $\mathbb{E}(\mu([0,1])^{qb}) < +\infty$ [K6, Mol, 4]. Etant donnée la définition de $\mathcal{M}'$ un résultat général ne peut pas capturer de condition nécessaire pour la finitude des moments d'ordre négatifs.

Pour la non-dégénérescence, [KP] obtient la condition nécessaire et suffisante (CNS) $\varphi'(1^-) > 0$ pour les cascades canoniques, et [16] obtient le même résultat pour les cascades de Poisson composées sous l'hypothèse additionnelle $\mathbb{E}(\log^2(W)(1+W)) < \infty$. Ce résultat est étendu à d'autres exemples dans [18, 9].

Pour les moments d'ordres positifs, [KP] obtient la condition nécessaire et suffisante $\varphi(h) > 0$ pour la finitude du moment d'ordre h de $\mu([0,1])$ en cas de non dégenérescence. Le Théorème 2.1.2 s'applique aux exemples considérés dans [18, 9], et aussi aux $[0,1]$ -martingales log-infiniment divisibles de [BaMu].

Le fait que les points 2. des Théorèmes 2.1.1 et 2.1.2 soient vrais indépendamment de **(P4)** découle des démonstrations de ces assertions données dans [9]. C'est un point nouveau qui permet de lier les conditions suffisantes de dégenérescence mises en évidence pour les éléments de $\mathcal{M}'$ et ceux de la classe décrite dans la Section 2.4. L'assertion 2. du Théorème 2.1.1 est de nature voisine du Théorème 3 de [K4] qui donne une condition suffisante de dégenérescence pour une **T**-martingale.

2.1.3 Analyse multifractale dans $\mathcal{M}'$

Nous utilisons les notations et les notions introduites dans la Section 1 consacrée aux formalismes multifractals pour les mesures. Nous supposons que Q_{b-1} est strictement positif avec probabilité 1. La mesure μ l'est donc aussi d'après le Théorème 2.1.1.

Nous énonçons le théorème 5.12 obtenu dans [18, 9]. Ce théorème résulte de la connaissance des cascades canoniques et de Poisson composées acquise dans [5] et [16], ainsi que du travail de comparaisons des deux principaux formalismes multifractals pour les mesures dans [10] (voir Chapitre 1).

Nous devons encore introduire quelques conditions et notations.

Soient J l'intervalle $\{q \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(\|\mu\|^q) < \infty\}$ et $\mathcal{J}$ l'intérieur de l'intervalle $\{q \in \mathbb{R} : \varphi(q) > -\infty, \varphi'(q)q - \varphi(q) > 0\}$. Notons que si $\varphi > -\infty$ dans un voisinage de $[0,1]$, alors $\mathcal{J}$ contient un voisinage de $[0,1]$.

Remarque 3 Si la condition **(C₂(q))** est satisfaite pour tous les $q \in \mathcal{J} \cap (2, \infty)$, alors $\mathcal{J} \cap \mathbb{R}_+ \subset J$. C'est une conséquence du Théorème 2.1.2 et de ce que la condition $\varphi'(q)q - \varphi(q) > 0$ implique $\varphi(q) > 0$ pour $q > 1$. Si $Q_{b-1} > 0$ et si **(C₄(q))** est vérifiée pour tout $q \in \mathcal{J} \cap \mathbb{R}_-$, alors $\mathcal{J} \cap \mathbb{R}_- \subset J$. C'est une conséquence du Théorème 2.1.3.

Les propriétés suivantes sont requises pour énoncer notre résultat. Nous les désignons par la condition **(C)**

(C)(1) La condition **(C₂(q))** est satisfaite pour tous les $q \in \mathcal{J} \setminus [1,2]$, et la condition **(C₄(q))** l'est pour tous les $q \in \mathcal{J} \cap \mathbb{R}_-$.

(C)(2) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-intervalle compact K de $\mathcal{J} \cap \mathbb{R}_-^*$ (resp. $\mathcal{J} \cap \mathbb{R}_+$), si $\eta > 0$ est suffisamment petit alors

(i) pour tout $n \geq 1$ et toute paire $(v,w) \in (A^n)^2$ vérifiant $\delta(v,w) \leq b' = 3$ (resp. $b' = 4b + 2$) il existe une variable aléatoire $M_{v,w}(\eta)$ telle que pour tout $q \in K$

$$\left(\sup_{t \in I_w} Q_{b^{-n}}(t)^{(1+\eta)q} \right) \left(\sup_{t \in I_v} Q_{b^{-n}}(t)^{-\eta q} \right) \leq M_{v,w}(\eta) Q_{b^{-n}}(t_w)^{(1+\eta)q} Q_{b^{-n}}(t_v)^{-\eta q} \quad (2.5)$$

et ou bien (α) $M_{v,w}(\eta)$ est indépendante de $(Q_{b^{-n}}(t_w)Q_{b^{-n}}(t_v))$ et $\mathbb{E}(M_{v,w}(\eta)) = \exp(o(n))$, ou bien (β) $\mathbb{E}(M_{v,w}(\eta)^h) = \exp(o(n))$ pour tout $h > 1$. De plus $o(n)$ est uniforme sur les couples (v,w) .

(ii) Dans tout voisinage de 1^+ il existe h' tel que pour tout $q \in K$

$$\sum_{\substack{v,w \in A^n \\ 0 < \delta(v,w) \leq b'}} \left(\mathbb{E} \left(Q_{b^{-n}}(t_w)^{(1+\eta)qh'} Q_{b^{-n}}(t_v)^{-\eta qh'} \right) \right)^{1/h'} = O \left(b^{-n(\varphi(q)-q-\eta\varepsilon/4)} \right), \quad (2.6)$$

le O étant uniforme sur les $n \geq 1$ et les $q \in K$. De plus,

$$\sup_{\substack{q \in K, k \geq 1 \\ v,w \in A^n, 0 < \delta(v,w) \leq b'}} \frac{\mathbb{E} \left(\left| \frac{dQ_{b^{-k},b^{-k-1}}(t_w)^{(1+\eta)q} Q_{b^{-k},b^{-k-1}}(t_v)^{-\eta q}}{dq} \right|^{h'} \right)}{\mathbb{E} \left(Q_{b^{-k},b^{-k-1}}(t_w)^{(1+\eta)qh'} Q_{b^{-k},b^{-k-1}}(t_v)^{-\eta qh'} \right)} < \infty. \quad (2.7)$$

Soient $\alpha_{\min} = \inf \varphi'(\mathcal{J})$ et $\alpha_{\max} = \sup \varphi'(\mathcal{J})$.

Théorème 2.1.4 *Supposons $\varphi > -\infty$ sur un voisinage de $[0,1]$ et **(C)** vérifiée. Avec probabilité 1:*

1. $\tau_\mu(q) = b_\mu(q) = B_\mu(q) = \Lambda_\mu(q) = -\varphi(q)$ pour tout $q \in \mathcal{J}$.
2. Pour tout $q \in \mathcal{J}$, les deux formalismes multifractals sont valides en $\varphi'(q)$.
3. On a $0 < \alpha_{\min} \leq \alpha_{\max} < \infty$. Si $(-\varphi)^*(\alpha_{\min})$ (resp. $(-\varphi)^*(\alpha_{\max})$) = 0, alors $S_\mu(\alpha) = \emptyset$ pour tout $\alpha \in (0, \alpha_{\min})$ (resp. $(\alpha_{\max}, \infty)$) et $S \in \{\bar{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{E}}, E\}$.

Commentaires.

(1) Les propriétés (2.5) et (2.6) sont des formes de distorsions bornées comme en expriment les conditions **(C₁)**, et **(C₂(q))** à **(C₄(q))**. La condition **(C)** est vérifiée par les exemples de la Section 6 de [18], parfois sous des hypothèses restrictives. Encore une fois, c'est le prix d'un peu plus de généralité. Ces hypothèses permettent d'appliquer le Théorème 1.3.1 aux éléments de $\mathcal{M}'$. Elles peuvent être affaiblies en exploitant les spécificités des constructions particulières (voir la Section 6 de [18]).

Par construction on a $\varphi > -\infty$ sur $[0,1]$. On demande que cela soit vrai au voisinage de 0^- pour assurer l'existence de moments d'ordre négatifs finis à $\|\mu\|$, nécessaire à notre étude. On demande que cela soit aussi vrai au voisinage de 1^+ afin de pouvoir montrer que μ est portée par $\mathcal{E}_{\varphi'(1)}$.

(2) Outre le fait que le Théorème 2.1.4 s'adresse à une classe abstraite de martingales, il comporte les points de satisfaction suivants. D'une part, le résultat prend en compte les deux principaux formalismes multifractals pour les mesures. D'autre part, ce résultat est valide

presque sûrement pour toutes les valeurs de $q \in \mathcal{J}$ simultanément, et non pas pour chaque $q \in \mathcal{J}$ presque sûrement. Le point 2. a d'abord été établi pour les cascades canoniques: dans [5] pour $S \in \{\bar{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{E}}, \mathcal{E}\}$, puis dans [10] pour tout $S \in \{\bar{E}, \underline{E}, E\}$. Il l'a été ensuite dans [16] pour les cascades de Poisson composées. Ces résultats améliorent les énoncés “faibles” obtenus dans [HoWa, K6, Fal1, O2, Mol, ArPa, 4] à propos de cascades de type canoniques, en ce sens que ces derniers assument souvent des hypothèses restrictives, et qu'ils ne concluent que pour chaque $q \in \mathcal{J}$ presque sûrement.

(3) Donnons une idée de la façon dont on procède pour obtenir le point 2. du théorème. La partie difficile réside dans la minoration de la dimension de ces ensembles. La majoration des dimensions par $(-\varphi)^*(\varphi'(q))$ résulte des formalismes multifractals (Chapitre 1) et de l'estimation de τ_μ obtenue dans la Proposition 5.1 de [9].

Pour minorer les dimensions, on introduit les $[0,1]$ -martingales $\{Q_{q,\varepsilon}\}$ obtenues à partir de $\{Q_\varepsilon\}$ en posant $\{Q_{q,\varepsilon}\} = \left\{ \frac{Q_\varepsilon^q}{\mathbb{E}(Q_\varepsilon^q)} \right\}$, où $\mathbb{E}(Q_\varepsilon^q)$ désigne $\mathbb{E}(Q_\varepsilon^q(t))$, qui ne dépend pas de t . Le fait que chacune des martingales $Q_{q,\varepsilon} \cdot \ell$ considérée individuellement ne dégénère pas presque sûrement est une conséquence du Théorème 2.1.1 puisque la condition $(-\varphi)^*(\varphi'(q)) > 0$ est équivalente à la condition $\varphi'(1) > 0$ si Q est remplacé par Q_q .

Nous verrons dans les Sections 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3 qu'avec probabilité 1, toutes les martingales $Q_{q,\varepsilon} \cdot \ell$, $q \in \mathcal{J}$, convergent simultanément vers une limite non dégénérée $\mu_q := Q_q \cdot \ell$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. C'est un point essentiel pour obtenir 2.

Ensuite, il s'agit de montrer qu'avec probabilité 1, pour chaque $q \in \mathcal{J}$ la mesure μ_q est concentrée sur $E_\mu(\varphi'(q)) \cap \mathcal{E}_\mu(\varphi'(q))$.

Désignons indifféremment par $X_n(t)$ les fonctions $\mu(I_n(t))$ et $\mu(B(t, b^{-n}))$.

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on exhibe une majoration $f_n(q)$ de la μ_q -mesure de l'ensemble $[0,1] \setminus \left\{ t \in (0,1) : b^{-n(\varphi'(q)+\varepsilon)} \leq X_n(t) \leq b^{-n(\varphi'(q)-\varepsilon)} \right\}$. La fonction aléatoire $f_n(q)$ s'obtient en appliquant deux inégalités de Markov qui donnent une majoration de la μ_q -mesure de chacun des ensembles $\left\{ b^{-n(\varphi'(q)+\varepsilon)} X_n^{-1}(t) \geq 1 \right\}$ et $\left\{ b^{-n(\varphi'(q)-\varepsilon)} X_n(t) \geq 1 \right\}$.

Si l'on montre qu'avec probabilité 1, on a $\sum_{n \geq 1} f_n(q) < \infty$, le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure. Les fonctions f_n sont telles que l'on a $\sum_{n \geq 1} \sup_{q \in K} \mathbb{E}(f_n(q)) < \infty$ pour tout compact K inclus dans $\mathcal{J}$. Ceci combiné au Théorème de Fubini est suffisant pour obtenir qu'avec probabilité 1, pour Lebesgue presque tout $q \in \mathcal{J}$, la mesure μ_q est concentrée sur $E_\mu(\varphi'(q)) \cap \mathcal{E}_\mu(\varphi'(q))$. Pour obtenir le résultat souhaité, on montre la propriété plus forte des $f_n(q)$ suivante: ces fonctions sont continûment dérivables, et on a $\sum_{n \geq 1} \sup_{q \in K} \mathbb{E}(|f'_n|(q)) < \infty$ pour tout compact K inclus dans $\mathcal{J}$. On en déduit que $\mathbb{E} \left(\sum_{n \geq 1} \sup_{q \in K} f_n(q) \right) < \infty$, et donc qu'avec probabilité 1, pour tout $q \in \mathcal{J}$, la mesure μ_q est concentrée sur $E_\mu(\varphi'(q)) \cap \mathcal{E}_\mu(\varphi'(q))$.

La minoration de la dimension de Hausdorff de $\mathcal{E}_\mu(\varphi'(q))$ est alors une conséquence de la minoration des dimensions des mesures μ_q à la Section 2.2.3, qui utilise la même technique d'estimation que celle décrite précédemment.

2.1.4 Remarque sur le remplacement de ℓ par une mesure quasi-Bernoulli σ

L'action d'un élément $\{Q_\varepsilon\}$ de $\mathcal{M}'$ sur la mesure de Lebesgue crée une limite $Q \cdot \ell$ statistiquement auto-similaire en loi en vertu des propriétés de $\{Q_\varepsilon\}$, mais aussi parce que ℓ est

auto-similaire. Il est intéressant d'essayer de remplacer ℓ par les éléments d'une classe plus vaste de mesures auto-similaires. Les mesures "quasi-Bernoulli" considérées dans [BrMiP] sont naturellement candidates. Il s'agit de la première classe assez générale de mesures déterministes auto-similaires satisfaisant un formalisme multifractal.

Une mesure quasi-Bernoulli (voir [BrMiP]) sur $[0,1]$ est une mesure de probabilité σ telle que pour une constante $C \geq 1$ on ait

$$C^{-1}\sigma(I_v)\sigma(I_w) \leq \sigma(I_{vw}) \leq C\sigma(I_v)\sigma(I_w) \quad (\forall v, w \in A^*).$$

Les mesures considérées dans les exemples A et B de la Section 0.2.1 sont de ce type. C'est aussi le cas de certaines des mesures de Markov ergodiques considérées dans [Fan8]. Pour ces mesures, l'action de la cascade canonique auto-similaire en loi Q^C est considérée, et des résultats analogues à ceux de [KP] sont obtenus concernant la non-dégénérescence, les moments d'ordres positifs, et la dimension de la mesure limite.

Fixons maintenant une mesure quasi-Bernoulli σ . Nous avons vérifié le fait suivant, que nous énonçons comme conjecture:

Conjecture: Les Théorèmes 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 et 2.1.4 sont encore vrais si l'on remplace ℓ par σ et $\varphi(q)$ par $\varphi(q) - \tau_\sigma(q) + 1 - q$ (Y. Heurteaux a établi dans [H] que τ_σ est dérivable pour une mesure quasi-Bernoulli σ).

Pour obtenir ce résultat, on doit considérer sur chaque I_w les mesures $\mu_\varepsilon^{I_w}$ telles que

$$\frac{d\mu_\varepsilon^{I_w}}{d\sigma}(t) = Q_{b^{-|w|}, b^{-|w|}\varepsilon}(t)$$

et leur limite faible μ^{I_w} . Puis on utilise (2.3) ou (2.4), les techniques utilisées dans [9], et la nouvelle relation d'auto-similarité en loi (pour deux variables aléatoires réelles X et Y , $X \stackrel{d}{\leq} Y$ signifie $\mathbb{P}(X \leq a) \geq \mathbb{P}(Y \leq a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$)

Proposition 2.1.2 *Soit $w \in A^*$. Pour tout $f \in C(I_w)$:*

1. $C^{-1}\sigma(I_w) \int_{[0,1]} f \circ f_w(t) \mu_\varepsilon(dt) \stackrel{d}{\leq} \int_{I_w} f(t) \mu_\varepsilon^{I_w}(dt) \stackrel{d}{\leq} C\sigma(I_w) \int_{[0,1]} f \circ f_w(t) \mu_\varepsilon(dt)$ pour tout $\varepsilon \in (0,1]$. En particulier, $C^{-1}\sigma(I_w) \|\mu_\varepsilon\| \stackrel{d}{\leq} \|\mu_\varepsilon^{I_w}\| \stackrel{d}{\leq} C\sigma(I_w) \|\mu_\varepsilon\|$.
2. $C^{-1}\sigma(I_w) \int_{[0,1]} f \circ f_w(t) \mu(dt) \stackrel{d}{\leq} \int_{I_w} f(t) \mu^{I_w}(dt) \stackrel{d}{\leq} C\sigma(I_w) \int_{[0,1]} f \circ f_w(t) \mu(dt)$. En particulier, $C^{-1}\sigma(I_w) \|\mu\| \stackrel{d}{\leq} \|\mu^{I_w}\| \stackrel{d}{\leq} C\sigma(I_w) \|\mu\|$.

2.1.5 Un substitut à la cascade canonique dans le cas critique de dégénérescence et un complément au Théorème 2.1.4

Le point 3. du Théorème 2.1.4 appelle la question suivante: que dire des ensembles $S_\mu(\alpha_{\min})$ (resp. $S_\mu(\alpha_{\max})$), $S \in \{\bar{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \bar{E}, \underline{E}, E\}$, lorsque $(-\varphi)^*(\alpha_{\min})$ (resp. $(-\varphi)^*(\alpha_{\max})$) = 0?

On sait que ces ensembles sont de dimension au plus 0, mais sont-ils vides?

Nous avons répondu pour les cascades canoniques dans le cas où il existe q au bord de $\mathcal{J}$ tel que $\alpha_{\min}$ (resp. $\alpha_{\max}$) = $\varphi'(q)$, ce qui exprime que les fonctions τ_μ et φ touchent leurs droites

d'appui en q , ou encore que $\frac{\tau_\mu(q)}{q} = \min_{q \in \mathbb{R}_+} \frac{\tau_\mu(q')}{q'}$ si $q > 0$ et $\frac{\tau_\mu(q)}{q} = \max_{q \in \mathbb{R}_-} \frac{\tau_\mu(q')}{q'}$ si $q < 0$ (notons que pour les mesures associées aux exemples A et B de la Section 0.2.1, ce type de situation ne se produit pas).

Si l'on revient au point (3) du commentaire qui suit le Théorème 2.1.4, la situation que nous décrivons correspond au moment critique où la mesure μ_q dégénère car $(-\varphi)^*(\varphi'(q)) = 0$. Il se trouve que sous des hypothèses très peu restrictives, on peut construire une mesure ν_q qui est supportée par l'ensemble $E_{\varphi'(q)}$. La dimension de cette mesure est nécessairement nulle. Elle n'est pas limite d'une martingale de Mandelbrot, mais associée à un autre type de martingale; son analyse multifractale peut également être faite.

Construction et analyse multifractale d'un substitut de la cascade canonique dans le cas critique

Pour comprendre comment obtenir une telle mesure, il faut revenir à la forme prise par (2.4) dans ce cas. Reprenons le point de vue de [Gu]. Notons respectivement $*$ et $\circ$ les opérations de convolutions additives et multiplicatives sur les lois de probabilités sur $\mathbb{R}_+$. Etant donnée une loi de probabilité $\mathcal{W}$ sur $\mathbb{R}_+$, le problème de déterminer quelles sont les lois de probabilités $\mathcal{Y}$ sur $\mathbb{R}_+$ distinctes de δ_0 satisfaisant l'équation

$$\mathcal{Y} = (\mathcal{W} \circ \mathcal{Y})^{*b} \quad (2.8)$$

se pose naturellement à partir de la connaissance des cascades canoniques. En effet, l'équation (2.4) se lit

$$\|\mu\| = \sum_{j=0}^{b-1} W_j \|\mu^{I_j}\|, \quad (2.9)$$

et si $\mathcal{W}$ désigne la loi de W/c , la Proposition 2.1.1 impose que la loi de $\|\mu\|$ satisfasse (2.8). L'existence de solutions non-triviales revient dans ce cas à ce que la cascade soit non-dégénérée. Il se trouve que la connaissance de solutions de cette forme joue un rôle central dans la résolution de (2.8) (voir [DL, Gu]).

On va supposer dans ce qui suit que $\mathbb{P}(W > 0) = 1$. Rappelons que la fonction φ est donnée par $\varphi(q) = -1 + q - \log_b \mathbb{E}(W^q)$. La situation qui nous intéresse est le cas critique de dégénérescence de la cascade canonique, lorsque $\mathbb{E}(W) = 1$ et $\mathbb{E}(W \log(W)) = \log(b)$, c'est à dire que $\varphi(1) = 0 = \varphi'(1^-)$. Il se trouve que dans ce cas, Q. Liu a mis en évidence (voir [Liu3]) une martingale (à valeurs non nécessairement positives) dont la loi de la limite résout (2.8), mais satisfait également une équation telle que l'équation (2.9) de façon presque sûre. La martingale est construite ainsi: pour $n \geq 1$ soit

$$Y_n = - \sum_{t_1 \dots t_n \in A^n} \prod_{j=1}^n \frac{W_{t_1 \dots t_j}}{b} \log \left(\prod_{j=1}^n \frac{W_{t_1 \dots t_j}}{b} \right).$$

L'énoncé suivant est une conséquence des résultats de [DL] et [Liu3].

Théorème 2.1.5 *Supposons qu'il existe $p > 1$ tel que $\varphi(p) > -\infty$, et que $\varphi(1) = 0 = \varphi'(1^-)$.*

Alors, la martingale Y_n converge presque sûrement vers une limite strictement positive Y telle que $\mathbb{E}(Y) = \infty$ et $\mathbb{E}(Y^h) < \infty$ pour tout $h \in (0,1)$.

Sous les hypothèses du résultat précédent, on peut donc définir presque sûrement pour chaque $w \in A^*$ le nombre

$$Y(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} - \sum_{t_1 \dots t_n \in A^n} \prod_{j=1}^n \frac{W_{w \cdot t_1 \dots t_j}}{b} \log \left(\prod_{j=1}^n \frac{W_{w \cdot t_1 \dots t_j}}{b} \right).$$

et les variables aléatoires $Y(w)$ sont des copies de $Y(\epsilon) = Y$. De plus on a la relation

$$Y(w) = \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} W_{w \cdot j} Y(w \cdot j).$$

Ceci permet de définir une mesure $\tilde{\nu}$ sur ∂A^* par $\tilde{\nu}(t_1 \dots t_n \cdot \partial A^*) = Y(t_1 \dots t_n) \prod_{j=1}^n \frac{W_{t_1 \dots t_j}}{b}$.

On peut alors considérer sur $[0,1]$ la mesure $\nu = \tilde{\nu} \circ \pi^{-1}$, image de $\tilde{\nu}$ par l'application $\pi : \tilde{t} = t_1 \dots t_n \dots \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} t_n b^{-n}$. Cette mesure est formellement identique à la mesure limite de la cascade canonique μ , mais la non intégrabilité de Y fait toute la différence, et se reflète dans le fait que ν charge beaucoup certains intervalles, en ce sens qu'elle a un exposant de Hölder ponctuel égal à 0 presque partout par rapport à elle même. Ceci se retrouve également dans le fait que la fonction τ_ν devient nulle au point 1. En revanche, l'analyse des ensembles de niveaux de ν associés à des exposants strictements positifs se fait à l'aide de mesures auxiliaires obtenus comme limites de cascades canoniques, comme pour une cascade canonique non-dégénérée (voir le commentaire (3) de la Section 2.1.3). Finalement, on a le résultat suivant qui combine les Théorèmes 7 et 8 et la Section 6.1 de [5], ainsi que les résultats de [10] et le Théorème 4 de [24]. L'énoncé nécessite de définir $\mathcal{J}$ comme l'union de $\{1\}$ et de l'intérieur de l'intervalle $\{q \in \mathbb{R} : (-\varphi)^*(\varphi'(q)) > 0\}$, et $\alpha_{\max} = \sup\{\varphi'(q) : q \in \mathcal{J}\}$ (ici $\alpha_{\min} = \varphi'(1^-) = 0$).

Théorème 2.1.6 *Supposons qu'il existe $p > 1$ tel que $\varphi(p) > -\infty$, et que $\varphi(1) = 0 = \varphi'(1^-)$. Alors, avec probabilité 1, l'ensemble $E_\nu(0)$ est de ν -mesure pleine. Si de plus $0 \in \mathcal{J}$, alors avec probabilité 1*

1. $\tau_\nu(q) = b_\nu(q) = B_\nu(q) = \Lambda_\nu(q)$ pour tout $q \in \mathcal{J}$. De plus $\tau_\nu = b_\nu = B_\nu = \Lambda_\nu(q) \equiv 0$ sur $[1, \infty)$.
2. Pour tout $q \in \mathcal{J}$, le formalisme multifractal est valide en $\varphi'(q)$.
3. On a $\alpha_{\max} < \infty$. Si $(-\varphi)^*(\alpha_{\max}) = 0$, alors $S_\mu(\alpha) = \emptyset$ pour tout $\alpha \in (\alpha_{\max}, \infty)$ et $S \in \{\bar{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \bar{E}, \underline{E}, E\}$.

Application à l'étude des extrêmités du spectre

Revenons à la question initiale et à un point q du bord de $\mathcal{J}$, que ce soit dans le cas de la cascade canonique μ ou bien de son substitut ν . Si un tel point q existe et est tel que $(-\varphi)^*(\varphi'(q)) = 0$ et $\varphi(qh) > -\infty$ pour un $h > 1$, d'après ce qui précède, on peut considérer la mesure ν_q construite comme ν , mais avec les poids $W_{t_1 \dots t_n}^q / \mathbb{E}(W^q)$.

Le résultat suivant porte sur les ensembles $S \in \{\bar{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{E}}, \bar{E}, \underline{E}, E\}$. Il est prouvé pour $S = \mathcal{E}$ dans [5] (Théorème 8). Il est donc valide aussi pour $S \in \{\bar{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{E}}\}$. Sa validité pour $S \in \{\bar{E}, \underline{E}, E\}$ résulte de calculs analogues à ceux menés dans [10] ou [24].

Théorème 2.1.7 *Supposons $\varphi > -\infty$ sur un voisinage de $[0,1]$. Supposons aussi que $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1) \geq 0$. Désignons par ρ la cascade canonique μ ou son substitut ν selon que $\varphi'(1) > 0$ ou $\varphi'(1) = 0$. Supposons enfin qu'il existe $q \geq 0$ (resp. $q < 0$) tel que $\varphi(qh) > -\infty$ pour un $h > 1$ et $(-\varphi)^*(\varphi'(q)) = 0$. Alors, $\varphi'(q) = \alpha_{\min}$ (resp. $\alpha_{\max}$), et si ν_q désigne la mesure construite comme ν mais avec les poids $W_{t_1 \dots t_n}^q / \mathbb{E}(W^q)$, avec probabilité 1 on a $\nu_q(S_\rho(\varphi'(q))) > 0$ pour $S \in \{\bar{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{E}}, \bar{E}, \underline{E}, E\}$. En particulier $S_\rho(\varphi'(q)) \neq \emptyset$.*

2.1.6 Résultats complémentaires pour les cascades canoniques auto-similaires et certaines de leurs extensions

Analyse multifractale de cascades de Mandelbrot projetées sur des intervalles aléatoires ou des ensembles de Cantors aléatoires. Moments d'ordres négatifs

Dans [4] et [5], nous étudions la classe de mesures un peu plus générale que les cascades canoniques proposées dans [M4]. La construction est semblable, mais on suppose seulement que les vecteurs positifs $(W_{w \cdot 0}, \dots, W_{w \cdot b-1})$, $w \in A^*$, sont mutuellement indépendants et de même loi qu'un vecteur W positif tel que $\mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{b-1} W_i \right) = b$. La cascade canonique devient le cas particulier où les composantes de W sont i.i.d.

Sous l'hypothèse $\mathbb{P} \left(\sum_{i=0}^{b-1} \mathbf{1}_{\{W_i > 0\}} > 1 \right) > 0$, on obtient une mesure limite μ sur $[0,1]$ non dégénérée si et seulement si $\varphi'(1^-) > 0$, où $\varphi(q) = q - \log_b \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{b-1} \mathbf{1}_{\{W_i > 0\}} W_i^q \right)$ ([DL]).

Notre point de vue a en fait plutôt consisté à construire d'abord μ sur ∂A^* , pour pouvoir la projeter non seulement sur la structure homogène des sous-intervalles b -adiques de $[0,1]$, mais aussi sur des structures hétérogènes. Ces objets sont en fait vus comme la réalisation géométrique d'une partie de ∂A^* munie d'une distance ultramétrique construite à partir d'une seconde mesure λ construite sur ∂A^* en même temps que μ , et de la même façon. Pour être précis, on se donne initialement un couple de vecteurs positifs (W, L) et une suite de copies de (W, L) indépendantes $\left((W_{w \cdot 0}, \dots, W_{w \cdot b-1}), (L_{w \cdot 0}, \dots, L_{w \cdot b-1}) \right)_{w \in A^*}$, de sorte que les deux mesures limites μ et λ soient toutes deux non dégénérées. La mesure λ définit une distance ultramétrique d_λ sur son support dans ∂A^* par la relation $d_\lambda(v, w) = \lambda(v \wedge w \cdot \partial A^*)$, où $v \wedge w$ est le plus grand préfixe commun aux mots v et w .

Dans [5] on discute en détail l'analyse multifractale de la restriction de μ au support de λ . Les ensembles de niveaux de μ s'obtiennent en remplaçant $t \in [0,1]$ par $\tilde{t} \in \partial A^*$ et $I_n(t)$ par le cylindre de génération n contenant $\tilde{t}$ dans les définitions de $\underline{\mathcal{E}}_\mu(\alpha)$, $\bar{\mathcal{E}}_\mu(\alpha)$ et $\mathcal{E}_\mu(\alpha)$. Du résultat sur l'arbre équipé d'une distance "multifractale" on déduit un résultat pour la projection de μ sur deux types de réalisations géométriques de l'espace $(\partial A^*, d_\lambda)$: des intervalles aléatoires, et des ensembles de Cantor aléatoires dans $\mathbb{R}^d$. Le travail prend également en compte la situation où μ est remplacée par son substitut dans le cas critique de dégénérescence. Nous renvoyons à [4, 5] pour les détails.

Nous poursuivons la discussion dans le cas où λ est la mesure de Lebesgue, pour aborder la situation où les composantes du vecteurs $(W_{w,0}, \dots, W_{w,b-1})$ peuvent s'annuler.

Soit $\mathcal{J}$ l'intervalle défini comme dans la Section 2.1.3, et soit $J = \{q \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(\|\mu\|^q | \mu \neq 0) < \infty\}$.

Dans la méthode utilisée dans [5] pour faire l'analyse multifractale de μ , on a besoin de savoir que J contient un voisinage de 0 pour minorer des dimensions des ensembles de niveau de la forme $\mathcal{E}_{\varphi'(q)}$ pour $q \in \mathcal{J}$, et plus précisément pour contrôler les moments des fonctions f_n évoqués dans le commentaire (3) de la Section 2.1.3. De plus, on a besoin de savoir que $q \in J$ pour majorer la fonction τ_μ par $-\varphi$ en q , et en déduire la majoration de la dimension de l'ensemble $\mathcal{E}_{\varphi'(q)}$ par $(-\varphi)^*(\varphi'(q))$ quand $q \in \mathcal{J}$. On sait donc montrer que $\dim \mathcal{E}_{\varphi'(q)} = (-\varphi)^*(\varphi'(q))$ pour $q \in \mathcal{J} \cap J$. Nous avons vu à la Section 2.1.3 que dans le cas de la cascade canonique, si les composantes de W sont strictement positives on a $\mathcal{J} \subset J$, et tout va bien. Dans le cas général on a toujours $\mathcal{J} \cap \mathbb{R}_+ \subset J$. Mais l'étude des moments d'ordres négatifs montre que l'on peut avoir $\mathcal{J} \cap \mathbb{R}_- \setminus J \neq \emptyset$. On ne sait plus majorer la dimension dans ce cas.

L'étude de l'existence de moments d'ordres négatifs de $\|\mu\|$ se ramène à celle du comportement de la transformée de Laplace L de la loi de $\|\mu\|$ au voisinage de l'infini, qui se fait en exploitant l'équation

$$L(t) = \mathbb{E} \left(\prod_{i=0}^{b-1} L(W_i(t)) \right). \quad (2.10)$$

Le cas des composantes strictement positives a d'abord été étudié indépendamment dans [K6] (pour le cas canonique), [Mol] et [4]. Dans ce cas [Mol] conclut que si $\varphi(q) > -\infty$ pour un $q < 0$, alors $\mathbb{E}(\|\mu\|^q) < \infty$, tandis que [4] conclut que $\mathbb{E}(\|\mu\|^{q'}) < \infty$ pour tout $q' \in (q, 0)$ (voir aussi le commentaire de la Section 2.1.2 à ce sujet).

Si toutes les composantes de W ne sont pas strictement positives, mais si presque sûrement au moins deux d'entre elles le sont, le Corollaire II. A de [4] montre qu'il existe $\beta \in (0, 1]$ dépendant de la loi de W tel que si $\varphi(q) > -\infty$ pour un $q < 0$, alors $\mathbb{E}(\|\mu\|^{q'}) < \infty$ pour tout $q' \in (\beta q, 0)$. On peut donc encore avoir $\mathbb{R}_- \subset J$ si $\varphi > -\infty$ sur $\mathbb{R}_-$.

En revanche, la Proposition II.B.1. de [4] indique que si avec une probabilité positive il n'y a qu'une coordonnée de W non nulle et qu'elle est strictement inférieure à 1, alors, il existe $\beta < 0$ dépendant de la loi de W tel que $J \cap (-\infty, \beta) = \emptyset$. Dans ce cas, on donne des conditions suffisantes sur la loi de W pour que J contienne un voisinage de 0. Des résultats préliminaires sont aussi démontrés dans [1] pour la généralisation correspondant aux martingales construites de façon analogue sur un arbre de Galton-Watson. Dans ce contexte général, Q. Liu a complètement élucidé la question des moments d'ordres négatifs dans [Liu4].

Dans la situation qui nous concerne ici, le résultat prend la forme suivante: on définit d'abord $N(\omega)$ le nombre (aléatoire) de composantes de $W(\omega)$ qui sont non nulles. Si $N \geq 1$, on définit $A_1, \dots, A_N$ les coordonnées non nulles de W par ordre chronologique d'apparition. On remarque ensuite que la transformée de Laplace $\mathcal{L}$ de la loi de $\|\mu\|$ conditionnellement à ce qu'elle ne s'annule pas vérifie l'équation

$$\mathcal{L}(t) = \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^N \mathcal{L}(A_j(t)) \right),$$

où l'on travaille à partir de maintenant conditionnellement à $N(\omega) > 0$. Notons Y une variable aléatoire ayant pour loi celle de $\|\mu\|$ conditionnellement à $\|\mu\| > 0$. Q. Liu a obtenu le

Théorème 2.1.8 *Soit $q < 0$. Si $\mathbb{E}(A_1^q) < \infty$ et $\mathbb{E}(A_1^q \mathbf{1}_{\{N=1\}}) < 1$, alors on a $\mathbb{E}(Y^{q'}) < \infty$ pour tout $q' \in (q, 0)$. Si de plus $\underline{m} = \text{essinf } N > 1$ et $\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^m A_j^q\right) < \infty$, alors $\mathbb{E}(Y^{\underline{m}q'}) < \infty$ pour tout $q' \in (q, 0)$.*

Réciproquement, si $\mathbb{E}(Y^q) < \infty$ alors $\mathbb{E}(A_1^q \mathbf{1}_{\{N=1\}}) < 1$ et $\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^m A_j^q \mathbf{1}_{\{N=\underline{m}\}}\right) < \infty$.

Terminons avec le cas *microcanonique* ([M4]), où $\sum_{i=0}^{b-1} W_i = 1$ presque sûrement, pour lequel la question des moments ne se pose pas. On peut alors s'affranchir de l'hypothèse de finitude de $\varphi(q) > -\infty$ dans un voisinage de 0. Dans ce cas, on peut même avoir $\varphi'(0^+) = +\infty$, et alors $\alpha_{\text{sup}} = +\infty$. Le spectre multifractal est alors une fonction croissante et l'exposant le plus sûr est $+\infty$, qui reflète la grande probabilité que les W_i approchent 0, conditionnellement au fait qu'ils ne sont pas nuls.

Une variante de la construction des cascades canoniques

Dans [P3], J. Peyrière considère la suite de mesures aléatoires ρ_n construites de la façon suivante: on se donne une suite $(L_0^{(n)}, L_1^{(n)})$ de vecteurs strictement positifs aléatoires i.i.d. tels que presque sûrement $L_0^{(n)} + L_1^{(n)} = 1$. La mesure ρ_1 s'obtient en répartissant uniformément la masse $\frac{1}{2}$ sur $[0, L_0^{(1)})$ et $[L_0^{(1)}, 1)$. Supposons μ_n construite. On tire uniformément l'un des n intervalles déjà obtenus, I , on découpe I en deux sous-intervalles tels que celui de gauche a pour longueur $L_0^{(n+1)}|I|$ et celui de droite $L_1^{(n+1)}|I|$. Le choix de I est fait indépendamment des étapes précédentes de la construction. On a maintenant $n+1$ intervalles. La mesure ρ_{n+1} s'obtient en répartissant uniformément la masse $\frac{1}{n+1}$ sur chacun de ces intervalles. La suite ρ_n converge presque sûrement faiblement vers une mesure de probabilité ρ .

Dans l'introduction de notre thèse [1], nous avons montré que ρ n'est autre qu'un cas particulier de cascade de Mandelbrot répartie sur des intervalles aléatoires. Cela nous a conduit à nous poser la question suivante (formulée ici dans le cas canonique): soit $\mathbf{F}$ l'ensemble des partitions de $[0, 1)$ en intervalles b -adiques semi-ouverts à droite. On dit qu'un élément $\mathcal{F}$ de $\mathbf{F}$ est plus fin qu'un autre élément $\mathcal{F}'$ de $\mathbf{F}$, et on note $\mathcal{F}' \leq \mathcal{F}$, si pour tout $I \in \mathcal{F}$ il existe $I' \in \mathcal{F}'$ tel que $I \subset I'$. La relation $\leq$ sur les partitions est une relation d'ordre. Si l'on se donne une suite $\mathcal{F}_n$ d'éléments de $\mathbf{F}$ de plus en plus fins telle que $\sup_{I \in \mathcal{F}_n} |I|$ converge vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, que peut-on dire de la suite

$$Z_n = \sum_{I \in \mathcal{F}_n} \mu_{|I|}(I),$$

où $\mu_\varepsilon = Q_\varepsilon^C \cdot \ell$? Dans le cas où la partition $\mathcal{F}_n$ est faite des intervalles b -adiques de la n ème génération, on obtient la martingale $\mu_{b^{-n}}([0, 1])$. La question est de savoir si Z_n converge presque sûrement, et si oui, si sa limite est égale à $\|\mu\|$. Nous avons établi une forme un peu plus général du résultat suivant dans [2]:

Théorème 2.1.9 *Supposons que $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ soit une suite aléatoire croissante d'éléments de $\mathbf{F}$ telle que presque sûrement $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{I \in \mathcal{F}_n} |I| = 0$. Supposons de plus que cette suite soit indépendante*

de $\{Q_\varepsilon\}$. Alors Z_n est une martingale positive d'espérance 1 qui converge presque sûrement vers une limite Z . Si de plus on a $\varphi'(1^-) > 0$ alors on a presque sûrement $Z = \|\mu\|$.

Ce résultat est un cas particulier d'un théorème obtenu dans [Ky] dans le contexte plus général des martingales associées aux processus de branchements. Notre méthode diffère de celle utilisée dans [Ky].

Une extension de l'équation fonctionnelle (2.8)

En terme de la transformée de Laplace L de $\mathcal{Y}$, l'équation fonctionnelle (2.8) s'écrit

$$L(t) = [\mathbb{E}(L(tW))]^b \quad (t \geq 0). \quad (2.11)$$

Supposons W intégrable. Rappelons que cette équation est alors résolue dans [DL]. Dans [3], nous étudions l'existence et l'unicité de solutions à cette équation dans le cas où l'entier $b \geq 2$ est remplacé par un réel $b > 1$, mais nous nous plaçons dans un espace plus gros que celui des transformées de Laplace. Nous travaillons dans l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, valant 1 en 0, et décroissant vers 0 à l'infini. Nous étendons les résultats de [DL]. Nous n'arrivons pas à décider si les solutions non triviales sont des transformées de Laplace.

La fonction φ étant formellement définie comme dans le cas où b est entier, dans le cas où $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1^-) > 0$, on écrit un équivalent du Théorème 2.1.2 en terme d'existence de dérivées successives en 0 de la solution et de leur comportement en 0. Dans le cas général, le comportement des solutions à l'infini s'apparente à celui de la finitude des moments d'ordres négatifs, et les résultats obtenus pour L dans [4] quand b est entier s'étendent (de même que ceux de [Liu4] qui les améliorent).

2.2 Non dégénérescence, régularité du processus multiplicatif, dimension de $Q \cdot \sigma$ et comportement multifractal de Q_ε sans auto-similarité en loi dans $\mathcal{M}$

2.2.1 $[0,1]$ -martingales dans une algèbre de Banach, non dégénérescence et régularité

Nous avons vu que l'analyse multifractale des éléments de la classe $\mathcal{M}'$ nécessite de savoir construire simultanément la mesure limite non dégénérée de chaque élément d'une famille non dénombrable de $[0,1]$ -martingales, les $\{\frac{Q_\varepsilon^q}{\mathbb{E}(Q_\varepsilon^q)}\}$, $q \in \mathcal{J}$. En fait il suffit de savoir construire simultanément la famille des masses de n'importe quel intervalle b -adique donné. On est donc dans ce cas face à un problème de convergence de martingale à valeur dans un espace fonctionnelle.

Cela conduit à se poser le problème de la non dégénérescence en les termes suivants:

Soit σ une mesure de Borel positive non nulle et finie sur $[0,1]$.

Soit $\mathbf{B}$ une algèbre de Banach réelle ou complexe séparable ayant un élément neutre pour la multiplication noté Id , et dont la norme notée $\mathcal{N}$ est supposée sous-multiplicative. Notons $\mathcal{B}(\mathbf{B})$ la tribu borélienne de $\mathbf{B}$.

Soit $Q_\varepsilon : ([0,1] \times \Omega, \mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbf{B}, \mathcal{B}(\mathbf{B}))$, $0 < \varepsilon \leq 1$, une famille de fonctions mesurables.

Pour $\varepsilon \in (0,1]$, on désigne par $\mathcal{F}_\varepsilon$ la tribu engendrée dans $\mathcal{B}$ par la famille de variables aléatoires $\{Q_\lambda(t, \cdot)\}_{t \in [0,1], \lambda \in [\varepsilon,1]}$.

Supposons que $\{Q_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$ satisfasse les propriétés suivantes:

(P'1) Pour tout $t \in [0,1]$, $(\{Q_{s^{-1}}(t, \cdot), \mathcal{F}_{s^{-1}}\})_{s > 1}$ est une martingale continue à droite d'espérance Id . De plus, avec probabilité 1, pour tout $\varepsilon_0 \in (0,1]$ il existe une fonction positive et intégrable $h(\cdot, \omega)$ telle que $\sup_{\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq 1} \mathcal{N}(Q_\varepsilon(t, \omega)) \leq h(t, \omega)$ pour σ -presque tout $t \in [0,1]$.

Alors, la famille $(Y_\varepsilon = \int_{[0,1]} Q_{s^{-1}}(t, \cdot) \sigma(dt))_{s > 1}$ est bien définie au sens de Bochner (voir [DiUh]), et c'est une martingale continue à droite par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_{s^{-1}}\}_{s > 1}$, d'espérance $\|\sigma\| Id$.

Il n'est plus claire que la martingale converge, et si oui s'il y a convergence en norme L^1 . Nous allons répondre à cette question dans la sous classe de la construction précédente qui étend naturellement $\mathcal{M}$.

Nous avons besoin des hypothèses supplémentaires suivantes qui étendent formellement **(P2)**, **(P3)** et **(P4)**:

(P'2) La famille $\{Q_\varepsilon\}$ possède une factorisation

$$Q_{\varepsilon'} = Q_\varepsilon Q_{\varepsilon, \varepsilon'} \quad (0 < \varepsilon' \leq \varepsilon \leq 1),$$

avec $Q_{\varepsilon, \varepsilon} = Id$, où $Q_{\varepsilon, \varepsilon'} : ([0,1] \times \Omega, \mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbf{B}, \mathcal{B}(\mathbf{B}))$, $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon \leq 1$, est une famille de fonctions mesurables.

Pour tout $\varepsilon \in (0,1]$ et tout sous-intervalle I de $[0,1]$, soit $\overline{\mathcal{F}}_\varepsilon^I$ la tribu engendrée dans $\mathcal{B}$ par les familles de variables aléatoires $\{Q_{\varepsilon, \lambda}(t, \cdot)\}_{t \in I, \lambda \in (0, \varepsilon)}$. La tribu $\overline{\mathcal{F}}_\varepsilon^{[0,1]}$ est simplement notée $\overline{\mathcal{F}}_\varepsilon$.

(P'3) Pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$, $\mathcal{F}_\varepsilon$ et $\overline{\mathcal{F}}_\varepsilon$ sont indépendantes.

(P'4) Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0,1]$ et toute famille $\mathcal{G}$ d'intervalles non triviaux de $[0,1]$ et de même longueur ε satisfaisant la propriété de séparation $d(I, J) \geq \beta \varepsilon$ si $I \neq J \in \mathcal{G}$, les tribus $\overline{\mathcal{F}}_\varepsilon^I$, $I \in \mathcal{G}$, sont mutuellement indépendantes.

On note $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ l'ensemble des martingales décrites précédemment.

Nous aurons aussi besoin de l'hypothèse d'invariance en loi par translation:

(P'5) La loi de $Q_\varepsilon(t, \cdot)$ ne dépend pas de t .

Nous pouvons énoncer les Théorèmes suivants. Le premier d'entre eux utilise les notions de type et de propriété de Radon Nikodym que l'on trouve décrites dans [LeTa] et [DiUh] respectivement.

Théorème 2.2.1 (Non dégénérescence 2) *Soit $p \in (1,2]$. Supposons qu'il existe un entier $b \geq 2$ tel que*

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{w \in A^n} \sigma(I_w)^{p-1} \int_{I_w} \mathbb{E} \mathcal{N}(Q_{b^{-n}}(t))^p \mathcal{N}(Q_{b^{-n}, b^{-n-1}}(t))^p d\sigma(t) \right)^{1/p} < \infty. \quad (2.12)$$

Alors

1. Si $\mathbf{B}$ est de type p , la martingale Y_ε est bornée dans L^p .

2. Si de plus $\mathbf{B}$ vérifie la propriété de Radon-Nikodym, la martingale Y_ε converge presque sûrement, et en norme L^p quand ε tend vers 0.

Théorème 2.2.2 (Non dégénérescence 3) Soit $p \in (1, 2]$. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{C}^d$. Supposons que $\mathbf{B}$ soit l'algèbre (munie de la norme infini) $\mathbf{B}_U$ des fonctions holomorphes bornées sur U et que

$$\sum_{n \geq 0} \sup_{z \in U} \left(\sum_{w \in A^n} \sigma(I_w)^{p-1} \int_{I_w} \mathbb{E} |Q_{b^{-n-1}}(t)(z)|^p d\sigma(t) \right)^{1/p} < \infty. \quad (2.13)$$

Alors, avec probabilité 1, Y_ε converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction Y holomorphe sur U , quand ε tend vers 0. De plus, la restriction Y_K de Y à tout compact K inclus dans U vérifie $\mathbb{E}(\|Y_K\|_\infty^p) < \infty$.

Remarque 4 Supposons (P5) satisfaite. Définissons alors

$$\theta = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_b \mathbb{E} \mathcal{N}(Q_{b^{-n}}(t))^p \mathcal{N}(Q_{b^{-n}, b^{-n-1}}(t))^p$$

et pour $z \in K$

$$\theta(z, p) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_b \mathbb{E} |Q_{b^{-n}}(t)(z)|^p.$$

Une condition suffisante pour que la condition (2.12) (resp. (2.13) soit vérifiée est $\tau_\sigma(p) + \theta(p) < 0$ (resp. $\tau_\sigma(p) + \sup_{z \in U} \theta(z, p) < 0$).

Dans le cas où $\mathbf{B} = \mathbb{R}$, si la martingale $\{Q_\varepsilon\}$ est positive et auto-similaire, cette condition suffisante est la même que celle exhibée dans Le Théorème 2.1.2.1. En ce sens, les résultats de non dégénérescence et de convergence L^p que nous obtenons fournissent une condition suffisante optimale. Nous verrons à la Section 2.3 que ceci contribue à l'obtention d'un résultat complet pour la fréquence de recouvrement des points dans le problème de Dvoretzky, tandis que la condition suffisante de convergence dans L^2 donnée dans [K4] est une sévère limitation dans ce cas.

Commentaires

(1) Le Théorème 2.2.2 est établi dans [Bi1, Bi2] dans le cas de certaines cascades canoniques auto-similaires, et plus généralement pour certaines martingales associées aux marches aléatoires de branchement. Nous avons montré dans [16] et [8] que la technique utilisée dans [Bi2] pouvait s'étendre au cas de martingales à valeurs complexes construites comme les cascades de Poisson composées, puis aux éléments de $\mathcal{M}$ dans [18, 9] et le résultat s'étend facilement à l'extension de $\mathcal{M}$ décrite dans cette section.

(2) Le Théorème 2.2.1 est établi dans [7] dans le cas des cascades canoniques, et plus généralement pour certaines martingales associées aux marches aléatoires de branchement. Sa preuve est formellement identique à celle de la non dégénérescence dans [9]. Il s'applique aux espaces de matrices carrés complexes de dimension finie, et aussi à certains espaces de Sobolev (voir [7]). Dans le cas de ces espaces de fonctions, comme dans le cas où la martingale est à valeurs dans les fonctions analytiques, les énoncés précédents montrent que sous des hypothèses

raisonnables, la régularité de la martingale se transmet à sa limite. Nous reviendrons à ce type de propriété dans la sous-section suivante.

(3) Chacune des preuves des Théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 utilise de façon essentielle, et grâce à **(P4)** la propriété suivante, vraie si B est de type $p \in (1, 2]$ (voir [LeTa] Proposition 9.11): il existe une constante C_p ne dépendant que de $(B, \mathcal{N})$ telle que si $U_1, \dots, U_N$ sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans B , Bochner intégrable, et de moyenne nulle, alors

$$\mathbb{E} \left(\mathcal{N} \left(\sum_{i=1}^N U_i \right)^p \right) \leq C_p \sum_{i=1}^N \mathbb{E} (\mathcal{N}(U_i)^p).$$

Cela permet de montrer la bornitude dans L^1 de la sous-martingale $\mathcal{N}(Y_\varepsilon)^p$ dans le premier cas via (2.12), et celle de $|Y_\varepsilon(z)|^p$ uniformément par rapport à z dans le second via (2.13). La propriété de Radon-Nikodym permet d'étendre le Théorème de convergence des martingales complexes bornées dans L^p au cas de B .

L'espace des fonctions holomorphes bornées sur U ne vérifie cette propriété. On s'en tire grâce à l'idée de [Bi2] d'utiliser la formule de Cauchy.

2.2.2 Résultats supplémentaires de régularité du processus multiplicatif dans les cas de Q^C et Q^P

Dans [6] et [8] nous avons aussi adopté une autre stratégie pour le problème de la convergence simultanée de familles de mesures de la forme $Q^C \cdot \ell$ et $Q^P \cdot \ell$. Cette approche repose sur une propriété de continuité du processus multiplicatif mise en évidence dans les deux cas. Expliquons cela. Plutôt que de construire un seul exemplaire de Q^C et Q^P , considérons un intervalle non trivial I et

- dans le cas de Q^C , à la place des $W_{t_1 \dots t_n}$, des variables aléatoires $\mathcal{W}_{t_1 \dots t_n}$ indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{R}^I$;
- dans le cas de Q^P , à la place des $W_{k,n}$, des variables aléatoires $\mathcal{W}_{k,n}$ indépendantes et de même loi sur $\mathbb{R}^I$, et indépendantes du processus de Poisson.

Supposons de plus que pour tout $x \in I$ et $f \in \{\mathcal{W}_{t_1 \dots t_n}, \mathcal{W}_{k,n}\}$, $f(x)$ est intégrable, et de moyenne 1 dans le cas canonique. Alors, la formule (2.1) (resp. (2.2)) donnant Q^C (resp. Q^P) définit simultanément pour tous les $x \in I$ une cascade canonique $Q^C(x)$ (resp. une cascade de Poisson composé $Q^P(x)$) associée aux poids $\mathcal{W}_{t_1 \dots t_n}(x)$ (resp. $\mathcal{W}_{k,n}(x)$), mais pas nécessairement positive.

Fixons $x_1, x_2, x_3 \in I$. Pour $L \in \{C, P\}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$, définissons $Z^L(x_i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\varepsilon^L(x_i) := \int_{[0,1]} Q_\varepsilon^L(x_i)(t) dt$ si cette limite existe (quand $Q_\varepsilon^L(x_i)(t)$ est positif pour tout t , elle est égale à $\|Q^L(x_i) \cdot \ell\|$).

Pour $p \geq 1$ et $n \geq 0$ définissons aussi

$$S_L(p, x_i, n) = \sum_{w \in A^n} b^{-n(p-1)} \int_{I_w} \mathbb{E} |Q_{b^{-n-1}}^L(x_i(t))|^p dt.$$

et

$$\theta(p, i) = \mathbb{E}(|\mathcal{W}(x_i)|^p) - 1 - p(\mathbb{E}(\mathcal{W}(x_i)) - 1).$$

On a

$$\begin{cases} S_C(p, X_i, n) \leq b^{-np} \sum_{w \in A^n} \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathcal{W}_{w_1 \dots w_k}(x_i)^p) \\ S_P(p, x_i, n) = b^{-n(p-1)} \int_{[0,1]} \exp(\theta(p, i) \Lambda(C_{b^{-n-1}}(t))) dt. \end{cases}$$

Enfin, posons

$$M_L(p, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \sup_{w \in A^*} \max_{1 \leq i \leq 3} \mathbb{E}(|\mathcal{W}_w(x_i)|^p) < \infty & \text{si } L = C, \\ \max_{1 \leq i \leq 3} \mathbb{E}(|\mathcal{W}(x_i)|^p) & \text{si } L = P \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} & \Delta_L(p, x_1, x_2, x_3) \\ = & \begin{cases} \sup_{w \in A^*} \mathbb{E}(|\mathcal{W}_w(x_1) + \mathcal{W}_w(x_2) - 2\mathcal{W}_w(x_3)|^p) \\ \quad + \sup_{w \in A^*, 1 \leq i, j \leq 3} (\mathbb{E}(|\mathcal{W}_w(x_i) - \mathcal{W}_w(x_j)|^p))^2 & \text{si } L = C, \\ \mathbb{E}(|\mathcal{W}(x_1) + \mathcal{W}(x_2) - 2\mathcal{W}(x_3)|^p) + \max_{1 \leq i, j \leq 3} (\mathbb{E}(|\mathcal{W}(x_i) - \mathcal{W}(x_j)|^p))^2 & \text{si } L = P. \end{cases} \end{aligned}$$

Le lemme suivant se déduit de [6, 7, 8].

Lemme 2.2.1 *Soit $p \in (1, 2]$. Soit $L \in \{C, P\}$. Supposons $M_L(p, x_1, x_2, x_3) < \infty$ et, si $L = P$, que $\max_{1 \leq i, j \leq 3} \mathbb{E}(|\mathcal{W}(x_i) - \mathcal{W}(x_j)|^p) \leq 1$. Supposons également que*

$$\sum_{n \geq 0} n^2 \max_{1 \leq i \leq 3} S_L(p, x_i, n)^{1/p} < \infty.$$

Alors, $Z^L(x_i)$ existe pour tout $1 \leq i \leq 3$ et il existe sur $\mathbb{R}_+$ une fonction continue et positive ne dépendant que de p, f , telle que l'on ait

$$\begin{aligned} & (\mathbb{E}(|Z^L(x_1) + Z^L(x_2) - 2Z^L(x_3)|^p))^{1/p} \\ & \leq \Delta_L(p, x_1, x_2, x_3)^{1/p} f(M_L(x_1, x_2, x_3)) \sum_{n \geq 0} (1+n)^2 \max_{1 \leq i \leq 3} S_L(p, x_i, n)^{1/p}. \end{aligned}$$

On obtient ensuite le

Théorème 2.2.3 *Supposons que I est compact. Supposons aussi qu'il existe $p \in (1, 2]$ tel que $\sup_{w \in A^*, x \in I} \mathbb{E}(|\mathcal{W}_w(x)|^p) < \infty$ et $\sup_{x \in I} \mathbb{E}(|\mathcal{W}(x)|^p) < \infty$, et*

1.

$$\sum_{n \geq 0} n^2 \sup_{x \in I} S_L(p, x, n)^{1/p} < \infty \quad (L \in \{C, P\}).$$

2. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x, x' \in I$*

$$\begin{cases} \sup_{w \in A^*} \mathbb{E}(|\mathcal{W}_w(x) - \mathcal{W}_w(x')|^p) \leq C|x - x'|^p & \text{si } L = C, \\ \mathbb{E}(|\mathcal{W}(x) - \mathcal{W}(x')|^p) \leq C|x - x'|^p & \text{si } L = P. \end{cases}$$

3. *Il existe deux fonctions ψ et γ définies sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissantes au voisinage de 0 et telles que $\psi(h)/h$ et $\max(\gamma(h), h^{2p})/h^{p+2}\psi(h/2)$ sont intégrables au voisinage de 0^+ , et $C > 0$ tels que pour tout $(x, h) \in I \times \mathbb{R}_+$ satisfaisant $[x - h, x + h] \subset I$,*

$$\begin{cases} \sup_{w \in A^*} \mathbb{E}(|\mathcal{W}_w(x + h) + \mathcal{W}_w(x - h) - 2\mathcal{W}_w(x)|^p) \leq \gamma(h) & \text{si } L = C, \\ \mathbb{E}(|\mathcal{W}(x + h) + \mathcal{W}(x - h) - 2\mathcal{W}(x)|^p) \leq \gamma(h) & \text{si } L = P. \end{cases}$$

Alors pour $L \in \{C, P\}$, on peut choisir une version continuellement dérivable des fonctions $\mathcal{W}_w(\cdot)$ et $\mathcal{W}(\cdot)$, de sorte que les fonctions $Z_\varepsilon^L(\cdot)$ le sont, et avec probabilité 1, $Z_\varepsilon^L(\cdot)$ converge uniformément vers $Z^L(\cdot)$, qui est continuellement dérivable.

Commentaires

(1) La condition imposée aux fonctions γ et ψ assure que presque sûrement chaque fonction f parmi $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}_w$ et Z_ε^L peut être choisie presque sûrement continûment dérivable sur I (d'abord l'hypothèse 2. et le Théorème de Kolmogorov donnent une version continue des ces processus. Puis 3. assure qu'une propriété du type $|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq C\psi(h)$ est satisfaite, impliquant le caractère C^1).

Sous les hypothèses du Théorème 2.2.3, on peut appliquer le Théorème 2.2.1 et pour chaque $x \in I$ la martingale $Z_\varepsilon^L(x)$ converge presque sûrement et dans L^p . Le Lemme 2.2.1 et le Théorème 2.2.3 montrent que la structure de Q^L permet de contrôler, grâce aux moments des accroissements et des différences secondes du processus choisi initialement pour construire la cascade vectorielle à valeur dans $\mathbb{R}^I$, les moments des accroissements et des différences secondes de tout processus stochastique $\tilde{Z}^L$ sur I tel que pour tout $x \in I$ on ait presque sûrement $\tilde{Z}^L(x) = Z^L(x)$. On en déduit comme pour les fonctions $\mathcal{W}$ et Z_ε^L qu'il existe une version $\hat{Z}^L$ continûment dérivable sur I .

De plus, on peut montrer que $\hat{Z}^L(\cdot)$ est dans L^1 , comme élément aléatoire de l'ensemble des fonctions continues sur I . En utilisant alors un Théorème de convergence pour les martingales vectorielles comme le fait [JoLeN] dans un contexte voisin, on montre que $Z_\varepsilon^L(\cdot)$ converge presque sûrement uniformément vers $\hat{Z}^L(\cdot)$. Donc toutes les martingales $Z_\varepsilon^L(x)$ convergent presque sûrement simultanément, et $\hat{Z}^L(\cdot) = Z^L(\cdot)$.

La régularité de $\mathcal{W}$, et donc celle de la martingale $Z_\varepsilon^L(\cdot)$, exprimée en terme de différences secondes dans le Théorème 2.2.3, se transmet à la limite $Z^L(\cdot)$. C'est un phénomène comparable à celui observé dans la section précédente quand la martingale vit dans un espace de Sobolev. Ici, on récupère la régularité C^1 , que l'on n'a pas tout à fait si l'on travaille avec l'espace de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$. Dans [6], nous expliquons comment obtenir des résultats de régularité supérieure en considérant les différences d'ordre supérieur. Cette idée s'étend sans doute à des fonctions de plusieurs variables, mais cela nécessite des calculs assez difficiles à écrire. Un point de vue plus aérien consiste alors à revenir au point de vue du Théorème 2.2.1 avec des espaces de Sobolev de fonctions de plusieurs variables.

Le fait qu'on obtienne un résultat de conservation de la régularité améliore qualitativement le résultat obtenu dans [Bi1] sans hypothèse d'analyticité. En effet, [Bi1] perd un ordre de régularité entre la martingale et sa limite.

(2) La preuve du Lemme 2.2.1 est beaucoup plus délicate dans le cas de Q^P que dans le cas de Q^C . Dans les deux cas elle repose sur une équation fonctionnelle du type (2.4), qui ne se simplifie pas dans le cas de Q^P . Il est certainement possible de déduire des calculs menés dans [8] des conditions générales sur $Q_\varepsilon(t)$ permettant d'énoncer une version plus abstraite du Théorème 2.2.3.

(3) Dans le cas des cascades de Poissons composées positives, on considère dans [8] les

martingales $Q_\varepsilon^P(x)(t)$ pour $t \geq 0$, et pas seulement pour t dans $[0,1]$. On montre alors que presque sûrement, pour tout $x \in I$, les fonctions $s \mapsto \int_{[0,s]} Q_\varepsilon^P(x)(t)$ convergent uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}_+$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers une fonction $s \mapsto Z^P(x)(s)$. On prouve ensuite, dans le cas où l'intensité du processus de Poisson est invariante en loi par translations horizontales, une loi des grands nombres et une loi du logarithme itéré approchée pour $s \mapsto Z^P(x)(s)$ quand $s \rightarrow \infty$, uniformément par rapport à $x \in I$ (voir la Section 5 de [8]).

2.2.3 Estimation de la dimension de la mesure limite

Nous travaillons toujours sur $[0,1]$. Nous allons rappeler les notions de dimension inférieure et supérieure d'une mesure μ . Pour des études détaillées, on pourra lire [Fan4, H, FanLauRao, BatH].

Soit μ une mesure de Borel positive et non nulle sur $[0,1]$.

On définit ses dimensions de Hausdorff inférieure et supérieure respectivement comme

$$\dim_*(\mu) = \inf\{\dim E : \mu(E) > 0\} \quad \text{et} \quad \dim^*(\mu) = \inf\{\dim E : \mu(E) = \|\mu\|\}.$$

On définit ses dimensions de packing inférieure et supérieure respectivement comme

$$\text{Dim}_*(\mu) = \inf\{\text{Dim } E : \mu(E) > 0\} \quad \text{et} \quad \text{Dim}^*(\mu) = \inf\{\text{Dim } E : \mu(E) = \|\mu\|\}.$$

Fixons un entier $b \geq 2$. Supposons (afin que les définitions des divers objets utilisés ne dépendent pas du fait que l'on choisisse des intervalles semi-ouverts ou bien fermés) que μ ne charge pas les points b -adiques. Rappelons les résultats suivants établi dans [Fan4] (pour la caractérisation de $\dim_*$ et $\dim^*$) et [H], qui montrent que la détermination des dimensions précédentes est intimement liée à la densité logarithmique de μ presque partout par rapport à elle même.

Théorème 2.2.4 *On a*

1. *Relativement à μ*

$$\begin{aligned} \dim_*(\mu) &= \text{ess inf} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(t))}{\log |I_n(t)|} \right), \quad \dim^*(\mu) = \text{ess sup} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(t))}{\log |I_n(t)|} \right), \\ \text{Dim}_*(\mu) &= \text{ess inf} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(t))}{\log |I_n(t)|} \right), \quad \text{Dim}^*(\mu) = \text{ess sup} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(t))}{\log |I_n(t)|} \right). \end{aligned}$$

$$2. \quad -\tau'_\mu(1^+) \leq \dim_*(\mu) \leq \text{Dim}^*(\mu) \leq -\tau'_\mu(1^-).$$

Utilisation de la probabilité de Peyrière pour estimer les dimensions de $Q \cdot \ell$.

Considérons un élément de $\mathcal{M}$ agissant sur une mesure de probabilité σ . Supposons que σ ne charge pas les points b -adiques (cette hypothèse permet d'affirmer que $Q \cdot \sigma(I_w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_\varepsilon(I_w)$ presque sûrement pour tout $w \in A^*$).

Nous supposons que **(P5)** est satisfaite.

Nous faisons également l'hypothèse raisonnable suivante: pour tout $w \in A^*$, la famille $(Q_\varepsilon^w(t, \omega) = Q_{b^{-|w|}, b^{-|w|}\varepsilon}(f_w(t), \omega))$, $0 < \varepsilon \leq 1$, satisfait **(P1)** à **(P4)**. On peut alors définir les mesures μ^{I_w} comme dans la Section 2.1.1 en remplaçant formellement ℓ par σ .

Nous avons besoin des quantités suivantes: pour $p \geq 1$ soient

$$\hat{\tau}_\sigma^{(b)}(p) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{w \in A^n, \\ \sigma(I_w) > 0}} \sup_{m \geq 1} \frac{1}{m} \log_b \sum_{v \in A^m} (\sigma(I_{wv}) / \sigma(I_w))^p$$

et

$$\hat{\theta}^{(b)}(p) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq 1} \frac{\log \mathbb{E}(|Q_{b^{-n}, b^{-n-m}}(t)|^p)}{\log b^m}.$$

Le résultat suivant combine l'étude faite dans [7] pour des extensions des cascades canoniques non auto-similaires quand $\sigma = \ell$, et l'approche générale adoptée dans [18]. Rappelons que μ désigne $Q \cdot \sigma$.

Théorème 2.2.5 *Supposons qu'il existe $p \in (1, 2]$ tel que $\hat{\tau}_\sigma(p) + \hat{\theta}^{(b)}(p) < 0$. Supposons de plus qu'il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t, s \in [0, b^{-n}]} \mathbf{1}_{Q_{b^{-n}}(t) Q_{b^{-n}}(s) > 0} \frac{Q_{b^{-n}}(t)^\eta}{Q_{b^{-n}}(s)^\eta} \right) = e^{o(n)}$$

et que $\tau'_\sigma(1)$ existe. Alors, μ est non dégénérée et, avec probabilité 1, conditionnellement au fait que $\mu \neq 0$, μ -presque partout on a

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(t))}{\log |I_n(t)|} &= D_- := -\tau'_\sigma(1) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \mathbb{E}(Q_{b^{-k}, b^{-k-1}}(\cdot) \log_b Q_{b^{-k}, b^{-k-1}}(\cdot))}{n}, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(t))}{\log |I_n(t)|} &= D_+ := -\tau'_\sigma(1) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \mathbb{E}(Q_{b^{-k}, b^{-k-1}}(\cdot) \log_b Q_{b^{-k}, b^{-k-1}}(\cdot))}{n}; \end{aligned}$$

donc $\dim_(\mu) = \dim^*(\mu) = D_-$ et $\text{Dim}_*(\mu) = \text{Dim}^*(\mu) = D_+$.*

Commentaires

(1) Dans [7] nous étudions la dimension d'une mesure construite comme une cascade canonique non auto-similaire, mais dans le cadre plus général des marches aléatoires en environnement aléatoire (en particulier on n'a pas d'invariance en loi par translation comme avec **(P5)**). La mesure σ est alors la mesure de Lebesgue, et le résultat généralise ceux de [P2] et [LiuRo] pour le cas d'un environnement non aléatoire. Un résultat de la même nature est obtenu dans [8] pour les cascades de Poisson composées, mais il ne donne qu'un encadrement de la $\liminf$ et de la $\limsup$ de la densité logarithmique car il n'utilise alors pas l'outil principal qui conduit au Théorème 2.2.5, c'est à dire la probabilité de Peyrière. Notons de plus que dans [7] et [8], nous utilisons simplement $\dim^*(\mu)$, alors que nos résultats donnent des informations sur les quatre notions de dimension.

La probabilité de Peyrière est la mesure de probabilité $\mathcal{Q}$ définie sur $(\Omega \times [0, 1], \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}([0, 1]))$ par

$$\mathcal{Q}(E) = \mathbb{E} \left(\int_{[0, 1]} \mathbf{1}_E(\omega, t) \mu(\omega)(dt) \right) \quad (E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}([0, 1])),$$

et telle que $\mathcal{Q}$ -presque sûrement signifie $\mathbb{P}$ -presque sûrement, μ -presque partout. L'introduction de la probabilité $\mathcal{Q}$ permet d'appliquer un théorème de martingales pour contrôler le comportement asymptotique de $\sum_{k=0}^n X_k(\omega, t)$, où $X_k(\omega, t) = \log_b Q_{b^{-k}, b^{-k-1}}(t, \omega)$, $\mathcal{Q}$ -presque sûrement.

En fait, dans [7] et [8] on travaille avec $\sigma = \ell$. On peut travailler avec σ quelconque. On perd alors à la fois l'auto-similarité dans Q_ε et dans σ . L'hypothèse $\hat{\tau}_\sigma(p) + \hat{\theta}^{(b)}(p) < 0$ pour un $p > 1$ permet un contrôle du défaut d'autosimilarité: on a $\mu(I_w) \approx \mu_{b^{-|w|}}(I_w) \frac{\|\mu^{I_w}\|}{\sigma(I_w)}$, et sous l'hypothèse $\hat{\tau}_\sigma(p) + \hat{\theta}^{(b)}(p) < 0$, même si les variables $Z(w) = \frac{\|\mu^{I_w}\|}{\sigma(I_w)}$ ne suivent pas la même loi, on conserve la propriété essentielle qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\sup_{w \in A^*} \mathbb{E}(Z(w)^{1+\eta}) < \infty$. Cette propriété implique que pour μ -presque tout t , on peut négliger asymptotiquement le terme $Z(w)$ dans $\frac{\log \mu(I_n(t))}{\log |I_n(t)|}$ si $I_n(t) = I_w$, car $Z(w) \approx 1$.

Il reste alors à analyser $\frac{\log \sigma(I_n(t))}{\log |I_n(t)|}$ μ -presque partout, car sous les hypothèses du Théorème 2.2.5 on montre que $\mu_{b^{-n}}(I_n(t)) \approx Q_{b^{-n}}(t) \sigma(I_n(t))$ μ -presque partout. En utilisant des inégalités de Markov, on montre facilement que l'on a

$$-\varphi'_\sigma(1^+) \leq \liminf_{n \rightarrow 0} \frac{\log \sigma(I_n(t))}{\log |I_n(t)|} \leq \limsup_{n \rightarrow 0} \frac{\log \sigma(I_n(t))}{\log |I_n(t)|} \leq -\varphi'_\sigma(1^-) \quad (2.14)$$

$\mathcal{Q}$ -presque sûrement. C'est une jolie propriété si l'on se souvient de ce que (2.14) est toujours vrai σ -presque partout (voir le Théorème 2.2.4).

(2) Dans le cas des cascades canoniques auto-similaires agissant contre la mesure de Lebesgue, le premier résultat du type du Théorème 2.2.5 est obtenu dans [KP], sous l'hypothèse que μ est non dégénérée et que $\mathbb{E}(Z(w) \log Z(w)) < \infty$ (les $Z(w)$ ont tous la même loi). Dans [K5], on prouve que l'on a $\dim_*(\mu) = \dim^*(\mu)$ en se passant de cette hypothèse, en utilisant un principe de décomposition des actions des $[0,1]$ -martingales sur les mesures. Pour les cascades canoniques auto-similaires agissant contre σ quelconque, le Théorème 2.2.5 est obtenue dans [Fan8].

(3) Dans [K2] et [Fan2], par la même méthode on obtient la minoration de $\dim_*(\mu)$ pour des constructions particulières de Q_ε (le chaos multiplicatif Gaussien de [K2] peut ne pas appartenir à $\mathcal{M}$), et c'est une condition d'intégrabilité L^2 qui assure la convergence de la martingale. De plus, si $\varphi'_\sigma(1)$ existe, il n'est pas possible que D_- et D_+ diffèrent dans [K2] et [Fan2].

Estimation simultanée de $\dim_* Q \cdot \sigma$ pour des familles non dénombrables d'éléments de $\mathcal{M}$

Les résultats de convergence de $[0,1]$ -martingales vectorielles obtenus dans la Section 2.2.1 (Théorèmes 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3) permettent de construire simultanément des familles de $[0,1]$ -martingales $\mu_\gamma = Q(\gamma) \cdot \sigma$ indexées par un ensemble non dénombrable Γ de paramètres γ (voir [5, 7, 16, 8, 18]). Etant donnée la nature de nos résultats, nous pouvons choisir pour Γ un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

On aimerait calculer presque sûrement simultanément pour tout $\gamma \in \Gamma$ la dimension inférieure de μ_γ afin de minorer la dimension de Hausdorff de certains ensembles remarquables qu'elles chargent, comme les ensembles de niveaux discutés dans le commentaire (3) de la Section 2.1.3, ou bien les ensembles de niveau des nombres de recouvrements dans le recouvrement poissonnien (voir la Section 2.2.4).

“Presque sûrement, pour presque tout γ ”. On peut toujours supposer que σ est une mesure de probabilité. La probabilité de Peyrière $\mathcal{Q}_\gamma$ telle quelle, associée à μ_γ , permet alors de minorer $\dim_*(\mu_\gamma)$ pour une valeur de γ donnée presque sûrement. Elle permet donc de faire

la même chose presque sûrement pour tous les γ d'une partie dénombrable dense de Γ fixée à l'avance. Afin d'améliorer ce résultat pour les cascades canoniques auto-similaires, nous avons utilisé dans [4] une version faible du Théorème 2.2.3 pour construire simultanément les mesures μ_γ (voir commentaire (3) de la Section 2.1.3). Mais nous n'avons pas réussi à améliorer le résultat de minoration des dimensions. Nous avons réalisé récemment à l'occasion de [24] qu'en raison de la mesurabilité de la fonction $(\omega, \gamma) \mapsto \mu_\gamma(\omega)$, on peut considérer pour tout compact de mesure de Lebesgue (ℓ_d) positive $K \subset \Gamma$ la mesure suivante sur $\Omega \times [0,1] \times K$:

$$\mathcal{Q}_K(A) = \int_K \mathbf{1}_E(\omega, t, \gamma) \mathcal{Q}_\gamma(d\omega, dt) \frac{d\gamma}{\ell_d(K)} \quad (E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(K))$$

Alors, si les estimations requises pour obtenir un résultat tel que le Théorème 2.2.5 sont uniformes sur tout compact K , en utilisant le Théorème de Fubini, on obtient la validité de la conclusion du Théorème 2.2.5 presque sûrement, pour tous les γ d'une partie aléatoire de Γ dont le complémentaire dans Γ est de mesure de Lebesgue nulle.

Mais on cherche un résultat valable presque sûrement pour tous les éléments de Γ . Supposons que l'on veuille minorer (resp. majorer) presque sûrement $\dim_*(\mu_\gamma)$ par un nombre d_γ (resp. D_γ) (aléatoire ou non) simultanément pour tous les γ .

En utilisant une inégalité de Markov, on obtient qu'étant donné $\varepsilon > 0$ fixé, pour tout $\eta > 0$ et $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} \mu_\gamma \left(\left\{ t : \frac{\log \mu_\gamma(I_n(t))}{\log |I_n(t)|} \leq d_\gamma - \varepsilon \right\} \right) &\leq f_n(\gamma) := \sum_{w \in A^n} \mu_\gamma(I_w)^{1+\eta} b^{n\eta(d_\gamma - \varepsilon)}, \\ \mu_\gamma \left(\left\{ t : \frac{\log \mu_\gamma(I_n(t))}{\log |I_n(t)|} \geq D_\gamma + \varepsilon \right\} \right) &\leq g_n(\gamma) := \sum_{w \in A^n} \mu_\gamma(I_w)^{1-\eta} b^{-n\eta(D_\gamma + \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-ensemble compact K de Γ il existe $\eta > 0$ tel que la somme $\sum_{n \geq 1} \sup_{\gamma \in K} \mathbb{E}(f_n(\gamma) + g_n(\gamma))$ converge, alors le Théorème de Fubini donne un résultat du type: presque sûrement, sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle d'éléments de Γ , si $\mu_\gamma \neq 0$ on a $d_\gamma \leq \dim_*(\mu_\gamma) \leq \text{Dim}^*(\mu_\gamma) \leq D_\gamma$.

C'est le type de résultat obtenu dans les Théorèmes 9 de [7], 9 de [8] et 4.4(2) de [18]. C'est un peu plus faible qu'avec la probabilité de Peyrière, car on n'utilise plus la propriété de martingale.

“Presque sûrement pour tout γ ”. Les résultats des Sections 2.2.1 et 2.2.2 permettent d'obtenir une dépendance C^1 de f_n et de g_n vis à vis de γ . Alors, si Γ est de dimension 1, nous pouvons montrer sous certaines hypothèses que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout compact K de Γ , il existe $\eta > 0$ tel que l'on a $\sum_{n \geq 1} \sup_{\gamma \in K} \mathbb{E}(f_n(\gamma) + |f'_n|(\gamma)) < \infty$, ce qui implique la convergence uniforme presque sûre de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur K , puis que presque sûrement, pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $\mu_\gamma \neq 0$, $\dim_*(\mu_\gamma) \geq d_\gamma$. C'est ce qui est fait dans les Théorèmes 10 de [8] et 4.4(1) de [18].

Il y a une difficulté pour obtenir le même résultat avec la majoration de $\text{Dim}^*(\mu_\gamma)$ par D_γ . En effet, notant $Z(\gamma)$ la masse de μ_γ , la dérivation de g_n engendre des termes de la forme $Z'(\gamma)Z(\gamma)^{-\eta}$ dont on doit contrôler le moment d'ordre 1. Le seul moyen que nous connaissons d'y parvenir à ce jour demande de bien contrôler les moments d'ordres, petits en valeur absolue,

négatifs de $Z(\gamma)$, uniformément par rapport à γ . Nous ne savons le faire que dans le cas auto-similaire (voir [5, 8, 24]).

Enfin, nous n'obtenons ce type de résultat que pour des ensembles de paramètres de dimension 1 parce que pour conclure en dimension $d \geq 2$, il nous faudrait un contrôle du moment d'ordre $p > d$ du gradient de f_n , et nos estimations sont valables pour des moments d'ordre $p \in (1, 2]$.

Nous allons reproduire le résultat obtenu dans [18] dans le cas où $\Gamma \subset \mathbb{R}$ et les processus $\gamma \mapsto Q_\varepsilon(\gamma)$ possèdent une extension qui est une $[0, 1]$ -martingale à valeurs dans les fonctions analytiques. L'introduction d'un langage abstrait dans la Section 2.2.1 en simplifie beaucoup l'énoncé.

L'approche utilisant le Théorème 2.2.3 est développée dans [8].

Soit σ une mesure de Borel positive sur $[0, 1]$ et ne chargeant pas les nombres b -adiques.

Soient Γ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $Q_\varepsilon : ([0, 1] \times \Gamma \times \Omega, \mathcal{B}([0, 1]) \otimes \mathcal{B}(\Gamma) \otimes \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, $0 < \varepsilon \leq 1$, une famille de fonctions mesurables.

On suppose que pour tout compact $K \subset \Gamma$, il existe un voisinage borné U_K de K dans $\mathbb{C}$ et pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$ une extension mesurable $\hat{Q}_\varepsilon : ([0, 1] \times U_K \times \Omega, \mathcal{B}([0, 1]) \otimes \mathcal{B}(U_K) \otimes \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ de Q_ε restreinte à $[0, 1] \times K \times \Omega$, analytique en la seconde variable, telle que $\{\hat{Q}_\varepsilon(t, \cdot, \omega)\}$ appartienne à $\mathcal{M}(\mathbf{B}_{U_K})$ (voir le Théorème 2.2.2). Supposons de plus que **(P'5)** est satisfaite par cette restriction, et que pour tout $w \in A^*$, la famille $(\hat{Q}_\varepsilon^w(t, z, \omega) = \hat{Q}_{b^{-|w|}, b^{-|w|}\varepsilon}(f_w(t), z, \omega))$, $0 < \varepsilon \leq 1$, satisfait **(P'1)** à **(P'5)**.

Désormais, on omettra d'écrire la dépendance en ω .

Pour $z \in U_K$ et $p \geq 1$ soit

$$\begin{cases} \theta(z, p) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_b \mathbb{E}(|\hat{Q}_{b^{-n}}(t, z)|^p) \\ \hat{\theta}^{(b)}(z, p) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq 1} \frac{\log \mathbb{E}(|\hat{Q}_{b^{-n}, b^{-n-m}}(t, z)|^p)}{\log b^m}. \end{cases}$$

La fonction $\theta(z, p)$ est convexe en p à z fixé. Elle ne dépend pas de b .

Rappelons qu'on a aussi défini

$$\hat{\tau}_\sigma^{(b)}(p) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{w \in A^n \\ \sigma(I_w) > 0}} \sup_{m \geq 1} \frac{1}{m} \log_b \sum_{v \in A^m} (\sigma(I_{wv}) / \sigma(I_w))^p.$$

On a $\theta(z, p) \leq \hat{\theta}^{(b)}(z, p)$ et $\varphi_\sigma(p) \leq \hat{\varphi}_\sigma^{(b)}(p)$.

Remarque 5 Si σ a une structure auto-similaire, par exemple si c'est une mesure quasi-Bernoulli dépendant d'une base c (voir la Section 2.1.4), alors le nombre $\hat{\tau}_\sigma^{(b)}(p)$ tend vers $\tau_\sigma(p)$ quand $b = c^N$ tend vers ∞ . Cette remarque et l'hypothèse (i)(α) qui va suivre suggèrent que b doive être choisi aussi grand que possible.

Nos hypothèses sont les suivantes.

(i) Pour tout U_K choisi comme précédemment, il existe $p \in (1, 2]$ tel que

(α)

$$\hat{\varphi}_\sigma^{(b)}(p) + \sup_{z \in U_K} \hat{\theta}^{(b)}(z, p) < 0.$$

(β) pour tout $\delta > 0$ il existe $n_0(\delta) \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0(\delta)$ et $z \in K$

$$\sup_{m \geq 1} \frac{\log \mathbb{E}(|\widehat{Q}_{b^{-n}, b^{-n-m}}(t, z)|^p)}{\log b^m} \leq \widehat{\theta}^{(b)}(z, p) + \delta.$$

L'hypothèse (i)(α) impose que pour $\gamma \in U_K \cap \Gamma$ on a $\tau_\sigma(p) + \theta(\gamma, p) < 0$. Comme cette fonction de p est convexe, que $\tau_\sigma(1) + \theta(\gamma, 1) = 0$, et $\theta(\gamma, \cdot)$ est croissante, on a $\tau'_\sigma(1^+) + \frac{\partial \theta}{\partial p}(\gamma, 1^+) < 0$ pour tout $\gamma \in K$ et $\tau'_\sigma(1^+) < 0$. Donc

$$\underline{D}(\gamma, \sigma) = 1 + \frac{\theta'_\gamma(1^+)}{\varphi'_\sigma(1^+)} \in (0, 1],$$

où

$$\theta'_\gamma(1^+) := \frac{\partial \theta}{\partial p}(\gamma, 1^+).$$

(ii) Pour tout intervalle compact non trivial K de Γ la fonction $\gamma \mapsto \frac{\partial \theta}{\partial p}(\gamma, 1^+)$ est de classe C^1 .

(iii) Pour tout compact K de Γ ,

(α) Il existe $p_K > 1$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $n_0(\delta) \geq 1$ tel que pour tout $\gamma \in K$ et $q \in [1, p_K]$

$$\frac{1}{n} \log_b \mathbb{E}(Q_{b^{-n}}(t, \gamma)^q) \leq \theta(\gamma, q) + \delta.$$

(β)

$$\theta(\gamma, 1+x) = \theta'_\gamma(1^+)x + o(x) \quad (\gamma \in K, x > 0)$$

où $o(x)$ ne dépend pas de $\gamma \in K$.

(iv) Pour tout compact K de Γ , si $\eta > 0$ est assez petit, pour tout $n \geq 1$ et $w \in A^n$, il existe une variable aléatoire $M_w(\eta)$ telle que pour tout $\gamma \in K$

$$\sup_{t \in I_w} Q_{b^{-n}}(t, \gamma)^{1+\eta} \leq M_w(\eta) (Q_{b^{-n}}(t_w, \gamma))^{1+\eta}$$

et on a l'une des deux propriétés (α) et (β):

(α)(1) $M_w(\eta)$ est indépendant de $\gamma \mapsto Q_{b^{-n}}(t_w, \gamma)$ et $\mathbb{E}(M_w(\eta)) = \exp(o(n))$ indépendamment de $w \in A^n$. (2) Si K est un intervalle compact non trivial, pour tout $k \geq 0$ la fonction $\gamma \mapsto Q_{b^{-k}, b^{-k-1}}(t_w, \gamma)$ est presque sûrement C^1 , et

$$\sup_{\gamma \in \text{Int}(K)} \sup_{0 \leq k \leq n} \mathbb{E} \left(Q_{b^{-k}, b^{-k-1}}(t_w, \gamma)^\eta \left| \frac{dQ_{b^{-k}, b^{-k-1}}}{d\gamma}(t_w, \gamma) \right| \right) = \exp(o(n)),$$

la même inégalité étant valable avec $\eta = 0$; (β)(1) Pour tout $h > 0$, $\mathbb{E}(M_w(\eta)^h) = \exp(o(n))$ indépendamment de $w \in A^n$. (2) Si K est un intervalle compact non trivial, pour tout $k \geq 0$ la fonction $\gamma \mapsto Q_{b^{-k}, b^{-k-1}}(t_w, \gamma)$ presque sûrement C^1 et pour tout $h' > 1$ assez proche de 1

$$\sup_{\gamma \in \text{Int}(K)} \sup_{0 \leq k \leq n} \mathbb{E} \left(Q_{b^{-k}, b^{-k-1}}(t_w, \gamma)^{\eta h'} \left| \frac{dQ_{b^{-k}, b^{-k-1}}}{d\gamma}(t_w, \gamma) \right|^{h'} \right) = \exp(o(n)),$$

la même inégalité étant valable avec $\eta = 0$.

Théorème 2.2.6 *Supposons les hypothèses (i) à (iv) satisfaites. Avec probabilité 1, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $Q_\varepsilon(\cdot, \gamma) \cdot \sigma$ converge faiblement vers la mesure $\mu_\gamma = Q(\cdot, \gamma) \cdot \sigma$. Chaque μ_γ est non dégénérée.*

De plus, avec probabilité 1, pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $\mu_\gamma \neq 0$, on a

$$\begin{cases} \liminf_{n \rightarrow 0} \frac{\log \mu_\gamma(I_n(t))}{\log \sigma(I_n(t))} \geq \underline{D}(\gamma, \sigma) & \mu_\gamma\text{-presque partout,} \\ \liminf_{n \rightarrow 0} \frac{\log \sigma(I_n(t))}{\log \ell(I_n(t))} \geq -\varphi'_\sigma(1^+) & \mu_\gamma\text{-presque partout} \end{cases}$$

et donc $\dim_*(\mu_\gamma) \geq -\tau'_\sigma(1^+) - \theta'_\gamma(1^+)$.

2.2.4 Analyse multifractale de $Q_\varepsilon(t)$ pour des $[0,1]$ -martingales poissonniennes, et fréquences de recouvrement

Dans [12] nous avons utilisé l'approche précédente afin de répondre au problème de la classification des ensembles de niveaux associés au recouvrement poissonnien de la droite décrits dans l'exemple D de la Section 0.2.1. Nous reprenons les notations de cette section. Considérons une cascade de Poisson composée associée à un poids $W = w \neq 1$ constant

$$Q_\varepsilon(t) = e^{-(w-1)\mathcal{S}_\varepsilon} w^{N_\varepsilon(t)}.$$

Nous voyons que le comportement asymptotique de la fréquence de recouvrement $\frac{N_\varepsilon^P(t)}{\mathcal{S}_\varepsilon}$ se déduit de celui de $\frac{\log Q_\varepsilon(t)}{\mathcal{S}_\varepsilon}$. Pour ce type de martingales, nous avons pu classier de façon précise les ensembles de niveau de $\frac{\log Q_\varepsilon(t)}{\mathcal{S}_\varepsilon}$, et donc répondre à la question liée au recouvrement. Nous avons mis en évidence une classe plus générale de martingales liées à la construction poissonnienne pour lesquelles nos résultats sont valides. Cette classe est décrite dans [13]. Un article contenant les preuves de ces résultats étendus, et aussi des résultats valables dans le cadre des cascades canoniques non auto-similaires est en chantier [14]. Rappelons le résultat obtenu dans [12].

Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on note μ_γ la mesure limite de $\frac{Q_\varepsilon^\gamma}{\mathbb{E}(Q_\varepsilon^\gamma)} \cdot \ell$.

Nous supposons que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_\varepsilon = +\infty.$$

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, soient

$$\underline{F}_\beta = \{t \in \mathbb{R} : \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log Q_\varepsilon(t)}{\mathcal{S}_\varepsilon} = \beta\}, \quad \overline{F}_\beta = \{t \in \mathbb{R} : \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log Q_\varepsilon(t)}{\mathcal{S}_\varepsilon} = \beta\}, \quad F_\beta = \underline{F}_\beta \cap \overline{F}_\beta.$$

Soient

$$\overline{\alpha} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{S}_\varepsilon(t)}{-\log \varepsilon} \quad \text{et} \quad \hat{\alpha} = \inf_{b \geq 2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq 1} \frac{\ell \otimes \nu(D_{b^{-(n+m)}}(t) \setminus D_{b^{-n}}(t))}{\log b^m} \quad (\text{on a } \overline{\alpha} \leq \hat{\alpha}).$$

Enfin, soient $\theta : \gamma \in \mathbb{R} \mapsto w^\gamma - 1 - \gamma(w-1)$ et pour $\alpha \geq 0$, $\Lambda_\alpha : \gamma \mapsto 1 + \alpha(\theta(\gamma) - \gamma\theta'(\gamma))$.

Théorème 2.2.7 (Cas $\overline{\alpha} = 0$) *Supposons que $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \nu([\varepsilon, 1]) < \infty$. Supposons aussi que $\overline{\alpha} = 0$. Avec probabilité 1, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ on a $\mu_\gamma \neq 0$ et μ_γ est concentrée sur $F_{\theta'(\gamma)}$ (en particulier les mesures μ_γ sont mutuellement singulières).; si de plus $\Lambda_{\hat{\alpha}}(\gamma) > 0$, on a $\dim_*(\mu_\gamma) = 1$ et donc $\dim F_{\theta'(\gamma)} = \dim \underline{F}_{\theta'(\gamma)} = \dim \overline{F}_{\theta'(\gamma)} = 1$.*

Théorème 2.2.8 (Cas $0 < \bar{\alpha} < \infty$) Supposons que $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \nu([\varepsilon, 1)) < \infty$. Supposons aussi que $0 < \bar{\alpha} < \infty$. Avec probabilité 1, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ tel $\Lambda_{\bar{\alpha}}(\gamma) > 0$ on a $\mu_\gamma \neq 0$, μ_γ est concentrée sur $F_{\theta'(\gamma)}$ (en particulier ces mesures μ_γ sont mutuellement singulières), et $\dim F_{\theta'(\gamma)} \leq \Lambda_{\bar{\alpha}}(\gamma)$; pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda_{\bar{\alpha}}(\gamma) < 0$ on a $F_{\theta'(\gamma)} = \emptyset$.

De plus, avec probabilité 1, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda_{\bar{\alpha}}(\gamma) > 0$, on a $\dim_*(\mu_\gamma) \geq \Lambda_{\bar{\alpha}}(\gamma)$, et donc $\dim F_{\theta'(\gamma)} = \Lambda_{\bar{\alpha}}(\gamma)$.

Si $\bar{\alpha}$ est obtenu comme une limite et pas seulement comme une $\limsup$, alors les résultats précédents restent valables si l'on remplace $F_{\theta'(\gamma)}$ par $\underline{F}_{\theta'(\gamma)}$ ou $\overline{F}_{\theta'(\gamma)}$.

Théorème 2.2.9 (Cas $\bar{\alpha} = +\infty$) Supposons que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \nu([\varepsilon, 1)) = +\infty$. Alors, avec probabilité 1, on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log Q_\varepsilon(t)}{\mathcal{S}_\varepsilon} = \theta'(0)$ ($\forall t \in \mathbb{R}$).

Commentaires

(1) Fixons $\alpha > 0$. Les situations $\bar{\alpha} = \hat{\alpha} = 0$, $0 < \bar{\alpha} = \hat{\alpha} < \infty$ et $\bar{\alpha} = +\infty$ sont illustrées respectivement par $\nu(d\lambda) = \frac{\alpha d\lambda}{\lambda^2 \log^\beta(1/\lambda)}$ ($\beta \in (0, 1]$), $\nu(d\lambda) = \frac{\alpha d\lambda}{\lambda^2}$ et $\nu(d\lambda) = \frac{\alpha d\lambda}{\lambda^2 \log^\beta(1/\lambda)}$ ($\beta < 0$). Les trois théorèmes exhibent deux transitions dans le comportement des dimensions des ensembles de niveaux au moment où l'on passe d'un comportement de $\bar{\alpha}$ à un autre. Qualitativement, le fait de faire croître $\bar{\alpha}$ crée de l'ordre en ce sens que l'on réduit le diamètre de l'ensemble des valeurs possibles pour le niveau $\theta'(\gamma)$, partant d'un intervalle non borné quand $\bar{\alpha} = 0$ pour finir avec un singleton quand $\bar{\alpha} = \infty$.

(2) Les théorèmes 2.2.7 et 2.2.8 sont des conséquences du Théorème 2.2.6 une fois que l'on s'aperçoit de ce que μ_γ est concentrée sur $F_{\theta'(\gamma)}$. C'est ce dernier point que nous n'avions pas perçu dans l'étude menée dans [8] sur les cascades de Poisson composées. Dans le cas $\bar{\alpha} = 0$, on s'écarte sensiblement de la situation auto-similaire correspondant à $\mathcal{S}_\varepsilon = -\log \varepsilon$, et cela se reflète dans la classification des ensembles de niveaux. Dans le cas $0 < \bar{\alpha} < \infty$, $\mathcal{S}_\varepsilon$ est de l'ordre de grandeur de $-\log \varepsilon$ et les dimensions des ensembles de niveaux sont distribuées comme dans le cas où $\mathcal{S}_\varepsilon = -\bar{\alpha} \log \varepsilon$.

Le cas où $\bar{\alpha} = \infty$ s'écarte lui aussi de l'autosimilarité, et on exhibe un nouveau type de comportement. On a $\theta'(0) = \log(w) - w + 1 < 0$ (car $w \neq 1$), ce qui fournit une explication quantitative de la dégénérescence de toute mesure $Q_\varepsilon \cdot \sigma$.

2.3 Application au recouvrement aléatoire du cercle par des arcs aléatoires

Nous reprenons les notations de l'exemple D de la Section 0.2. Le problème de la classification des ensembles de niveau associés au recouvrement de Dvoretzky pour le cercle $\mathbb{T}$ est une question posée par L. Carleson à J.-P. Kahane. C'est une question naturelle après qu'il a été répondu à la question initiale de savoir à quelle condition nécessaire et suffisante sur les ℓ_n il y a presque sûrement recouvrement de $\mathbb{T}$ (voir la Remarque 6).

Les études faites dans [FanK1] et [Fan7] conduisent à des résultats partiels dans le cas de $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$. L'approche de [Fan7] est fondée sur la comparaison de certaines $\mathbb{T}$ -martingales

avec des cascades de Poisson composées du type de celles considérées dans la Section 2.2.4 grâce aux résultats de [Fan3] et à l'astuce introduite dans [M3] pour comparer le problème du recouvrement du cercle à celui du recouvrement de la droite par des intervalles poissonniens. Cependant, la méthode est limitée par le fait qu'elle utilise un critère de non dégénérescence L^2 qui empute l'intervalle des valeurs admissibles pour le niveau β , et aussi parce qu'elle emploie la probabilité de Peyrière qui ne peut pas traiter simultanément tous les ensembles de niveaux (voir la Section 2.2.3).

Les idées développées dans [8] ont contribué à obtenir les résultats suivants, qui combinent ce que l'on a su faire dans la Section 2.2.4 avec l'astuce de [M3].

Pour énoncer nos résultats, nous avons besoin de la fonction

$$d_\alpha(\beta) = 1 + \alpha(\beta - 1 - \beta \log \beta) \quad (2.15)$$

définie pour $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$.

Nous avons aussi besoin de définir les nombres

$$\bar{\alpha}^D = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n \ell_j}{-\log \ell_n} \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}^D = \inf_{b \geq 2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq 1} \frac{\sum_{\ell_j \in [b^{-(n+m)}, b^{-n}]} \ell_j}{\log b^m}$$

(où $b \geq 2$ décrit les entiers ≥ 2).

Théorème 2.3.1 (Cas $\bar{\alpha}^D = 0$) *Supposons $\limsup_{n \rightarrow \infty} n\ell_n < \infty$ et $\bar{\alpha}^D = 0$. Avec probabilité 1, pour tout $\beta \geq 0$ tel que $d_{\hat{\alpha}^D}(\beta) > 0$ on a*

$$\dim(F_\beta^D) = \dim(\underline{F}_\beta^D) = \dim(\overline{F}_\beta^D) = 1. \quad (2.16)$$

Théorème 2.3.2 (Cas $0 < \bar{\alpha}^D < \infty$) *Supposons que $\limsup_{n \rightarrow \infty} n\ell_n < \infty$ et que $0 < \bar{\alpha}^D < \infty$. Avec probabilité 1, pour tout $\beta \geq 0$ tel que $d_{\hat{\alpha}^D}(\beta) > 0$, on a*

$$\dim(F_\beta^D) = d_{\bar{\alpha}^D}(\beta) \quad (2.17)$$

et

$$F_\beta^D = \emptyset \quad (\forall \beta \geq 0, d_{\bar{\alpha}^D}(\beta) < 0). \quad (2.18)$$

De plus, si $\bar{\alpha}^D$ est défini comme une limite (et pas simplement une limsup) alors (2.17) et (2.18) sont vraies si F_β^D est remplacé par $\underline{F}_\beta^D$ ou $\overline{F}_\beta^D$.

Théorème 2.3.3 (Cas $\bar{\alpha}^D = +\infty$) *Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} n\ell_n = \infty$. Alors, avec probabilité 1, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n^D(t)}{\sum_{k=1}^n \ell_k} = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{T}).$$

Remarque 6 (1) Divers exemples de suites ℓ_n sont donnés dans [12]. On voit s'opérer les transitions d'un comportement à l'autre en considérant les suites de la forme $\frac{\alpha}{n \log^\beta(n+1)}$ ($\beta \in (0,1]$), $\frac{\alpha}{n}$, et $\frac{\alpha}{n \log^\beta(n+1)}$ ($\beta < 0$).

(2) Si les ℓ_n sont < 1 , demander à quelle condition nécessaire et suffisante sur ℓ_n on a $\mathbb{T} = \limsup I_n$ presque sûrement est équivalent à la recherche d'une condition nécessaire et suffisante sur ℓ_n pour que $\mathbb{T} \subset \bigcup I_n$ presque sûrement. La CNS donnée dans [S2] est

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \exp(\ell_1 + \dots + \ell_n) = \infty. \quad (2.19)$$

Soit $\mathcal{F} = \mathbb{T} \setminus \limsup I_n$, c'est à dire l'ensemble des points qui sont recouverts un nombre fini de fois. Il est inclus dans l'ensemble de niveau F_0^D ($\beta = 0$). Les points de $\mathcal{F}$ sont caractérisés par $N_n^D(t) = O(1)$ et ceux de F_0^D par $N_n(t) = o(L_n)$. La condition de Shepp (2.19) assure que $\mathcal{F} = \emptyset$. Nous n'avons pas de condition du même genre pour décider si $F_0^D = \emptyset$ ou non. Les Theorèmes 2.3.1 et 2.3.2 montrent que pour des suites telles que $\overline{\alpha}^D = \widehat{\alpha}^D$ on a

$$\overline{\alpha}^D < 1 \Rightarrow F_0 \neq \emptyset; \quad \overline{\alpha}^D > 1 \Rightarrow F_0 = \emptyset.$$

Il était connu ([K3], p. 160) que $\dim \mathcal{F} = 1 - \overline{\alpha}^D > 0$ quand $0 \leq \overline{\alpha}^D < 1$. Alors $F_0 \neq \emptyset$ et même $\dim F_0 \geq d_{\overline{\alpha}^D}(0) = 1 - \overline{\alpha}^D > 0$. L'information donnée par le Theorem 2.3.2 pour F_0 est qu'il y a égalité. Quand $\overline{\alpha}^D = 1$, il est possible que $F_0^D \neq \emptyset$ bien que $\dim F_0^D = 0$. C'est le cas pour la suite

$$\ell_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1 + \delta}{\log n} \right)$$

avec $\delta > 0$, puisque (2.19) est violée.

(3) Lorsque $\overline{\alpha}$ est une limite, les estimations faites dans [12] pour majorer la dimension de Hausdorff permettent en fait de montrer que la dimension de packing des ensembles de niveau analysés est égale à leur dimension de Hausdorff.

2.4 Résultats pour des $[0,1]$ -martingales liées à certains opérateurs de Perron-Fröbenius

Dans [11], nous nous sommes intéressés à un autre type de $[0,1]$ -martingales. Comme leur définition va le montrer, l'intersection de la classe de ces martingales avec $\mathcal{M}$ est réduite à $\{Q_\varepsilon \equiv 1\}$. Cette classe de mesures contient les mesures associées à $\tilde{B}_n$ dans l'exemple B de la Section 0.2.1. Elles généralisent certains produits de Riesz avec phases.

Soit W une fonction mesurable positive et 1-périodique sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\int_{[0,1]} W(t) dt = 1$. Soit $(\theta_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées dans $[0,1]$. Soit enfin b un entier ≥ 2 . Définissons alors la $[0,1]$ -martingale

$$Q_\varepsilon(t) = \prod_{k=0}^n W(b^k(t + \theta_k)) \quad (t \in [0,1], \varepsilon \in (b^{-n-1}, b^{-n}]), \quad (2.20)$$

qui satisfait les propriétés (P1) à (P6) exceptée (P4).

B. Mandelbrot et M.-O. Coppins m'ont demandé de regarder si les propriétés de $\mu = Q \cdot \ell$ étaient régies par le comportement de la fonction $\varphi(q) = -1 + q - \log(b) \int_{[0,1]} W^q(t) dt$ (où par convention $0^q = 0$ si $q \leq 0$) par analogie avec les cascades canoniques auto-similaires. Nous allons voir qu'il n'en est rien, même si la Proposition 2.1.1 reste valable pour la martingale $Q_\varepsilon \cdot \ell$.

2.4.1 Non dégénérescence de μ

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, soit $\widehat{W}(k) = \int_{[0,1]} W(t) e^{-2ik\pi t} dt$. Nous avons supposé que $\widehat{W}(0) = 1$. Pour tout $n \geq 1$ soit $Y_n = \mu_{b^{-n}}([0,1])$; $(Y_n, \sigma(\phi_0, \dots, \phi_{n-1}))_{n \geq 1}$ est une martingale positive d'espérance 1, qui converge vers $\|\mu\|$.

Théorème 2.4.1 (Non dégénérescence) *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (i) $\mathbb{P}(\|\mu\| > 0) > 0$;
- (ii) $(Y_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable;
- (iii) Pour tout $n \geq 1$, $Y_n = 1$ presque sûrement;
- (iv) $\|\mu\| = 1$ presque sûrement (μ est une mesure de probabilité);
- (v) $\forall n \geq 2 \forall (j_0, \dots, j_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0, \dots, 0\}, \sum_{k=0}^{n-1} j_k b^k = 0 \Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} \widehat{W}(j_k) = 0$.

Notons que, d'après le Théorème 2.4.1 si la propriété (v) n'est pas satisfaite, Y_n tend vers 0 presque sûrement, mais $\mathbb{E}(Y_n^h) \uparrow_{n \rightarrow \infty} \infty$ pour tout $h > 1$.

L'information donnée par ce résultat peut être précisée de la façon suivante:

Proposition 2.4.1 (Une condition suffisante de dégénérescence) *Supposons que W est strictement positive et que $\log W$ satisfait le principe de distorsions bornées faible suivant:*

$$\psi(n) = \sum_{k=0}^n \sup_{t, s \in [0, 1], |t-s| \leq b^{-k}} |\log W(t) - \log W(s)| = o(n).$$

Si $\varphi'(1) < 0$ alors μ est dégénérée. On a la même conclusion si $\varphi'(1) = 0$ et de plus $\psi(n) = o(\sqrt{n \log \log n})$.

Proposition 2.4.2 (Vitesse de dégénérescence) *Supposons que μ soit dégénérée. Supposons en outre que W est strictement positive et que $\log W$ satisfait le principe de distorsions bornées:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{t, s \in [0, 1], |t-s| \leq b^{-k}} |\log W(t) - \log W(s)| < \infty. \quad (2.21)$$

Alors, avec probabilité 1, $\Phi_W(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_b \|\mu_{b^{-n}}\|$ existe et $\Phi_W(1) < 0$.

Commentaires

(1) La condition nécessaire et suffisante de non dégénérescence est de type algébrique, et en grand contraste avec ce qui se passe dans le cas des éléments de $\mathcal{M}'$. Elle force certains $\widehat{W}(k)$ à s'annuler, et parmi eux il y en a au moins un du type $\widehat{W}(kb)$ avec $k \neq 0$. Elle est de nature voisine des conditions que l'on impose pour construire les produits de Riesz classiques. Enfin, elle montre que la non-dégénérescence est un comportement très singulier qui n'a lieu que pour les W d'une partie fermée d'intérieur vide dans l'ensembles des fonctions mesurables positives et de moyenne 1.

(2) Voici deux situations pour lesquelles il y a non dégénérescence:

- a) Il existe $p \geq 0$ tel que $\widehat{W}(k) = 0$ pour tout $k \notin b^p(\mathbb{Z} \setminus b\mathbb{Z})$.
- b) W est un polynôme trigonométrique de la forme

$$W(t) = 1 + \sum_{k \in K} a_k \cos(2\pi m_k b^{p_k} t) + b_k \sin(2\pi m_k b^{p_k} t)$$

où K est un ensemble fini, les a_k et les b_k sont tels que $\sum_{k \in K} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} < 1$ afin que W soit positive, les p_k sont des entiers positifs, et les m_k sont des entiers strictement positifs et tous distincts tels que: pour tout $(\varepsilon_k)_{k \in K} \in \{-1, 0, 1\}^K \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, b ne divise pas $\sum_{k \in K} \varepsilon_k m_k$.

Par exemple, si $b = 5$ et $K = \{1, 3\}$, le choix $m_1 = 1$, $m_3 = 3$ donne les fonctions

$$W(t) = 1 + a_1 \cos(2\pi \times 5^{p_1} t) + b_1 \sin(2\pi \times 5^{p_1} t) + a_3 \cos(2\pi \times 3 \times 5^{p_3} t) + b_3 \sin(2\pi \times 3 \times 5^{p_3} t)$$

où p_1 et p_3 sont des entiers arbitraires.

(3) La Proposition 2.4.1 est un cas particulier du Théorème 2.1.1.2 dans le cas où $\varphi'(1) < 0$. Dans le cas $\varphi'(1) = 0$, on obtient une précision.

Lien avec certains opérateurs de Perron-Fröbenius aléatoires

Lorsque la limite de la martingale $(\mu_{b^{-n}})_{n \geq 1}$ est dégénérée, il est naturel de normaliser la martingale en considérant la suite de mesures sur $[0, 1]$

$$\nu_n = \frac{\mu_{b^{-n}}}{\mu_{b^{-n}}([0, 1])}.$$

Il se trouve que le formalisme thermodynamique pour les transformations aléatoires développé dans ([Ki1, KhKi]), et plus particulièrement un théorème de type Ruelle Perron-Fröbenius, permet d'établir la convergence faible presque sûre de ν_n vers une mesure ν lorsque W est strictement positive et Höldérienne. La mesure ν est une mesure de Gibbs associée au potentiel $\log(W)$. On peut également opérer la normalisation en cas de non dégénérescence, mais le Théorème 2.4.1 indique que les cas de non dégénérescence coïncident avec les cas où la normalisation est neutre, puisque $\mu_{b^{-n}}([0, 1]) = 1$, on a donc $\nu = \mu$. Le Théorème 2.4.1 donne l'ensemble des W pour lesquels on peut se passer du Théorème de Ruelle Perron-Fröbenius de [Ki1].

Il faut avoir à l'esprit que si l'on perturbe légèrement un cas de non dégénérescence W en $\widetilde{W}$ pour lequel il y a dégénérescence, et si W est strictement positive et Höldérienne, alors la normalisation précédente "récupère" la situation, en fournissant une mesure limite. Ceci est détaillé et illustré par des figures dans la Section 1 de [11].

Le formalisme thermodynamique pour les transformations aléatoires permet également d'affirmer le fait suivant, très utile pour l'analyse multifractale de μ : soit

$$\Phi_W(q) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\Phi_{W,n}(q) = \frac{1}{n} \log_b \int_{[0,1]} \prod_{k=0}^{n-1} W(b^k(t + \theta_k))^q dt \right).$$

Si W est strictement positive et Höldérienne, alors on a ([Ki2])

$$\Phi_W(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(\log_b \int_{[0,1]} \prod_{k=0}^{n-1} W(b^k(t + \theta_k))^q dt \right). \quad (2.22)$$

De plus, la fonction déterministe Φ_W est analytique et strictement convexe.

2.4.2 Analyse multifractale de μ pour des W présentant un ensemble dénombrable dense de points de saut

Si W est strictement positive mais non Höldérienne, on peut considérer pour chaque réalisation de ν_n une sous-suite faiblement convergente et poser la question de la nature multifractale de sa limite ν . L'analyse multifractale de la mesure ν faite dans [Ki2] et [Fan6], mais toujours sous certaines hypothèses de régularité sur W , toujours contrainte d'être continue.

Limitons nous au cas de la mesure μ quand elle n'est pas dégénérée. Nous sommes parvenus dans [11] à faire l'analyse multifractale de μ pour une classe de fonctions W possédant un ensemble dénombrable dense de points de saut. Pour énoncer notre résultat, nous avons besoin des hypothèses suivantes:

(H_1): μ est non dégénérée.

(H_2): il existe $\underline{w}$ et $\overline{w}$ dans $(0, \infty)$ tels que $0 < \underline{w} < W < \overline{w} < \infty$.

La dernière hypothèse autorise W à avoir un ensemble dénombrable dense de points de saut. Elle inclut une condition du type "principe de distorsions bornées faibles" considéré récemment dans le formalisme thermodynamique (voir [Y, Ke, FeOl]), mais elle est plus faible que ce dernier justement parce que W peut-être fortement discontinue.

(H_3): il existe une suite $(S_n)_{n \geq 1}$ de parties finies de $[0, 1]$, chacune contenant $\{0, 1\}$, telle que

$$h_n = \sum_{k=0}^n \sup_{\left\{ \begin{array}{l} t, s \in [0, 1], |t - s| \leq b^{-k}, \\ S_n \cap [t, s] = \emptyset \end{array} \right.} |\log W(t) - \log W(s)| = o(n)$$

et

$$m_n = \min \{k \in \mathbb{N} : b^{-k} \leq \inf_{t, s \in S_n, t \neq s} |t - s|\} = o(n).$$

Nous allons voir que sous ces hypothèses, la fonction τ_μ n'est pas donnée par la fonction $-\varphi$ sur un intervalle non trivial, comme le suggérerait un raisonnement par analogie avec les cascades canoniques. Il est d'abord nécessaire d'exhiber τ_μ .

Théorème 2.4.2 (La fonction τ_μ) *Supposons (H_1), (H_2) et (H_3) vérifiées. On a $\varphi'(1) \in [0, 1]$.*

1) *Supposons que $0 \leq \varphi'(1) < 1$.*

(i) *Avec probabilité 1, pour tout $q \in \mathbb{R}$ l'égalité (2.22) est satisfaite et on a $\tau_\mu : q \in \mathbb{R} \mapsto 1 - q + \Phi_W(q)$.*

Si $\varphi'(1) > 0$ alors τ_μ est convexe et strictement décroissante, et si $\varphi'(1) = 0$ alors τ_μ est convexe et strictement décroissante sur $(-\infty, 1)$, et nulle sur $[1, \infty)$.

(ii) *τ_μ est dérivable en 0 et en 1 avec $\tau'_\mu(0) = -1 + \int_{[0, 1]} \log_b W(t) dt$ et $-\tau'_\mu(1) = \varphi'(1)$. De plus τ_μ n'est pas affine sur $[0, 1]$.*

2) *$\varphi'(1) = 1$ si et seulement si $W = 1$ presque partout, c'est à dire si μ est la mesure de Lebesgue, auquel cas $\tau_\mu(q) = 1 - q$.*

3) *Si W est Höldérienne, alors τ_μ est analytique et strictement convexe.*

Nous avons aussi établi un résultat de comparaison de τ_μ avec $-\varphi$.

En fait on a $\tau_\mu(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{\mu,n}(q) := 1 - q + \frac{1}{n} \mathbb{E} \log_b \int Q_{b^{-n}}^q(t) dt$ et $-\varphi(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\varphi_n(q) := 1 - q + \frac{1}{n} \log_b \mathbb{E} \int Q_{b^{-n}}^q(t) dt$. Avant le passage à la limite, l'inégalité de Jensen permet de séparer les fonctions $\tau_{\mu,n}$ et $-\varphi_n$ en dehors des cas $q = 0$ et $q = 1$. Mais après passage à la limite ce n'est plus clair. D'ailleurs il est numériquement impossible de distinguer $\tau_{\mu,n}$ et $-\varphi_n$. Le résultat suivant est donc important.

Théorème 2.4.3 (Comparaison de τ_μ et φ) *Supposons (H_1) , (H_2) et (H_3) vérifiées.*

1. $\tau_\mu(q) \leq -\varphi(q)$ pour tout $q \in \mathbb{R}$, avec égalité pour $q \in \{0,1\}$.
2. Supposons que $\log W$ satisfasse le principe de distorsions bornées (2.21). Alors, ou bien W est constante, ou bien

$$\tau_\mu(q) < -\varphi(q)$$

pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus S$, où S est un ensemble discret contenant $\{0,1\}$. De plus, si l'on a $\sup_{t \in [0,1]} W(t) > b$, alors $S \cap \mathbb{R}_+$ est borné.

3. Si W est égal à une constante w_k sur chaque intervalle $(k/b, (k+1)/b)$ ($0 \leq k \leq b-1$) alors pour tout $q \in \mathbb{R}$

$$\tau_\mu(q) = -\varphi(q) = 1 - q + \log_b \sum_{k=0}^{b-1} w_k^q.$$

L'énoncé qui suit améliore le Théorème 4 de [11] en ce sens qu'il utilise [10] pour obtenir des informations sur les fonctions de coupure associées au formalisme multifractal "centré" (voir Chapitre 1). Nous excluons le cas où W est égale à 1 presque partout. Le théorème 2.4.2 implique alors que $\alpha_{\inf} < \alpha_{\sup}$, où $\alpha_{\inf} = \inf \{-\tau'_+(q); q \geq 0\}$ et $\alpha_{\sup} = \sup \{-\tau'_-(q); q \leq 0\}$ ($\alpha_{\inf} = 0$ si $\varphi'(1) = 0$). Pour $0 \leq \alpha \leq \beta < \infty$, on définit

$$E_\mu(\alpha, \beta) = \left\{ t \in \text{supp}(\mu) : \alpha \leq \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \mu(B(t, r))}{\log r} \leq \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \mu(B(t, r))}{\log r} \leq \beta \right\}.$$

Théorème 2.4.4 *Supposons (H_1) , (H_2) et (H_3) vérifiées. Avec probabilité 1,*

1. $\tau_\mu(q) = b_\mu(q) = B_\mu(q) = \Lambda(q)$ pour tout $q \in \mathbb{R}$.
2. Pour tout $q \geq 0$ tel que $-\tau_{\mu+}'(q) > \alpha_{\inf}$ on a

$$\begin{aligned} 0 < -\tau_\mu(q^+)q + \tau_\mu(q) &\leq \dim E_\mu(-\tau_{\mu+}'(q^+), -\tau_{\mu+}'(q^-)) \\ &\leq \text{Dim } E_\mu(-\tau_{\mu+}'(q^+), -\tau_{\mu+}'(q^-)) \leq -\tau_{\mu+}'(q^-)q + \tau_\mu(q), \end{aligned}$$

et pour $q \leq 0$ tel que $-\tau_{\mu-}'(q) < \alpha_{\sup}$ on a

$$\begin{aligned} 0 < -\tau_\mu(q^-)q + \tau_\mu(q) &\leq \dim E_\mu(-\tau_{\mu-}'(q^+), -\tau_{\mu-}'(q^-)) \\ &\leq \text{Dim } E_\mu(-\tau_{\mu-}'(q^+), -\tau_{\mu-}'(q^-)) \leq -\tau_{\mu-}'(q^+)q + \tau_\mu(q), \end{aligned}$$

De plus, si $\tau_{\mu+}'(q)$ existe les deux formalismes multifractals sont valides en $-\tau_{\mu+}'(q)$.

3. $E_\mu(\alpha, \beta) = \emptyset$ pour tout (α, β) tel que $\alpha \leq \beta$ et $[\alpha, \beta] \not\subset [\alpha_{\inf}, \alpha_{\sup}]$.

Commentaires

(1) La partie difficile du Théorème 2.4.2 réside dans le point 1., et plus précisément dans le fait d'établir (2.22). En effet, sous l'hypothèse (H_3) on n'a pas de façon directe que $\Phi_{W,n}(q)$ est sous-additive à une petite perturbation près comme dans [Fan6] où $\log W$ vérifie une condition de Dini. On ne peut donc pas appliquer directement le théorème ergodique sous-multiplicatif de Kingman. Il faut travailler pour établir une propriété de sous-additivité.

(2) Des exemples de fonctions W satisfaisant (H_1) , (H_2) et (H_3) avec un ensemble dénombrable dense de points de saut sont donnés dans [11] (Section 5.1).

(3) La mesure $Q_\varepsilon \cdot \ell$ construite ici a une contrepartie dans $\mathcal{M}'$. Pour l'obtenir, on se donne une suite $(\theta_{k,l})_{\substack{k \geq 0 \\ 0 \leq l \leq b^k - 1}}$ de phases aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans $[0,1]$, et on considère

$$\tilde{Q}_\varepsilon(t) = \prod_{k=0}^n W(b^k(t + \theta_{k,l})) \quad (t \in [l/b^k, (l+1)/b^k], \varepsilon \in (b^{-n-1}, b^{-n}]). \quad (2.23)$$

On montre dans [18, 9] que sous une hypothèse faible de distorsions bornées sur $\log(W)$, on peut appliquer le Théorème 2.1.4 à $\tilde{Q} \cdot \ell$, et $-\varphi$ est alors la fonction $\tau_{\tilde{Q} \cdot \ell}$ sur l'intervalle $\mathcal{I}$ défini dans la Section 2.1.3.

(4) Le fait que le résultat du Théorème 2.4.4 soit valide presque sûrement pour tous les q améliore les résultats de [Ki2] et [Fan6] qui établissent un résultat pour chaque q presque sûrement. Mais ici, la permutation de quantificateurs est plus aisée que dans le cas des éléments de la classe $\mathcal{M}'$ car on réussit finalement à traiter individuellement chaque réalisation de μ . En quelque sorte, on peut se ramener à une situation déterministe. Ceci est dû au fait que, comme le montrent (2.20) et (2.23), la mesure μ est “moins” aléatoire qu'un élément de $\mathcal{M}'$, ce qui rend possible l'existence de la propriété de sous-additivité mentionnée en (1), propriété impossible à obtenir dans $\mathcal{M}'$.

(4) Les résultats s'étendent aux mesures ν obtenus comme limites faibles de sous suites de ν_n (voir la Section 6 de [11]).

(5) Nous conjecturons que l'égalité $\tau_\mu = -\varphi$ ne peut avoir lieu sur un intervalle non trivial que dans le cas considéré au point 3. du Théorème 2.4.3.

Chapitre 3

Ubiquité conditionnée et vitesse de renouvellement de la multifractalité

Nous avons vu dans la Section 0.2.2 que la notion d'ubiquité et le Théorème 0.2.1 jouent un rôle clé dans la description de la nature multifractale de certaines mesures ou fonctions dont les sauts sont répartis de façon homogène. La preuve du Théorème 0.2.1 repose alors de façon essentielle sur la monofractalité de la mesure de Lebesgue. Certains des exemples d'objets multifractals combinant chaos additif et chaos multiplicatif qui seront considérés dans le Chapitre 4 (et d'autres actuellement à l'étude) nécessitent que l'on établisse un résultat beaucoup plus fin que le Théorème 0.2.1. Ce résultat (Théorème 3.1.2) sera présenté dans la Section 3.1. Il combine ubiquité et chaos multiplicatif dans des ensembles tels que ceux décrits dans (11). Nous allons voir qu'il nécessite de comprendre plus en profondeur la structure des mesures obtenues comme limites de produits infinis de fonctions, au travers de la vitesse de renouvellement de leurs ensembles de niveau, notion qui sera détaillée dans la Section 3.2. A la fin de la Section 3.1, nous donnerons une jolie application du résultat d'ubiquité conditionnée qui permet de mêler le résultat le plus classique d'ubiquité sur l'approximation par les nombres rationnels et le résultat le plus classique d'analyse multifractale dans le cas des mesures multinômiales, c'est à dire le Théorème de Jarnick ([Ja]) et le Théorème d'Eggleston ([E]) sur la fréquence d'apparition des digits dans la décomposition b -adique.

Les résultats présentés ici ont été obtenus en collaboration avec S. Seuret.

3.1 Résultats d'ubiquité conditionnée

Nous allons travailler en dimension 1, mais les notions et les résultats présentés dans cette section le sont en dimension $d \geq 1$ dans [23].

Soient $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de points de $[0,1]$, et $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs décroissant vers 0.

Soit μ une mesure de Borel positive sur $[0,1]$.

Etant donnée une suite ε_n convergeant vers 0, $\rho \in (0,1]$ et $\alpha \geq 0$, nous voulons pour $\delta \geq 1$

estimer la dimension de Hausdorff de l'ensemble

$$S_\mu(\rho, \delta, \alpha, \varepsilon) = \bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N: \lambda_n^{\rho(\alpha + \varepsilon_n)} \leq \mu(B(x_n, \lambda_n^\rho)) \leq \lambda_n^{\rho(\alpha - \varepsilon_n)}} B(x_n, \lambda_n^\delta).$$

Quand μ est la mesure de Lebesgue ℓ , on n'observe rien d'autre que l'ensemble $S(\delta)$ examiné dans le Théorème 0.2.1. On voit immédiatement que si l'on remplace ℓ par une mesure multifractale, on définit une famille d'ensembles beaucoup plus riche. La notion d'ubiquité introduite dans la Section 0.2.2 est raffinée en ce sens que les couples (x_n, λ_n) sont sélectionnés comme devant satisfaire une certaine condition associée à la mesure μ (cette condition est vide dans le cas de ℓ). Dans [23] et dans la Section 3.1.3 on trouvera des interprétations de ce conditionnement par une mesure en termes de comportement asymptotiques des sommes décrites dans les exemples de la Section 0.2.1.

3.1.1 Majoration de $\dim S_\mu(\rho, \delta, \alpha, \varepsilon)$

Pour $j \geq 0$, soit

$$T_j = \left\{ n : 2^{-(j+1)} < \lambda_n \leq 2^{-j} \right\}. \quad (3.1)$$

La définition suivante introduit une propriété permettant une majoration optimale du nombre $\dim S_\mu(\rho, \delta, \alpha, \varepsilon)$. Cette propriété de *faible redondance* est un peu plus générale que celle considérée dans [Fal2].

Définition 3.1.1 *On dit que la famille $\{(x_n, \lambda_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système faiblement redondant s'il existe une suite d'entiers $(N_j)_{j \geq 0}$ telle que*

$$(i) \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log N_j}{j} = 0.$$

(ii) *Pour tout $j \geq 1$, T_j peut se décomposer en N_j sous-ensembles deux à deux disjoints (notés $T_{j,1}, \dots, T_{j,N_j}$) tels que pour chaque $1 \leq i \leq N_j$, la famille $\{B(x_n, \lambda_n) : n \in T_{j,i}\}$ ne contient que des intervalles disjoints.*

Nous avons besoin de la fonction τ_μ définie dans la Section 1.

Théorème 3.1.1 *Soient $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de points de $[0,1]$, et $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs décroissant vers 0. Soit μ une mesure de Borel positive et finie dont le support est $[0,1]$. Soient $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive convergeant vers 0, $\rho \in (0,1]$, $\delta \geq 1$ et $\alpha \geq 0$. Soit*

$$S_\mu(\rho, \delta, \alpha, \varepsilon) = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N: \lambda_n^{\rho(\alpha + \varepsilon_n)} \leq \mu(B(x_n, \lambda_n^\rho)) \leq \lambda_n^{\rho(\alpha - \varepsilon_n)}} B(x_n, \lambda_n^\delta). \quad (3.2)$$

Si $\{(x_n, \lambda_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système faiblement redondant, alors

$$\dim S_\mu(\rho, \delta, \alpha, \varepsilon) \leq \min \left(\frac{1 - \rho + \rho \tau_\mu^*(\alpha)}{\delta}, \tau_\mu^*(\alpha) \right). \quad (3.3)$$

De plus $S_\mu(\rho, \delta, \alpha, \varepsilon) = \emptyset$ si $\tau_\mu^(\alpha) < 0$.*

Remarque 7 (1) *On constate que les cas $\rho = 1$ et $\rho < 1$ donnent lieu à des situations très différentes. Nous allons y revenir.*

(2) *La preuve du Théorème 3.1.1 utilise certaines des idées nécessaires pour obtenir les Proposition 1.1.1 et 1.2.1. Ce résultat est une sorte de formalisme multifractal, mais pour l'ubiquité conditionnée.*

3.1.2 Minoration de $\dim S_\mu(\rho, \delta, \alpha, \varepsilon)$

Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in (0, 1]$. Ils vont respectivement jouer le rôle d'un exposant de Hölder pour μ et de $\dim_*(m)$ pour une mesure auxiliaire m .

Nous allons donner des conditions sous lesquelles l'inégalité (3.3) peut être renversée (voir le Théorème 3.1.2). C'est l'objet des deux définitions qui suivent. Elles reflètent les natures assez différentes des cas $\rho = 1$ et $\rho < 1$.

La notion de *système d'ubiquité hétérogène* généralise celle de *système d'ubiquité* considérée dans [DodRyVi].

Nous fixons un entier $b \geq 2$ et utilisons les notations de la Section 1. Si $x \in [0, 1]$ et $j \geq 1$ nous notons $w_j(x)$ l'élément w de A^* tel que $I_j(x) = I_w$.

Définition 3.1.2 *On dit que le système $\{(x_n, \lambda_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système d'ubiquité 1-hétérogène par rapport à (μ, α, β) si les conditions (1-4) sont remplies*

(1) *Il existe deux fonctions continues ϕ et ψ définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que les propriétés suivantes sont vérifiées:*

- $\phi(0) = \psi(0) = 0$, $r \mapsto r^{-\phi(r)}$ et $r \mapsto r^{-\psi(r)}$ sont décroissantes au voisinage de 0^+ ,
- $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-\phi(r)} = +\infty$,
- $\forall \varepsilon > 0$, $r \mapsto r^{\varepsilon - \phi(r)}$ est croissante près de 0,
- ϕ et ψ sont telles que l'on a (2), (3) et (4).

(2) *Il existe une mesure positive m de support égal à $[0, 1]$ telle que*

- *m -presque tout $y \in [0, 1]$ appartient à $\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} B(x_n, \frac{\lambda_n}{2})$, c'est à dire*

$$m \left(\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} B\left(x_n, \frac{\lambda_n}{2}\right) \right) = \|m\|. \quad (3.4)$$

- *On a :*

$$\begin{cases} \text{Pour } m\text{-presque tout } y \in [0, 1]^d, \exists j(y), \forall j \geq j(y), \\ \forall w \in A^j \text{ tel que } \delta(w, w_j(y)) \leq 1, \mathcal{P}_1^1(I_w) \text{ est vérifiée,} \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\mathcal{P}_M^1(I)$ est vraie pour l'ensemble I et le nombre $M \geq 1$ quand

$$\frac{1}{M} |I|^{\alpha + \psi(|I|)} \leq \mu(I) \leq M |I|^{\alpha - \psi(|I|)}. \quad (3.6)$$

- *On :*

$$\begin{cases} \text{Pour } m\text{-presque tout } y \in [0, 1]^d, \exists j(y), \forall j \geq j(y), \\ \forall w \in A^j \text{ tel que } \delta(w, w_j(y)) \leq 1, \mathcal{D}_1^m(I_w) \text{ est vérifiée,} \end{cases} \quad (3.7)$$

où $\mathcal{D}_M^m(I)$ $M > 0$ est vraie pour l'ensemble I et le nombre $M > 0$ quand

$$m(I) \leq M |I|^{\beta - \phi(|I|)}. \quad (3.8)$$

(3) (Auto-similarité de m) *Pour tout intervalle b -adique de L de $[0, 1]$, soit f_L l'application affine croissante de L dans $[0, 1]$. Il existe une mesure m^L sur L , équivalente à la restriction $m|_L$ de m à L , telle que (3.7) est vraie pour $m^L \circ f_L^{-1}$ comme pour m .*

Pour tout $n \geq 1$, soit

$$E_n^L = \left\{ x \in L : \begin{array}{l} \forall j \geq n + \log_b(|L|^{-1}), \\ \forall w \in A^j \text{ tel que } \delta(w, w_j(y)) \leq 1, m^L(I_w) \leq \left(\frac{|I_w|}{|L|}\right)^{\beta - \varphi\left(\frac{|I_w|}{|L|}\right)} \end{array} \right\}.$$

Les ensembles E_n^L forment une suite croissante dans $[0,1]$, et d'après (3.7) et **(3)**, $\bigcup_{n \geq 1} E_n^L$ est de m^L -mesure pleine. Soit alors

$$n_L = \inf \left\{ n \geq 1 : m^L(E_n^L) \geq \frac{1}{2} \|m^L\| \right\}.$$

Ce nombre mesure la vitesse de croissance, ou de renouvellement si l'on considère les générations successives d'intervalles L , des ensembles E_n^L .

Si $x \in (0,1)$ et $j \geq 1$ définissons

$$\mathcal{B}_j(x) = \left\{ B(x_n, \lambda_n) : x \in B\left(x_n, \frac{\lambda_n}{2}\right) \text{ et } \lambda_n \in (b^{-(j+1)}, b^{-j}] \right\}.$$

Notons que cet ensemble peut être vide. Alors, si $\delta > 1$ et $B(x_n, \lambda_n) \in \mathcal{B}_j(x)$, examinons $B(x_n, \lambda_n^\delta)$. Cette boule contient une infinité d'intervalles b -adiques. Parmi eux, sélectionnons l'ensemble $\mathcal{B}_j^\delta(x)$ de ceux de diamètre maximal.

(4) (Contrôle de la vitesse de renouvellement n_L et de la masse $\|m^L\|$) Il existe une partie $\mathcal{D}$ de $(1, \infty)$ telle que pour tout $\delta \in \mathcal{D}$, pour m -presque tout $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} B\left(x_n, \frac{\lambda_n}{2}\right)$, il existe une infinité de nombres entiers j tels qu'il existe $L \in \mathcal{B}_j^\delta(x)$ pour lequel

$$n_L \leq \log_b(|L|^{-1})\varphi(|L|) \quad (\text{i.e. } |L|^{\varphi(|L|)} \leq b^{-n_L}). \quad (3.9)$$

$$|L|^{\varphi(|L|)} \leq \|m^L\|. \quad (3.10)$$

Remarque 8 (1) **(1)** est une hypothèse technique. Dans **(2)**, (3.7) donne une minoration de $\dim_*(m)$. (3.5) impose un contrôle du comportement local de μ m -presque partout. Alors, (3.4) est une condition naturelle sur m pour que l'on puisse décrire des propriétés d'ubiquité de $\{(x_n, \lambda_n)\}_n$ conditionnées par μ . Elle est automatiquement vérifiée pour peu que l'on sache que $\limsup_{n \rightarrow \infty} B(x_n, \lambda_n) \supset [0,1]$. **(3)** est une propriété d'autosimilarité requise sur m et **(4)** contrôle à quelle vitesse un certain ensemble de niveau des copies m^L de m grossit. Nous y reviendrons dans la Section 3.2. L'association de **(3)** et **(4)** remplace la propriété de monofractalité invoquée dans les résultats classiques d'ubiquité.

(2) Si μ est une mesure strictement monofractale d'exposant 1, typiquement la mesure de Lebesgue, les propriétés **(1-4)** sont vérifiées avec $\alpha = \beta = 1$ et $\mu = m$ dès que (3.4) est vérifiée. On est sous les conditions requises dans le Théorème 0.2.1, qui devient un cas particulier du Théorème 3.1.2.

(3) Pour certaines mesures m , les propriétés **(3)** et **(4)** sont vérifiées pour tout $\{(x_n, \lambda_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et pour $\mathcal{D} = (1, \infty)$. C'est que l'on a la propriété plus forte: **(4')** Il existe un entier J_m tel que pour tout $j \geq J_m$, pour tout intervalle b -adique box, (3.9) et (3.10) sont vraies pour un bon choix de (ϕ, ψ) . C'est le cas des mesures quasi-Bernoulli décrites dans la Section 2.1.4 et aussi des

mesures décrites dans la Section 2.4 si la fonction $\log W$ est Höldérienne. Nous y reviendrons dans la Section 3.2.

La propriété faible (4) est nécessaire lorsque l'on considère une mesure m appartenant à la classe $\mathcal{M}'$ décrite dans la Section 2.1.

Pour renverser l'inégalité (3.3) dans le cas $\rho < 1$, il faut modifier les conditions (2) et (4) de la façon suivante.

Définition 3.1.3 Soit $\rho < 1$. On dit que le système $\{(x_n, \lambda_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système d'ubiquité ρ -hétérogène par rapport à (μ, α, β) si les conditions suivantes sont satisfaites:

(1) est la même que dans la Définition 3.1.2.

(2(ρ)) Il existe une mesure m dont le support est $[0, 1]$ et qui possède les propriétés suivantes:

- Il existe une fonction continue croissante χ définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\chi(0) = 0$, $r \mapsto r^{-\chi(r)}$ est décroissante au voisinage de 0^+ , $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-\chi(r)} = +\infty$, et $\forall \varepsilon, \theta, \gamma > 0$, $r \mapsto r^{\varepsilon - \theta \varphi(r) - \gamma \chi(r)}$ est croissante au voisinage de 0.

De plus, pour m -presque tout point y , il existe une infinité d'entiers $\{j_i(y)\}_{i \in \mathbb{N}}$ tels que: l'intervalle $B(y, b^{-\rho j_i(y)})$ contient au moins $b^{j_i(y)(1-\rho-\chi(b^{-j_i(y)}))}$ points x_n tels que tous les couples (x_n, λ_n) correspondants satisfont

$$\lambda_n \in [b^{-j_i(y)+1}, b^{-j_i(y)(1-\chi(b^{-j_i(y)}))}], \quad (3.11)$$

quels que soient $n' \neq n$, $B(x'_n, \lambda'_n) \cap B(x_n, \lambda_n) = \emptyset$.

- Les propriétés (3.5) et (3.7) de (2) sont satisfaites

(3) est la même que dans la Définition 3.1.2.

(4') Il existe un entier J_m tel que pour tout $j \geq J_m$, pour tout intervalle b -adique L de génération j , (3.9) et (3.10) sont vérifiées. En particulier (4) est vérifiée avec $\mathcal{D} = (1, +\infty)$.

Remarque 9 (1) La condition (3.11) signifie en gros que pour m -presque tout y , pour une infinité d'échelles j , il y a approximativement $b^{j(1-\rho)}$ couples "disjoints" (x_n, λ_n) tels que $\lambda_n \sim b^{-j}$ dans $B(y, b^{-\rho j})$. C'est une propriété beaucoup plus forte que (3.4).

(2) La propriété (4') exige une forte uniformité du fait de (3.11). Elle pourrait être affaiblie de la façon suivante: il existe une partie D de $(1, \infty)$ telle que pour tout $\delta \in \mathcal{D}$, pour m -presque tout y , la suite j_i de (2(ρ)) peut être choisie telle que pour tout $B(x_n, \lambda_n)$ participant à (3.11), parmi les intervalles b -adiques L de diamètre maximal inclus dans $B(x_n, \lambda_n^\delta)$, au moins un satisfait (3.9) et (3.10).

Nous avons conservé (4') car nous ne connaissons pas d'exemple de système $\{(x_n, \lambda_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et de mesure m tels que (2(ρ)) et la version faible de (4') soient vraies dans que (4') le soit.

Il nous reste à introduire une propriété liée à la définition précédente: soit $\rho < 1$. Pour tout ensemble I et tout constant $M > 1$, on dit que $\mathcal{P}_M^\rho(I)$ est vérifié si

$$\frac{1}{M} |I|^{\alpha + \psi(|I|) + 2\alpha\chi(|I|)} \leq \mu(I) \leq M |I|^{\alpha - \psi(|I|) - 2\alpha\chi(|I|)}. \quad (3.12)$$

La dépendance par rapport à ρ est cachée dans le terme en χ qui sert dans (3.11).

Les notations suivantes vont nous servir dans les énoncés des résultats.

Pour un système d'ubiquité $\{(x_n, \lambda_n)\}$ ρ -hétérogène ($\rho \in (0,1]$) par rapport à (μ, α, β) on définit les suites $\varepsilon_M^\rho = (\varepsilon_{M,n}^\rho)_{n \geq 1}$ indexées par les réels $M \geq 1$

$$\forall n \geq 1, \lambda_n^{\alpha + \varepsilon_{M,n}^\rho} = M(2\lambda_n)^{\alpha + \psi(2\lambda_n) + 2\alpha\chi(2\lambda_n)}, \quad (3.13)$$

avec la convention $\chi \equiv 0$ si $\rho = 1$.

Si $\widehat{\delta} = (\delta_n)_{n \geq 1} \in [1, \infty)^{\mathbb{N}^*}$, $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1} \in (0, \infty)^{\mathbb{N}^*}$, $\rho \in (0,1]$ et $M \geq 1$, on définit

$$\widehat{S}_\mu(\rho, \widehat{\delta}, \alpha, \varepsilon) = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N: \lambda_n^{\rho(\alpha + \varepsilon_n)} \leq \mu(B(x_n, \lambda_n^\rho)) \leq \lambda_n^{\rho(\alpha - \varepsilon_n)}} B(x_n, \lambda_n^{\delta_n}). \quad (3.14)$$

Donc si $\widehat{\delta}$ est la suite constante égale à un $\delta \geq 1$, l'ensemble $\widehat{S}_\mu(\rho, \widehat{\delta}, \alpha, \varepsilon)$ coïncide avec l'ensemble $S_\mu(\rho, \delta, \alpha, \varepsilon)$ défini dans (3.2) et considéré dans le Théorème 3.1.1.

Théorème 3.1.2 *Soit μ une mesure de Borel positive et finie dont le support est $[0,1]$. Soient $\rho \in (0,1]$, $\alpha > 0$ et $\beta \in (0,1]$ deux nombres dans $(0,1]$. Soient $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0,1]$, et $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs décroissant vers 0.*

Supposons que $\{(x_n, \lambda_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système d'ubiquité ρ -hétérogène par rapport à (μ, α, β) . Soit $\widehat{\mathcal{D}}$ l'ensemble des points δ de $\mathbb{R}$ qui sont limite croissante d'éléments de $(\{1\} \cup \mathcal{D})^{\mathbb{N}^}$ (dans le cas $\rho < 1$, $\mathcal{D} = (1, +\infty)$).*

Il existe une constante $M \geq 1$ telle que pour tout $\delta \in \widehat{\mathcal{D}}$, on peut construire une suite croissante $\widehat{\delta}$ convergeant vers δ et une mesure de Borel positive $m_{\rho, \delta}$ telle que $m_{\rho, \delta}(\widehat{S}_\mu(\rho, \widehat{\delta}, \alpha, \varepsilon_M^\rho)) > 0$, et pour tout $x \in \widehat{S}_\mu(\rho, \widehat{\delta}, \alpha, \varepsilon_M^\rho)$,

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{m_{\rho, \delta}(B(x, r))}{r^{D(\beta, \rho, \delta) - \xi_{\rho, \delta}(r)}} < \infty, \quad (3.15)$$

où

$$\forall \rho \in (0,1], \quad D(\beta, \rho, \delta) = \min\left(\frac{1 - \rho + \rho\beta}{\delta}, \beta\right), \quad (3.16)$$

$$\forall r > 0, \quad \xi_{\rho, \delta}(r) = 5\varphi(r) + \chi(r). \quad (3.17)$$

(il a été convenu que $\chi \equiv 0$ si $\rho = 1$).

De plus $\widehat{\delta}$ peut être choisie égale à la suite constante $(\delta)_{n \geq 1}$ si $\delta \in \{1\} \cup \mathcal{D}$.

Remarque 10 *Comme dans la preuve du Théorème 0.2.1, on construit simultanément une “bonne mesure” $m_{\rho, \delta}$ sur un “bon” ensemble de Cantor inclus dans $\widehat{S}_\mu(\rho, \widehat{\delta}, \alpha, \varepsilon_M^\rho)$. L'ingrédient nouveau est l'introduction du conditionnement par une mesure multifractale μ . La perte de la monofractalité nécessite alors d'utiliser la propriété d'auto-similarité (3) et d'assurer le contrôle (4) sur les copies de la mesure m . Quand on travaille avec des mesures déterministes de type quasi-Bernoulli, ces propriétés sont vérifiées automatiquement. Pour les mesures aléatoires telles que les éléments de $\mathcal{M}$ décrits dans la Section 2.1, c'est non trivial.*

On a également besoin de contrôler à quelle vitesse la densité logarithmique de la mesure m s'approche de sa limite dans un ensemble de niveau $E_m(\alpha)$.

Ces points seront discutés dans la Section 3.2.

Si ξ est une fonction continue croissante sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $\xi(0) = 0$, on note $\mathcal{H}^\xi$ la mesure de Hausdorff sur $\mathbb{R}$ associée à la fonction de jauge ξ , c'est à dire la mesure extérieure définie sur les parties de $\mathbb{R}$ par

$$\mathcal{H}^\xi(S) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \inf \sum_i \xi(|C_i|),$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les collections dénombrables $\{C_i\}$ d'ensembles de diamètre inférieur ou égal à η et dont l'union recouvre E .

Corollaire 3.1.1 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1.2, il existe $M \geq 1$ tel que pour tout $\delta \in \widehat{\mathcal{D}}$, il existe une suite croissante $\widehat{\delta}$ convergeant vers δ telle que $\mathcal{H}^{\xi_{\rho,\delta}}(\widehat{S}_\mu(\rho, \widehat{\delta}, \alpha, \varepsilon_M^\rho)) > 0$. De plus $\widehat{\delta}$ peut être choisie égale à la suite constante $(\delta)_{n \geq 1}$ si $\delta \in \{1\} \cup \mathcal{D}$.*

En particulier, $\dim \widehat{S}_\mu(\rho, \widehat{\delta}, \alpha, \varepsilon_M^\rho) \geq D(\beta, \rho, \delta)$.

Quand $\rho < 1$, $D(\beta, \rho, \delta)$ reste constant et égal à β tant que δ reste dans $[1, \frac{1-\rho+\rho\beta}{\beta}]$. Nous décidons d'appeler ceci un *phénomène de saturation*. Puis, dès que $\frac{1-\rho+\rho\beta}{\beta} < \delta$, on retrouve une décroissance en $\frac{1}{\delta}$ conforme à la situation usuelle dans les résultats d'ubiquité.

Corollaire 3.1.2 *Soit $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite positive convergent vers 0. Sous les hypothèses des Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2, si la famille $\{(x_n, \lambda_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système d'ubiquité faiblement redondant et ρ -hétérogène par rapport à $(\mu, \alpha, \tau_\mu^*(\alpha))$, il existe une constante $M \geq 1$ telle que pour tout $\delta \in [\frac{1-\rho+\rho\tau_\mu^*(\alpha)}{\tau_\mu^*(\alpha)}, +\infty) \cap \widehat{\mathcal{D}}$, il existe une suite croissante $\widehat{\delta}$ convergeant vers δ et telle que*

$$\dim \left(\widehat{S}_\mu(\rho, \widehat{\delta}, \alpha, \varepsilon_M^\rho) \right) = \dim \left(\widehat{S}_\mu(\rho, \widehat{\delta}, \alpha, \varepsilon_M^\rho) \setminus \bigcup_{\delta' > \delta} S_\mu(\rho, \delta', \alpha, \varepsilon) \right) = D(\tau_\mu^*(\alpha), \rho, \delta).$$

De plus $\widehat{\delta}$ peut être choisie égale à la suite constante $(\delta)_{n \geq 1}$ si $\delta \in \{1\} \cup \mathcal{D}$.

3.1.3 Une application à l'approximation Diophantienne

Un théorème classique d'ubiquité dans l'intervalle $[0,1]$ est le théorème de Jarnick [Ja] à propos de l'approximation par les rationnels. Il s'agit du Théorème 0.2.1 dans le cas où les couples (x_n, λ_n) sont les $(p/q, 1/q^2)_{q \in \mathbb{N}^*, 0 \leq p \leq q}$, combiné avec le fait que dans ce cas la minoration donnée par le Théorème 0.2.1 est une égalité.

Parallèlement à cela, une autre préoccupation classique, et qui remonte aux travaux de Besicovitch ([Bes]) est de mesurer la dimension Hausdorff de l'ensemble des points dont la décomposition dans une base donnée vérifie certaines propriétés. Dans la Section 0.2.1 nous avons considéré à l'exemple A le cas de la fréquence d'apparition d'un digit. Les résultats dans ce cas sont connus depuis [E]. Il sont intimement liés à l'analyse multifractale des mesures multinômiales.

Soit μ la mesure multinômiale engendrée par les paramètres $\beta_0, \dots, \beta_{b-1} \in (0,1)$. Il est connu que μ -presque partout on a $\mu(I_n(x)) \approx b^n \sum_{i=0}^{b-1} \beta_i \log_b \beta_i$ car $\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{i\}}(x_k) \approx \beta_i n$.

Posons $\alpha = -\sum_{i=0}^{b-1} \beta_i \log_b \beta_i$. On vérifie que $(p/q, 1/q^2)_{q \in \mathbb{N}^*, 0 \leq p \leq q}$ est un système d'ubiquité faiblement redondant et 1-hétérogène par rapport à (μ, α, α) , et que dans ce cas $\alpha = -\tau'_\mu(1) = \tau_\mu^*(\alpha)$. On peut donc utiliser le Corollaire 3.1.2. Mais la décomposition de α faite précédemment grâce à la fréquence d'apparition des digits permet d'écrire le résultat suivant qui mélange les points de vues de Jarnick et de Besicovitch, au sens où les nombres rationnels approchant un

point à une certaine vitesse sont en plus assujettis à avoir un certain type de décomposition en base b .

Pour $x \in [0,1]$, $n \geq 1$ et $i \in \{0, \dots, b-1\}$ on note $\phi_{i,n}(x)$ le nombre $\frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{i\}}(x_k)}{n}$.

Théorème 3.1.3 Soit $(\beta_0, \dots, \beta_{b-1}) \in (0,1)^b$ tel que $\sum_{i=0}^{b-1} \beta_i = 1$. Pour $\delta \geq 1$ soit

$$E_\delta^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{b-1}} = \left\{ x \in [0,1] : \begin{array}{l} \text{il existe une infinité de couples d'entiers } (p_n, q_n) \text{ tels que} \\ |x - p_n/q_n| \leq q_n^{-2\delta} \text{ et} \\ \forall i \in \{0,1, \dots, b-1\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{i, [\log_b q_n^2]}(p_n/q_n) = \beta_i \end{array} \right\}.$$

On a

$$\dim E_\delta^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{b-1}} = \dim E_\delta^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{b-1}} \setminus \bigcup_{\delta' > \delta} E_{\delta'}^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{b-1}} = \frac{-\sum_{i=0}^{b-1} \beta_i \log_b \beta_i}{\delta}.$$

On obtient en particulier un découpage fin de $E_1^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{b-1}}$.

3.2 Vitesse de renouvellement des ensembles de niveaux pour certains chaos multiplicatifs auto-similaires en loi

Les propriétés (3) et (4) des Définitions 3.1.2 et 3.1.3 sont cruciales. Il semble que la vitesse de renouvellement, ou de croissance, des ensembles de niveaux des copies d'une mesures auto-similaire en loi au sens de la Proposition 2.1.1 n'ait pas été étudiée jusqu'ici. Nous allons donner les résultats obtenus dans [24] pour les cascades canoniques et les cascades de Poisson composées d'une part (voir la Section 2.1), et ceux obtenus pour les mesures de Gibbs aléatoires décrites dans la Section 2.4 d'autre part. Des résultats complémentaires sont obtenus dans [24]. Ils mettent en évidence des classes de mesures auxquelles on peut appliquer les théorèmes d'ubiquité conditionnée (voir aussi la dernière section de [23]).

Si l'on revient à la Proposition 2.1.1, étant donnée une mesure m qui est soit dans $\mathcal{M}'$, soit une mesure de Gibbs aléatoire comme dans la Section 2.4, les mesures m^L à considérer dans (3) et (4) sont justement les mesures m^{I_w} discutées dans la Proposition 2.1.1.

Dès lors, au regard des résultats de la Section 3.1, ce que l'on souhaite construire, ce sont des systèmes d'ubiquités hétérogènes par rapport à $(\mu, \alpha, \tau_\mu^*(\alpha))$ pour tous les α tels que $\tau_\mu^*(\alpha) > 0$, où μ est de l'un des types décrits dans le paragraphe précédent. Il sera commode de représenter les α sous la forme $-\tau'_\mu(q)$. La mesure m alors associée à la Définition 3.1.2 sera du même type que μ . Précisons cela.

Pour la suite de cette section, nous allons considérer

- un élément μ de $\mathcal{M}'$ qui est une cascades canonique ou une cascade de Poisson composée auto-similaires en loi, et presque sûrement, pour tout $q \in \mathcal{J}$ et la mesure μ_q construite comme dans le point (3) du commentaire de la Section 2.1.3. Les mesures $\mu_q^{I_w}$ associées à μ_q dans la Proposition 2.1.1 sont toutes définies simultanément, et nous définissons sur $[0,1]$ les mesures $\mu_q^w = \mu_q^{I_w} \circ f_{I_w}^{-1}$. Pour $m = \mu_q$ dans la propriété (3), elles jouent le rôle des m^{I_w} .

• Une mesure ν obtenue comme limite faible presque sûre d'une suite $\nu_n = \mu_n / \|\mu_n\|$ construite comme dans la Section 2.4 à partir d'une fonction W telle que $\log W$ est höldérienne. Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que ν existe, pour tout $q \in \mathbb{R}$, on choisit une limite faible ν_q de la suite $\nu_{q,n}$ construite comme ν_q mais avec la fonction W^q . Pour tout $j \geq 1$ et $q \in \mathbb{R}$, on désigne par $\nu^{(j)}$ et $\nu_q^{(j)}$ les mesures obtenues comme ν et ν_q , mais avec les phases $(\varphi_n)_{n \geq j}$. Pour $m = \nu_q$ dans la propriété **(3)**, les mesures $\nu_q^{(|w|)} \circ f_{I_w}$ jouent le rôle des m^{I_w} .

Nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 3.2.1 Soient λ et ρ deux mesures de Borel positives et finies sur $[0,1]$, $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite positive tendant vers 0, et $\beta > 0$. Soit alors pour $n \geq 1$ l'ensemble

$$E_{\lambda,n}(\beta, \tilde{\varepsilon}) = \bigcap_{j \geq n} \left\{ x \in (0,1) : \forall w \in A^j, \delta(w, w_j(x)) \leq 1, b^{-j(\beta + \varepsilon_j)} \leq \lambda(I_w) \leq b^{-j(\beta - \varepsilon_j)} \right\}.$$

Si ρ est portée par $E_{\lambda}(\beta, \tilde{\varepsilon}) = \bigcup_{n \geq 1} E_{\lambda,n}(\beta, \tilde{\varepsilon})$, on définit

$$n(\rho, \lambda, \tilde{\varepsilon}, \beta) = \inf \left\{ n \geq 1 : \rho(E_{\lambda,n}(\beta, \tilde{\varepsilon})) \geq \frac{1}{2} \|\rho\| \right\},$$

la vitesse de croissance à laquelle $E_{\lambda,n}(\beta, \tilde{\varepsilon})$ atteint la moitié de la taille de $E_{\lambda}(\beta, \tilde{\varepsilon})$ au sens de ρ .

La propriété décrite par **(3)** et **(4)** demande un contrôle de cette vitesse de croissance pour $\lambda = \rho = m^L \circ f_L^{-1}$.

Remarque 11 Dans la définition 4.1.1, nous utiliserons l'ensemble plus gros que $E_{\lambda}(\beta, \tilde{\varepsilon})$ mais inclus dans $\mathcal{E}_{\mu}(\alpha)$, et défini par

$$\tilde{E}_{\lambda}(\beta) = \bigcup_{\tilde{\varepsilon}} E_{\lambda}(\beta, \tilde{\varepsilon}).$$

3.2.1 Le cas des mesures de Gibbs aléatoires ν_q

Nous avons obtenus les résultats suivants dans [24].

Théorème 3.2.1 Soient $\eta > 0$. Soit $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite tendant vers 0 et telle que $\varepsilon_n \geq n^{-1/8} \log(n)^{1/2+\eta}$. Soit $\gamma > 1$. Pour tout compact K de $\mathbb{R}$, avec probabilité 1, pour j assez grand on a

$$\max \left(n(\nu_q^{(j)}, \nu^{(j)}, \tilde{\varepsilon}, -\tau'_\nu(q)), n(\nu_q^{(j)}, \nu_q^{(j)}, \tilde{\varepsilon}, \tau_\nu^*(-\tau'_\nu(q))) \right) \leq \mathcal{S}_j,$$

où $\mathcal{S}_j = \lceil \exp(\sqrt{\gamma \log(j)}) \rceil$.

On en déduit le résultat suivant, qui sera commenté à la fin de la prochaine section.

Corollaire 3.2.1 Soient $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de points de $[0,1]$ et $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement positive décroissant vers 0. Soit $\rho \in (0,1)$. Avec probabilité 1, pour tout $q \in \mathbb{R}$, si (3.4) (resp. (3.11)) est vérifiée pour $m = \nu_q$, alors $\{x_n, \lambda_n\}$ forme un système d'ubiquité 1 (resp. ρ)-hétérogène par rapport à $(\nu, -\tau'_\nu(q), \tau_\nu^*(-\tau'_\nu(q)))$. De plus, on peut choisir $\varphi(t) = \psi(t) = |\log_b(t)|^{-\frac{1}{8}} (\log |\log_b(t)|)^{\frac{1}{2}+\eta}$ avec $\eta > 0$ et $\mathcal{D} = (1, \infty)$.

3.2.2 Le cas des $[0,1]$ -martingales μ_q

Dans le cas de l'élément μ de $\mathcal{M}'$, nous avons obtenu les résultats suivants dans [24]. Le premier est à comparer au Théorème 3.2.1. Le second est un raffinement du premier. Les deux autres sont consacrés à la vérification des propriétés de la Définition 3.1.2.

Théorème 3.2.2 *Soient $\eta > 0$ et $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite tendant vers 0 et telle que $\varepsilon_n \geq n^{-1/2} \log(n)^{1/2+\eta}$. Soit W la loi du poids définissant la cascade. Supposons qu'il existe $A > 1$ tel que $A^{-1} \leq W$ (resp. $W \leq A$). Soit K un sous-intervalle compact de $\mathcal{J} \cap \mathbb{R}_+$ (resp. $\mathcal{J} \cap \mathbb{R}_-$).*

Avec probabilité 1, pour j assez grand, pour tout $q \in K$ et $w \in \mathcal{A}^j$,

$$\max \left(n(\mu_q^w, \mu^w, \tilde{\varepsilon}, -\tau'_\mu(q)), n(\mu_q^w, \mu_q^w, \tilde{\varepsilon}, \tau_\mu^*(-\tau'_\mu(q))) \right) \leq \mathcal{S}_j$$

avec $\mathcal{S}_j = \left\lceil \exp \left((j \log(j)^\eta)^{\frac{1}{1+2\eta}} \right) \right\rceil$.

Si ε_n est choisi supérieur à $\log(n)^{-\eta}$, la même conclusion vaut avec $\mathcal{S}_j = \lceil j \log(j)^{\eta'} \rceil$ si $\eta' > 2\eta$.

Du point de vue de l'ubiquité conditionnée, les vitesses de renouvellement $\mathcal{S}_j$ du Théorème 3.2.2 sont trop lentes. Il nous faut les améliorer. On y perd l'uniformité par rapport aux mots w .

Théorème 3.2.3 *Soient $\kappa > 0$ et $\eta > 0$. Soit $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite tendant vers 0 et telle que $\varepsilon_n \geq n^{-1/2} \log(n)^{1/2+\eta}$. Pour $j \geq 2$ soit $\mathcal{S}_j = \lceil j \log(j)^{-\kappa} \rceil$.*

1. *Pour tout $q \in \mathcal{J}$, avec probabilité 1, la propriété $\mathcal{P}(q)$ est vérifiée, où $\mathcal{P}(q)$ est: pour μ_q -presque tout $x \in [0,1]$, si j est assez grand, pour $w = w_j(x)$ on a*

$$\max \left(n(\mu_q^w, \mu^w, \tilde{\varepsilon}, -\tau'_\mu(q)), n(\mu_q^w, \mu_q^w, \tilde{\varepsilon}, \tau_\mu^*(-\tau'_\mu(q))) \right) \leq \mathcal{S}_j.$$

2. *Avec probabilité 1, $\mathcal{P}(q)$ est vérifiée pour presque tout $q \in \mathcal{J}$.*

Pour le troisième résultat, nous renvoyons à la Définition 3.1.2 pour certaines notions. Soient $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de points de $[0,1]$ et $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement positive décroissant vers 0.

Pour $t \in (0,1)$, $k \geq 1$ et $r \in (0,1)$, soit

$$\mathcal{B}_{k,r}(t) = \{B(x_n, \lambda_n) : t \in B(x_n, r\lambda_n), \lambda_n \in (b^{-(k+1)}, b^{-k}]\}.$$

Notons que cet ensemble peut être vide. Alors, si $\delta > 1$ et $B(x_n, \lambda_n) \in \mathcal{B}_{k,1/2}(t)$, soit $\mathcal{B}_k^\delta(t)$ l'ensemble des intervalles b -adique de taille maximale inclus dans $B(x_n, \lambda_n^\delta)$.

Théorème 3.2.4 *Supposons que $(0,1) \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} B(x_n, \lambda_n/4)$.*

Soient $\kappa, \eta > 0$ et $\alpha > 1$. Pour $j \geq 2$, soient $\mathcal{S}_j = j \log(j)^{-\kappa}$ et $\rho_j = \log(j)^\alpha$. Soit de plus $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite tendant vers 0 et telle que $\varepsilon_n \geq n^{-1/2} \log(n)^{1/2+\eta}$. Soit enfin $\mathcal{D}$ une partie au plus dénombrable de $(1, \infty)$.

1. *Pour tout $q \in \mathcal{J}$, avec probabilité 1, pour tout $\delta \in \mathcal{D}$, la propriété $\mathcal{P}(\delta, q)$ est vérifiée, où $\mathcal{P}(\delta, q)$ est: pour μ_q -presque tout x , il existe une infinité d'entiers k tels que $\mathcal{B}_{k,1/2}(t) \neq \emptyset$ et il existe $u \in \{v \in \mathcal{A}^* : \exists I \in \mathcal{B}_k^\delta(t), I = I_v\}$ tel que*

$$GS(\mu_q^u, \mu_q^u, \tau'_\mu(q)q - \tau_\mu(q), N, \tilde{\varepsilon}) \leq \mathcal{S}_{|u|}, \quad \text{et} \quad \|\mu_q^u\| \geq b^{-\rho_{|u|}}.$$

2. Avec probabilité 1, pour presque tout $q \in \mathcal{J}$, $\mathcal{P}(\delta, q)$ est vérifiée pour tout $\delta \in \mathcal{D}$.

Corollaire 3.2.2 *Supposons les hypothèses du Théorème 3.2.4 satisfaites. Avec probabilité 1, pour presque tout $q \in \mathcal{J}$, $\{x_n, \lambda_n\}$ forme un système d'ubiquité 1-hétérogène par rapport à $(\mu, -\tau'_\mu(q), \tau_\mu^*(-\tau'(q)))$. De plus, étant donné $\kappa > 0$ et $\gamma > 1/2$, on peut choisir $\varphi(t) = (\log |\log(t)|)^{-\kappa}$ et $\psi_\gamma(t) = |\log(t)|^{-1/2} (\log |\log(t)|)^\gamma$.*

Commentaires

(1) Dans le cas des mesures de Gibbs ν_q interprétées comme la mesure m de la Définition 3.1.2, les mesures $m^{I_w} \circ f_{I_w}^{-1}$ sont toutes identiques, et données par $\nu_q^{|w|}$. Le Théorème 3.2.1 donne une information uniforme sur les mots w d'une même génération, avec une vitesse de croissance suffisamment faible pour que l'on en déduise le Corollaire 3.2.1, qui permet d'appliquer sans restriction les résultats d'ubiquité conditionnée dès que $\limsup B(x_n, \lambda_n) = [0, 1]$.

(2) Dans le cas des mesures de Gibbs ν_q interprétées comme la mesure m de la Définition 3.1.2, les mesures $m^{I_w} \circ f_{I_w}^{-1}$ sont données par les $\mu_q^{|w|}$ qui sont mutuellement indépendantes dans le cas de la cascade canonique, et le sont presque dans le cas de la cascade de Poisson composée du fait de la propriété **(P4)**. En ce sens ces mesures sont plus aléatoires que les ν_q , et c'est ce qui explique que dans le Théorème 3.2.2, qui est l'analogue du Théorème 3.2.1, on obtient des vitesses de croissance plus lentes. On comprend bien que le fait que les mesures $\mu_q^{|w|}$ soient indépendantes se traduit par une plus grande attente pour que les vitesses de croissance des ensembles de niveau associés à ces mesures se synchronisent. Ceci nous empêche d'appliquer les résultats d'ubiquité avec ces mesures dans le cas ρ -hétérogène pour $\rho < 1$.

Le Théorème 3.2.3 montre que l'on peut de beaucoup améliorer la vitesse de croissance si l'on rompt l'uniformité en se concentrant sur ce que voit la mesure μ_q . On obtient alors des vitesses acceptables pour faire de l'ubiquité conditionnée, et on établit le Théorème 3.2.4 qui est la version du Théorème 3.2.3 adaptée à l'ubiquité 1-hétérogène.

(3) Notons que nos résultats sont valables presque sûrement pour tout q , ou pour presque tout q . En particulier, les Théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 fournissent des résultats de vitesse de croissance uniformes sur q , on a donc des résultats de vitesse de renouvellement des structures multifractales des copies de μ et ν .

(4) Dans [24], on établit des résultats plus généraux. Plutôt que de travailler avec ν , on définit une classe de mesures aléatoires de type quasi-Bernoulli dont ν est un élément. De même, on travaille avec une classe plus générale de cascades de Poisson.

De plus, les ensembles de niveau considérés envisagent le contrôle de la masse d'un nombre N_j de voisins croissant avec j dans des ensembles obtenus à partir des $E_{\lambda, n}(\beta, \tilde{\varepsilon})$ introduits dans la Définition 3.2.1 en remplaçant $\delta(w, w_j(x)) \leq 1$ par $\delta(w, w_j(x)) \leq N_j$.

(5) Il est possible d'écrire des conditions générales sur un élément de $\mathcal{M}'$ pour obtenir des versions générales des résultats donnés ici pour les cascades canoniques et les cascades de Poisson composées.

Chapitre 4

Combinaisons des chaos additifs et multiplicatifs

Les travaux présentés ici ont pour origine deux questions bien distinctes, mais qui ont débouché sur des constructions d'objets multifractals basés sur le même schéma.

La première question s'est posée quand nous avons considéré le substitut de la cascade canonique dans le cas critique de non dégénérescence (voir la Section 2.1.5) dans [5]. Nous n'avions pas su trancher la question de savoir si elles ont ou non une partie atomique. Nous avons seulement un résultat de localisation des éventuels atomes. Nous avons alors cherché à reconstruire ces mesures comme sommes de masses de Dirac selon un schéma analogue à (2), mais sans succès. Ceci dit, l'analyse multifractale de mesures telles que celle donnée par (2) restait en suspens. Nous n'avons commencé à travailler sur ce type d'objets que plus récemment, en collaboration avec S. Seuret. Les premiers résultats que nous avons obtenus se sont révélés fructueux; nous avons en particulier fait émerger de façon naturelle la question de l'ubiquité conditionnée par une mesure (voir le Chapitre 3). L'analyse multifractale de ces sommes fait l'objet de la Section 4.1. On en déduit des résultats analogues pour certaines séries de fonctions [21].

La seconde question était celle de construire de façon systématique des séries d'ondelettes aléatoires ayant un spectre multifractal strictement concave. En collaboration avec S. Seuret nous avons proposé un schéma consistant à considérer des séries d'ondelettes pondérées par des mesures multifractales construite à partir de processus multiplicatifs. Cela nous a permis d'étudier avec précision le modèle de turbulence de [ArnBaMu]. Nos résultats seront donnés dans la Section 4.2.

Dans tous les cas considérés dans ce chapitre, l'idée de base de la construction consiste à additionner une infinité de motifs simples pondérés par une mesure multifractale issue d'un processus multiplicatif, ou une légère perturbation de celle-ci. C'est pourquoi nous parlons de combinaison des chaos additifs et multiplicatifs.

4.1 Sommes de masses de Dirac pondérées par des mesures multifractales

Soient μ une mesure de Borel positive et finie sur $[0,1]$ et b un entier ≥ 2 . Pour $\rho \in (0,1]$ considérons la mesure obtenue comme somme de masses de Dirac localisées sur les nombres b -diques et pondérées à l'aide de μ de la façon suivante:

$$\nu_\rho = \sum_{j \geq 1} \sum_{k=0}^{b^j-1} \frac{b^{-j(1-\rho)}}{j^2} \mu([kb^{-j} - b^{-j\rho}, kb^{-j} + b^{-j\rho}]) \delta_{kb^{-j}}. \quad (4.1)$$

L'analyse multifractale de ν_ρ fait appel aux résultats d'ubiquité conditionnée du Chapitre 3. En particulier, les cas $\rho = 1$ et $\rho \in (0,1)$ doivent être distingués.

Nous allons un peu restreindre les formalismes multifractals introduits au Chapitre 1, en ce sens que nous dirons que le formalisme avec boîtes est valide pour une mesure μ en α si l'on a $\dim \underline{\mathcal{E}}_\mu(\alpha) = \tau_\mu^*(\alpha)$, et que le formalisme centré est valide pour μ en α si l'on a $\dim \underline{E}_\mu(\alpha) = B_\mu^*(\alpha)$.

Nous allons faire appels aux quatre types de condition suivants.

Définition 4.1.1 Soient μ une mesure de Borel positive dont le support est égal à $[0,1]$, $\alpha \geq 0$, et $\rho \in (0,1)$.

- **Condition C1:** Il existe un nombre B tel que

$$\forall w \in A^*, \mu(I_w) \geq b^{-B|w|}. \quad (4.2)$$

- **Condition C2(α):** la famille $\{(kb^{-j}, b^{-j})\}_{j \geq 1, 0 \leq k < b^j}$ forme un système d'ubiquité 1-hétérogène par rapport à $(\mu, \alpha, \tau_\mu^*(\alpha))$.

- **Condition C2(α, ρ):** la famille $\{(kb^{-j}, b^{-j})\}_{j \geq 1, 0 \leq k < b^j}$ forme un système d'ubiquité ρ -hétérogène par rapport à $(\mu, \alpha, \tau_\mu^*(\alpha))$.

Rappelons que l'ensemble $\tilde{E}_\mu(\alpha)$ est défini dans la Remarque 11.

- **Condition C3(α):** $\underline{E}_\mu(\alpha) \neq \emptyset$ et il existe une mesure m_α de support égal à $[0,1]$ telle que $m_\alpha(\tilde{E}_\mu(\alpha)) > 0$ et $\forall x \in \tilde{E}_\mu(\alpha)$, $\liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log m_\alpha(B(x,r))}{\log |B(x,r)|} \geq \tau_\mu^*(\alpha)$.

La condition **C3(α)** est en particulier suffisante pour que les formalismes multifractals du Chapitre 1 soient valides pour μ en α .

4.1.1 Analyse multifractale de ν_1

Le résultat suivant est obtenu dans [20].

Théorème 4.1.1 Soit μ une mesure de Borel positive dont le support est $[0,1]$ et supposons que μ vérifie **C1**. Soit ν la mesure donnée par (4.1) dans le cas $\rho = 1$. Soit $q_c = q_c(\mu) = \inf\{q \in \mathbb{R} : \tau_\mu(q) = 0\}$, et $\alpha_c = \alpha_c(\mu) = \tau'_\mu(q_c^-)$.

1. Si **C2(α_c)** est vérifiée, pour tout $\alpha \in [0, \alpha_c]$ on a $\dim \underline{E}_\nu(\alpha) = q_c \alpha$, et les deux formalismes multifractals sont valides en α .

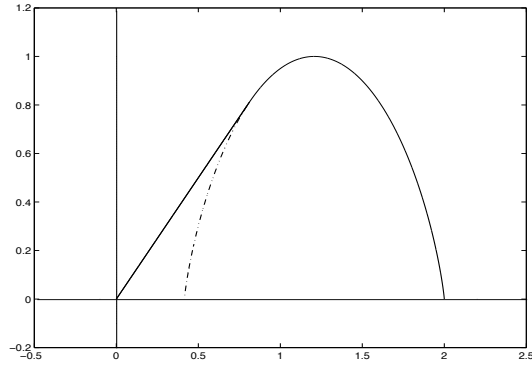


FIG. 4.1 – En traits pleins, le spectre multifractal de la mesure ν construite avec la mesure binômiale μ de paramètres $p_0 = \frac{1}{4}$ et $p_1 = \frac{3}{4}$. Le spectre de μ s’obtient en remplaçant la partie linéaire de celui de ν par la courbe en pointillés.

2. Soit $\alpha \geq \alpha_c$. Si **C3**(α) est vérifiée, alors $\dim \underline{E}_\nu(\alpha) = \tau_\mu^*(\alpha) = \tau_\nu^*(\alpha)$, et ν vérifie les deux formalismes multifractals en α .

De plus $\underline{E}_\nu(\alpha) = \emptyset$ si $\tau_\mu^*(\alpha) < 0$.

Commentaires

(1) Une fois ν construite (voir aussi $\nu_{\gamma,\sigma}$ plus bas), les sommes de masse de Dirac homogènes considérés dans l’Exemple G de la Section 0.2.2 doivent être perçus comme associés à la mesure de Lebesgue.

(2) Les exemples considérés dans la Section 3.2 illustrent des cas de mesures aléatoires μ pour lesquelles les hypothèses du Théorème 4.1.1 sont satisfaites pour tout α tel que $\tau_\mu^*(\alpha) > 0$.

(3) La classe de mesures obtenues comme ν rencontre la classe de mesures considérée dans [RiM] dans le cas où μ est une mesure multinômiale. Cependant, l’étude faite dans [RiM] manque le phénomène d’ubiquité conditionnée sous-jascent en ne considérant que les ensembles de niveau $E_\mu(\alpha)$, qui ici sont incapables de décrire toutes les valeurs des exposants de la mesure ν à gauche de α_c , (qui dans ce cas est égal à $-\tau'_\mu(1)$). En particulier [RiM] conclut au fait que le formalisme multifractal est violé sur $[0, -\tau'_\mu(1))$. Il l’est aussi si l’on considère les ensembles $\overline{E}_\nu(\alpha)$. Tout ceci plaide en faveur du formalisme défini seulement avec les ensembles $\underline{E}_\mu(\alpha)$ qui “tient le coup” en étant valide pour ν s’il l’est pour μ .

(4) La nécessité d’établir des résultats d’ubiquité conditionnée (voir Section 3.1) provient de la forme des ensembles de niveau de ν . Pour les écrire, nous avons besoin d’introduire les notions suivantes: étant donnés $\alpha \geq 0$, $\delta \geq 1$, et $\varepsilon > 0$, on dit que la propriété d’approximation conditionnée $\mathcal{P}(\alpha, \delta, \varepsilon)$ est vérifiée en $x \in [0, 1]$ s’il existe $\eta \leq \varepsilon$, et une infinité de nombres b -adiques kb^{-j} tels que

$$b^{-j(\alpha+\eta)} \leq \mu([(k-1)b^{-j}, (k+1)b^{-j}]) \leq b^{-j(\alpha-\eta)} \text{ et } |kb^{-j} - x| \leq 2b^{-j\delta}.$$

Pour $h \geq 0$ soit

$$F_h = \left\{ x : \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \geq 0, \delta \geq 1 \text{ tels que} \\ \frac{\alpha}{\delta} \leq h + \varepsilon \text{ et } \mathcal{P}(\alpha, \delta, \varepsilon) \text{ est vérifiée en } x \end{array} \right\}$$

La famille $\{F_h\}_{h \geq 0}$ est croissante. On établit dans [20] la proposition suivante.

Proposition 4.1.1 *Soit $\alpha > 0$. On a $\underline{E}_\nu(\alpha) = F_\alpha \setminus \bigcup_{h < \alpha} F_h$.*

(5) Le spectre multifractal de la mesure ν reflète une propriété d'ubiquité conditionnée relativement à $(\mu, \alpha_c, \tau_\mu^*(\alpha_c))$ dans sa partie gauche linéaire, et la structure multifractale de μ à droite de α_c . À gauche de α_c , $\underline{E}_\nu(\alpha)$ contient essentiellement des points où la densité logarithmique de μ n'a pas de limite, tandis qu'à droite de α_c , cet ensemble est essentiellement égal à $E_\mu(\alpha)$.

(6) Les exemples de mesures μ vérifiant un formalisme multifractal et qui sont basées sur une structure multiplicative illustrent le cas $\alpha_c = -\tau'_\mu(1)$ et $q_c = 1$. Il est remarquable qu'en modifiant un peu la structure de ν , on puisse construire des mesures m illustrant tous les couples possibles $(\alpha_c(m), q_c(m))$. Il suffit de considérer la généralisation

$$\nu_{\gamma, \sigma} = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{b^j-1} b^{-j\gamma} \mu([kb^{-j}, (k+1)b^{-j}))^\sigma \delta_{kb^{-j}} \quad (\gamma \geq 0, \sigma \geq 1). \quad (4.3)$$

On établit également le résultat suivant dans [20]

Theorem 4.1.1' *Soit μ une mesure de Borel positive dont le support est égal à $[0, 1]$. supposons que μ vérifie **C1**. Soient $\gamma \geq 0$ et $\sigma \geq 1$. Soient $q_{\gamma, \sigma} = \inf\{q \in \mathbb{R} : \tau_\mu(\sigma q) + \gamma q = 0\}$ et $\alpha_{\gamma, \sigma} = \sigma \tau'_\mu(\sigma q_{\gamma, \sigma}^-) + \gamma$. On a $q_{\gamma, \sigma} \in (0, 1]$ et $0 \leq \alpha_{\gamma, \sigma} \leq q_{\gamma, \sigma}^{-1}$.*

1. *Si $\alpha_{\gamma, \sigma} > 0$ et **C2**($\frac{\alpha_{\gamma, \sigma} - \gamma}{\sigma}$) est vérifiée, pour tout $\alpha \in [0, \alpha_{\gamma, \sigma}]$, $\dim \underline{E}_{\nu_{\gamma, \sigma}}(\alpha) = q_{\gamma, \sigma} \alpha$, et les deux formalismes multifractals sont valides en α . De plus, $q_c(\nu_{\gamma, \sigma}) = q_{\gamma, \sigma}$ et $\alpha_c(\nu_{\gamma, \sigma}) = \alpha_{\gamma, \sigma}$.*
2. *Soit $\alpha \geq \alpha_{\gamma, \sigma}$. Si **C3**($\frac{\alpha - \gamma}{\sigma}$) est vérifiée alors $\dim \underline{E}_{\nu_{\gamma, \sigma}}(\alpha) = \tau_\mu^*(\frac{\alpha - \gamma}{\sigma})$, et les deux formalismes multifractals sont valides en α .*

On a aussi $\underline{E}_{\nu_{\gamma, \sigma}}(\alpha) = \emptyset$ si $\tau_\mu^(\frac{\alpha - \gamma}{\sigma}) < 0$.*

De plus

$$\tau_{\nu_{\gamma, \sigma}}(q) \leq \begin{cases} \tau_\mu(\sigma q) + \gamma q & \text{si } q \leq q_{\gamma, \sigma} \text{ et } \tau_\mu^*(\tau'_\mu(q^+)) \geq 0 \\ 0 & \text{si } q > q_{\gamma, \sigma}, \end{cases}$$

avec égalité si **C3**($\frac{\alpha - \gamma}{\sigma}$) est vérifiée pour un ensemble dénombrable dense de $\alpha \geq \alpha_{\gamma, \sigma}$.

(7) Dans [21], nous envisageons le remplacement de $\delta_{kb^{-j}}$ par une fonction simple présentant un saut ou bien une dérivée tendant vers l'infini avec j . L'analyse multifractale de la série de fonction alors obtenue ressemble beaucoup à celle de $\nu_{\gamma, \sigma}$.

(8) Des travaux en cours généralisent les résultats précédents à des sommes de masses plus générales de la forme $\nu = \sum_{n \geq 1} \mu(B(x_n, \lambda_n)) \delta_{x_n}$, à l'étude desquelles les résultats d'ubiquité conditionnée de la Section 3.1 sont précieux.

4.1.2 Analyse multifractale de ν_ρ pour $\rho \in (0, 1)$

Le phénomène de saturation relevé dans l'étude des systèmes d'ubiquité ρ -hétérogènes (Section 3.1.2) intervient de façon sensible dans l'analyse multifractale de ν_ρ (en fait c'est l'étude de

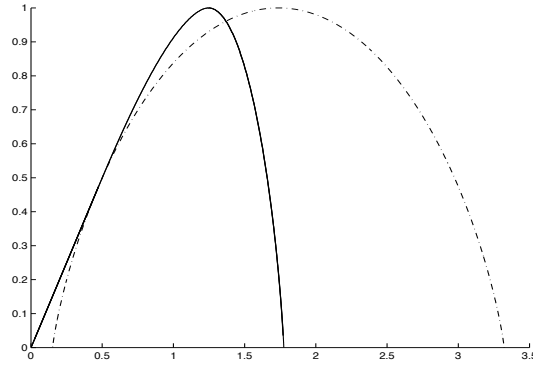


FIG. 4.2 – Le spectre multifractal de la mesure binômiale μ de paramètres $p_0 = \frac{1}{10}$ est représenté en pointillés, et celui de la mesure $\nu_{\frac{1}{3}}$ construite à partir de ν en traits pleins.

ν_ρ qui a mis en évidence ce phénomène). En particulier, l'étude des formalismes multifractals est beaucoup plus subtile (voir la Section 5 de [22] et les figures de [22]).

Théorème 4.1.2 Soit $\rho \in (0,1)$, et μ une mesure de Borel positive dont le support est égal à $[0,1]$. Supposons que μ vérifie **C1**. Soit ν_ρ la mesure définie par (4.1). Soient $q_c = \inf\{q \in \mathbb{R} : \tau_\mu(q) = 0\}$ et $\alpha_c = \tau'_\mu(q_c^-)$. Soit $\alpha_\rho = 1 - \rho + \rho\tau'_\mu(0^+)$.

1. Si $q_c = 1$, $\alpha_c > 0$ et **C2**(α_c, ρ) est vérifiée, alors $\dim \underline{E}_{\nu_\rho}(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in [0, \alpha_c]$.
2. Si $q_c = 1$ et $\alpha \in [\alpha_c, 1 - \rho + \rho\tau'_\mu(0^+)]$, il existe un unique $h = h(\alpha) \in [\alpha_c, \tau'_\mu(0^+)]$ tel que $\tau_\mu^*(h) = \alpha \frac{1-\rho+\rho\tau_\mu^*(h)}{1-\rho+\rho h}$. Si **C2**($h(\alpha), \rho$) est vérifiée, alors $\dim \underline{E}_{\nu_\rho}(\alpha) = \tau_\mu^*(h(\alpha))$.
3. Si $q_c \in (0,1)$ et $\alpha \in [0, 1 - \rho + \rho\tau'_\mu(0^+)]$, il existe un unique $h = h(\alpha) \in [0, \tau'_\mu(0^+)]$ tel que $\tau_\mu^*(h) = \alpha \frac{1-\rho+\rho\tau_\mu^*(h)}{1-\rho+\rho h}$. Si **C2**($h(\alpha), \rho$) est vérifiée, alors $\dim \underline{E}_{\nu_\rho}(\alpha) = \tau_\mu^*(h(\alpha))$.
4. Si $\alpha \geq 1 - \rho + \rho\tau'_\mu(0^+)$ et **C3**($\frac{\alpha-(1-\rho)}{\rho}$) est vérifiée, alors $\dim \underline{E}_{\nu_\rho}(\alpha) = \tau_\mu^*\left(\frac{\alpha-(1-\rho)}{\rho}\right)$.

De plus $\underline{E}_{\nu_\rho}(\alpha) = \emptyset$ si $\tau_\mu^*\left(\frac{\alpha-(1-\rho)}{\rho}\right) < 0$.

Remarque 12 (1) Soient d_1 et d_2 les fonctions

$$d_1 : \alpha \mapsto \begin{cases} h & \text{si } \alpha \in [0, \alpha_c] \\ \tau_\mu^*(h(\alpha)) & \text{si } \alpha \in (\alpha_c, \alpha_\rho) \\ \tau_\mu^*\left(\frac{\alpha-(1-\rho)}{\rho}\right) & \text{si } \alpha \geq \alpha_\rho \end{cases}, \quad d_2 : h \mapsto \begin{cases} \tau_\mu^*(h(\alpha)) & \text{si } \alpha \in [0, \alpha_\rho) \\ \tau_\mu^*\left(\frac{\alpha-(1-\rho)}{\rho}\right) & \text{si } \alpha \geq \alpha_\rho. \end{cases}$$

On montre dans [22] que si $q_c = 1$ alors d_1 est concave, et si $q_c \in (0,1)$, d_2 est aussi concave. Donc, si les conditions (**C1-3**) sont satisfaites chaque fois que l'on rencontre un exposant α tel que $d_1(\alpha) > 0$ ou $d_2(\alpha) > 0$, ν_ρ a un spectre multifractal concave.

(2) Afin que l'on comprenne pourquoi l'ubiquité conditionnée intervient dans le calcul du spectre multifractal de ν_ρ , donnons comme pour la mesure ν la forme des ensembles de niveau.

D'abord, étant donnés $\alpha \geq 0$, $\delta \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, on introduit la propriété d'approximation conditionnée $\mathcal{P}(\rho, \alpha, \delta, \varepsilon)$, qui est vérifiée au point $x \in [0,1]$ s'il existe $\eta < \varepsilon$ et une infinité de nombres b -adiques kb^{-j} tels que

$$b^{-j\rho(\alpha+\eta)} \leq \mu([kb^{-j} - b^{-j\rho}, kb^{-j} + b^{-j\rho}]) \leq b^{-j\rho(\alpha-\eta)} \text{ et } |kb^{-j} - x| \leq b.b^{-j\delta}.$$

Puis, pour $h \geq 0$, on définit

$$F_{h,\rho} = \left\{ x : \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \geq 0, \delta \geq 1 \text{ tels que} \\ \frac{1-\rho+\rho\alpha}{\delta} \leq h + \varepsilon \text{ et } \mathcal{P}(\rho, \alpha, \delta, \varepsilon) \text{ est vérifiée en } x \end{array} \right\}.$$

Enfin, on considère la famille croissante d'ensembles indexée par les exposants $\alpha \geq 0$

$$G_{\alpha,\rho} = \begin{cases} F_{\alpha,\rho} \cup \bigcup_{h \leq \frac{\alpha-(1-\rho)}{\rho}} \underline{E}_\mu(h) & \text{si } \alpha \geq 1, \\ F_{\alpha,\rho} \cup \bigcup_{h \leq \alpha} \underline{E}_\mu(h) & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

On établit dans [22] la proposition suivante

Proposition 4.1.2 Soit $\alpha > 0$. On a

$$\underline{E}_{\nu_\rho}(\alpha) = G_{\alpha,\rho} \setminus \bigcup_{h < \alpha} G_{h,\rho}. \quad (4.4)$$

(3) Le phénomène de saturation mis en évidence dans les résultats de la Section 3.1 intervient pour la détermination du spectre multifractal sur tout l'intervalle $(0, 1 - \rho + \rho\tau'_\mu(0^+)]$, tandis que dans le cas $\rho = 1$, l'ubiquité ne concerne que les exposants de l'intervalle $(0, \alpha_c]$.

4.2 Séries d'ondelettes pondérées par des mesures multifractales

Fixons une ondelette ψ dans la classe de Schwartz dont tous les moments sont nuls, comme il en est construit dans [LemMe], telle que les fonctions $2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}^2$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Soient μ une mesure de Borel positive sur $\mathbb{R}$ dont le support est inclus dans $[0, 1]$, et s et $p > 0$ deux nombres strictement positifs tels que $s - \frac{1}{p} > 0$. La fonction suivante est considérée dans [19]:

$$F_\mu(t) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{2^j-1} \varepsilon_{j,k} 2^{-j(s-\frac{1}{p})} \mu([k2^{-j}, (k+1)2^{-j}])^{\frac{1}{p}} \psi(2^j t - k).$$

où $\varepsilon_{j,k} \in \{-1, 1\}$. Elle est bien définie, et appartient à l'espace $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})$, à cause de la structure additive de μ .

L'exposant ponctuel de Hölder d'une fonction localement bornée a été défini au début de la Section 0.2.2. Si l'on se réfère à la caractérisation de cet exposant dans [Jaf1] en termes de coefficients d'ondelettes, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$h_{F_\mu}(x) = \liminf_{k2^{-j} \rightarrow x} \frac{\log |2^{-j(s-\frac{1}{p})} \mu([k2^{-j}, (k+1)2^{-j}])^{\frac{1}{p}}|}{\log(2^{-j} + |x - k2^{-j}|)}.$$

Définissons $\underline{E}_\mu(\infty) = \{x \in \text{supp}(\mu)^c\} \cup \left\{x \in \text{supp}(\mu) : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log(r)} = +\infty\right\}$. On établit le résultat suivant dans [19] (voir le Lemme 2 et la remarque qui le suit dans [19]) comme conséquence de ce que μ est une fonction croissante des intervalles.

Proposition 4.2.1 *Soit $\alpha \in [0, \infty]$. On a $\underline{E}_\mu(\alpha) = E_{F_\mu} \left(s - \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{p} \right)$.*

Il découle de la Proposition 4.2.1 que si l'on sait calculer le spectre multifractal de μ , on en déduit automatiquement celui de F_μ . Il y a un *transfert de structure multifractale* de μ à F_μ . C'est le cas en particulier pour les exemples de mesures considérés dans les Sections 2.1, 2.4 et 4.1. Le spectre de F_μ est un translaté dilaté de celui de μ .

Commentaires

(1) Dans [19], nous mettons en relation un raffinement du formalisme avec boîtes (voir le Chapitre 1) avec un formalisme multifractal pour les fonctions relatif à la base d'ondelette choisie, et nos résultats s'expriment en terme de validité du formalisme pour les fonctions pour F_μ en h s'il y a validité du formalisme pour les mesures pour μ en $1 + p(h - s)$. Ce formalisme n'est pas satisfaisant dans l'absolu, en particulier parce qu'il dépend de l'ondelette choisie, mais il est suffisant pour qu'il y ait un lien entre les deux formalismes dans le cas de F_μ .

(2) Lorsque μ vérifie le formalisme pour les mesures considéré dans [19], la fonction F_μ illustre de façon pertinente le formalisme multifractal pour les fonctions développé par S. Jaffard dans [Jaf9, Jaf10], qui introduit la notion de "leader" des coefficients d'ondelettes, et ne dépend pas de la base d'ondelette fixée.

Donnons deux exemples d'applications de la Proposition 4.2.1.

4.2.1 Application 1: Le modèle de turbulence de [ArnBaMu] comme perturbation de $F_{Q^c, \ell}$.

Dans [ArnBaMu], on choisit une variable aléatoire $\mathcal{W}$ telle que: $\mathbb{P}(|\mathcal{W}| > 0) = 1$, $-\infty < \mathbb{E}(\log |\mathcal{W}|) < 0$, et il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $h \in [0, \eta]$,

$$f(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} (hq + 1 + \log_2 \mathbb{E}(|\mathcal{W}|^q)) < 0. \quad (4.5)$$

Puis on choisit une suite $(\mathcal{W}_w)_{w \in \mathcal{A}^*}$ de copies de $\mathcal{W}$ indépendantes et une série d'ondelettes F est définie sur $[0, 1]$ par ses coefficients

$$d_{j,k}(F) = \mathcal{W}_{w_1} \mathcal{W}_{w_1 w_2} \cdots \mathcal{W}_{w_1 w_2 \cdots w_j} \quad \text{si } [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}] = I_w :$$

$$F(t) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}(F) \psi(2^j t - k).$$

On montre dans [ArnBaMu] que F est continue et que l'exposant ponctuel de Hölder en un point appartient à l'intervalle $[h_{\min}, h_{\max}]$, où $h_{\min} = \inf \{0 < h < -\mathbb{E}(\log_2 |\mathcal{W}|) : f(h) \geq 0\}$ et $h_{\max} = \inf \{h > -\mathbb{E}(\log |\mathcal{W}|) : f(h) < 0\}$.

La considération de séries du type F_μ , où μ est une cascade canonique autosimilaire comme dans la Section 2.1 nous a permis sous certaines hypothèses de compléter ce résultat en faisant l'analyse multifractale de F , qui n'est pas évidente.

Supposons tous les moments de $|\mathcal{W}|$ finis. Soient

$$T : q \in \mathbb{R} \mapsto -1 - \log_2 \mathbb{E}(|\mathcal{W}|^q) \quad \text{et} \quad W_{w_1 \dots w_n} = \frac{|\mathcal{W}_{w_1 \dots w_n}|}{\mathbb{E}(|\mathcal{W}|)}.$$

Considérons la cascade canonique autosimilaire μ construite en base 2 avec les poids $W_{w_1 \dots w_n}$. Les hypothèses faites sur $\mathcal{W}$ impliquent que μ est non dégénérée.

La fonction φ et l'intervalle $\mathcal{J}$ étant définis comme dans la Section 2.1, on a $T(q) = -q(1 + \log_2 \mathbb{E}(|\mathcal{W}|)) + \varphi(q)$ pour tout $q \in \mathbb{R}$, et

$$T'(q) = -1 - \log_2 \mathbb{E}(|\mathcal{W}|) + \varphi'(q) \quad \text{et} \quad f(T'(q)) = (-T)^*(T'(q)) = (-\varphi)^*(\varphi'(q)).$$

Donc $(h_{\min}, h_{\max}) = \{T'(q) : q \in \mathcal{J}\}$.

Supposons de plus que $0 < W \leq 2$ et $\mathbb{P}(W = 2) < 1/2$. Alors, les Théorèmes 2.1.2 et 2.1.3 assurent de ce que tous les moments de $\mu([0,1])$ sont finis. Définissons alors

$$F_\mu^{pert}(t) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-j(s-\frac{1}{p})} \mu_{2^{-j}}([k2^{-j}, (k+1)2^{-j}])^{\frac{1}{p}} \psi(2^j t - k).$$

Pour $j \geq 0$ et $0 \leq k < 2^j$, soient $d_{j,k}(F_\mu) = 2^{-j(s-\frac{1}{p})} \mu([k2^{-j}, (k+1)2^{-j}])^{\frac{1}{p}}$ et $d_{j,k}(F_\mu^{pert}) = 2^{-j(s-\frac{1}{p})} \mu_{2^{-j}}([k2^{-j}, (k+1)2^{-j}])^{\frac{1}{p}}$. Le fait que tous les moments de $\mu([0,1])$ soient finis permet d'avoir le contrôle uniforme suivant sur les quotients $\frac{d_{j,k}(F_\mu^{pert})}{d_{j,k}(F_\mu)}$ (qui sont des copies de $\mu([0,1])$ à l'exposant $\frac{1}{p}$ près)

$$\lim_{j \rightarrow 0} \sup_{0 \leq k < 2^j} \left| \frac{\log \frac{d_{j,k}(F_\mu^{pert})}{d_{j,k}(F_\mu)}}{j} \right| = 0. \quad (4.6)$$

Il s'ensuit que les exposants ponctuels de Hölder de F_μ et de sa perturbation F_μ^{pert} ont les mêmes ensembles de niveau.

Maintenant, si l'on pose $s = 2$ et $p = 1$, on a

$$\begin{aligned} |d_{j,k}(F)| &= 2^{(s_0 - \frac{1}{p_0})j} (2\mathbb{E}(|\mathcal{W}|))^j 2^{-(s_0 - \frac{1}{p_0})j} W_{w_1} \dots W_{w_1 \dots w_j} \\ &= 2^{(2 + \log_2 \mathbb{E}(|\mathcal{W}|))j} |d_{j,k}(F_\mu^{pert})|. \end{aligned}$$

Donc, l'analyse multifractale de F se déduit aisément de celle de F_μ^{pert} , c'est à dire de celle de μ , qui est connue. On a le résultat suivant ([19]).

Théorème 4.2.1 *Sous les hypothèses faites successivement sur $\mathcal{W}$, avec probabilité 1, pour tout $h \in (h_{\min}, h_{\max})$ on a $\dim E_F(h) = f(h)$; de plus $E_F(h) = \emptyset$ si $h \notin [h_{\min}, h_{\max}]$.*

Commentaire

(1) On peut compléter le spectre multifractal de F_μ aux bornes de l'intervalle $(h_{\min}, h_{\max})$ en utilisant les résultats de la Section 2.1.5.

(2) On a utilisé ici le fait que la régularité de F_μ ne change pas par petites perturbations. Ceci est formalisé dans [19] qui donne d'autres exemples de perturbations. En particulier, on

peut multiplier les coefficients de F_μ par des lois gaussiennes centrées indépendantes dont les écarts type $\sigma_{j,k}$ n'approchent ni trop vite de 0, ni trop vite de $+\infty$ au sens où ils vérifient la même propriété que $\frac{d_{j,k}(F_\mu^{pert})}{d_{j,k}(F_\mu)}$ dans (4.6). La perturbation obtenue est un processus gaussien centré ayant le même spectre multifractal que F_μ .

4.2.2 Application 2: Combinaison de F_μ avec les sommes de masses de Dirac: F_ν .

Soit μ une mesure de Borel positive dont le support est $[0,1]$, et soit ν la mesure considérée à la Section 4.1.1. Soient $s > 0$ et $p > 0$ tels que $s - \frac{1}{p} > 0$. Soit sur $[0,1]$ la fonction

$$F(t) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-j(s-\frac{1}{p})} \nu([k2^{-j}, (k+1)2^{-j}])^{\frac{1}{p}} \psi(2^j x - k).$$

Avec les notations du Théorème 4.1.1, on a ([21])

Théorème 4.2.2 1. Si $h_c > 0$ et **C2**(h_c) est vérifiée, alors pour tout $h \in [s - \frac{1}{p}, s - \frac{1}{p} + \frac{h_c}{p}]$, on a $\dim E_F(h) = q_c p(h - (s - \frac{1}{p}))$.

2. Si $h \geq h_c$ et **C3**(h) est vérifiée, alors $\dim E_F(s - \frac{1}{p} + \frac{h}{p}) = \tau_\mu^*(h)$.

Chapitre 5

Analyse multifractale d'un processus additif inspiré par le trafic sur Internet

Le mécanisme de contrôle du trafic sur Internet porte le nom de “Traffic Control Protocol” (TCP). Le processus stochastique introduit dans [15] a été proposé par J. Lévy Véhel afin d’avoir un modèle (approximatif) de superposition de sources régies par certains éléments de TCP dont on puisse faire l’analyse multifractale. L’objectif est de savoir si TCP peut à lui seul expliquer le caractère multifractal du trafic observé numériquement [RiL-V]. En effet, les tentatives d’explications proposées jusqu’ici invoquent une structure de cascade multiplicative devant rendre compte d’une certaine hiérarchie du réseau [GWFe], ou bien du fait que l’accumulation des paquets arrivant en un router au cours du temps est l’intégrale d’une mesure [L-VSi] (pour davantage de détails voir les deux premières sections de [15]). L’étude faite dans [15] conforte l’idée que la superposition d’un grand nombre des sources régies par TCP suffit à créer un comportement multifractal.

A présent donnons la construction du processus étudié dans [15]. Soit $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ une suite croissante de nombres strictement positifs.

Pour chaque $i \geq 1$, soit $(\tau_k^{(i)})_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires exponentielles indépendantes, et de paramètre λ_i . On pose aussi $\tau_0^{(i)} = 0$, et on définit

$$T_k^{(i)} = \sum_{j=0}^k \tau_j^{(i)}.$$

On suppose que les tribus $\sigma(\tau_k^{(i)}, k \geq 1)$ sont mutuellement indépendantes.

Pour chaque $i \geq 1$ on considère le processus stochastique élémentaire $(Z_i(t))_{t \geq 0}$ donné par

$$Z_i(t) = \begin{cases} Z_i(0) + t & \text{si } 0 \leq t < \tau_1^{(i)} \\ \frac{Z_i(T_{k-1}^{(i)}) + \tau_k^{(i)}}{\mu} + t - T_k^{(i)} & \text{si } T_k^{(i)} \leq t < T_{k+1}^{(i)}, \quad k \geq 1, \end{cases}$$

où $(Z_i(0))_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires positives telle que $\sum_{i \geq 1} Z_i(0)$ converge, et μ est un paramètre réel fixé > 1 .

Le processus Z_i modélise le trafic engendré par une source obéissant approximativement à l'une des règles importantes du mécanisme de TCP, en ce sens qu'à chaque instant $T_k^{(i)}$, $k \geq 1$, elle divise par μ le nombre de paquets de bits qu'elle envoyait à l'instant $T_k^{(i)-}$, afin d'éviter l'engorgement du router qui reçoit la somme des Z_j , et qu'entre $T_k^{(i)}$ et $T_{k+1}^{(i)-}$, le nombre de paquets croît à partir de $Z_i(T_k^{(i)-})/\mu$ avec un taux de croissance égal à 1.

Le processus stochastique qui modélise cette superposition de sources est donc

$$Z(t) = \sum_{i \geq 1} Z_i(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Le premier point à régler est celui de la finitude de Z .

Proposition 5.0.2 (Existence de Z) *Si $\sum_{i \geq 1} 1/\lambda_i < \infty$ alors, avec probabilité 1, Z est fini partout. Si $\sum_{i \geq 1} 1/\lambda_i = \infty$ alors, avec probabilité 1, $Z = \infty$ presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Afin de comprendre la nature multifractale de Z il est judicieux de décomposer chaque processus Z_i de la façon suivante sur $[T_k^{(i)}, T_{k+1}^{(i)})$:

$$Z_i = X_i + R_i$$

où

$$\begin{cases} X_i(t) = t - T_k^{(i)} \\ R_i(t) = \frac{Z_i(0)}{\mu^k} + \frac{1}{\mu^{k+1}} \sum_{j=1}^k \mu^j \tau_j^{(i)}. \end{cases}$$

Sous l'hypothèse $\sum_{i \geq 1} 1/\lambda_i < \infty$, Z est alors la somme des deux processus $X = \sum_{i \geq 1} X_i$ et $R = \sum_{i \geq 1} R_i$.

Nous avons montré que Z et X ont le même spectre multifractal qu'un processus de Lévy sans partie brownienne, et dont la mesure de Lévy est $\Pi = \sum_{i \geq 1} \lambda_i \delta_{-1/\lambda_i}$ (la nature multifractale des processus de Lévy est comprise dans [Jaf6]). Un argument heuristique en faveur de ce résultat consiste à remarquer que X ressemble au processus de Lévy L défini presque sûrement comme $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N L_i$ où $L_i(t) = t - k/\lambda_i$ sur $[T_k^{(i)}, T_{k+1}^{(i)})$ (voir [Ber]): en particulier les points de saut de X et de L sont les points $T_k^{(i)}$ ($i, k \geq 1$); les tailles des sauts sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes dans les deux cas; enfin en chaque $T_k^{(i)}$ la taille du saut de L (égale à $-\frac{1}{\lambda_i}$) est l'espérance de la taille du saut ($-\tau_k^{(i)}$) de X . Cependant, une importante différence réside dans le fait que les accroissements de X ne sont ni indépendants ni stationnaires. La même chose est vraie pour Z , pour lequel de surcroît les tailles des sauts cessent d'être mutuellement indépendantes. Ces nuances ont des conséquences sur l'étude de X et Z par rapport à celle de L . Bien que l'approche utilisée par S. Jaffard pour l'analyse multifractale de certaines fonctions ayant un ensemble dense de discontinuités ([Jaf2, Jaf6]) soit utile pour faire celles de X et de Z , ces dernières nécessitent des outils différents ou bien des raffinements.

Il est également intéressant de noter que la condition nécessaire et suffisante $\sum_{i \geq 1} 1/\lambda_i < \infty$ pour que Z et X soient presque sûrement finis partout est la même que la condition nécessaire et

suffisante sous laquelle L est défini. Cependant, les arguments développés pour l'obtenir diffèrent beaucoup d'un cas à l'autre.

Avant de rentrer un peu plus dans les détails énonçons notre résultat.

On a besoin du nombre

$$\beta = \inf\{\gamma \geq 1; \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i^{\gamma-1}} < \infty\},$$

qui n'est autre que l'indice de Blumenthal-Gettoor [BlGe] du processus de Lévy L (voir aussi l'Exemple F de la Section 0.2.2). Sous les hypothèses de la Proposition 5.0.2, on a $\beta \in [1, 2]$.

Nous utiliserons les notions introduites dans la Section 0.2.2.

Théorème 5.0.3 (Spectre multifractal) *Supposons que $\sum_{i \geq 1} 1/\lambda_i < \infty$. Avec probabilité 1, X et Z sont finis partout et pour $f \in \{X, Z\}$ on a*

$$\dim E_f(H) = d_\beta(h) := \begin{cases} \beta h & \text{si } h \in [0, 1/\beta]; \\ -\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

(avec la convention que $\dim \emptyset = -\infty$).

Commentaires

(1) Il est naturel de demander quel est le spectre de Z en terme de dimension de packing des ensembles de niveaux. Cette question est difficile. En effet, comme dans le cas des processus de Lévy, les ensembles de niveaux sont des différences d'ensembles de la forme (9) et qui contiennent un G_δ dense; ils sont donc tous de dimension de packing égale à 1, et l'étude de leur différence est délicate.

(2) Dans l'Exemple F de la Section 0.2.2, on indique que le même résultat est valide pour le processus L sous la condition (C). Le fait que (C) n'apparaisse pas dans les hypothèses du Théorème 5.0.3 reflète le fait qu'il y a des différences entre l'étude de L d'une part, et celle de X et Z d'autre part.

(3) La restriction (C) dans [Jaf6] provient de l'utilisation d'un lemme de Stute pour trouver une minoration aux exposants ponctuels de Hölder. Plus précisément, ce lemme sur les accroissements du processus empirique donne une majoration du nombre de sauts de $\sum_{2^j \leq \lambda_i < 2^{j+1}} L_i(\cdot)$ dans tout intervalle dyadique. Ce résultat est combiné dans [Jaf6] avec une inégalité de concentration (Lemma 1.5 dans [LeTa]) et le fait que la taille d'un saut de $\sum_{2^j \leq \lambda_i < 2^{j+1}} L_i(\cdot)$ est de l'ordre de 2^{-j} . Sous l'hypothèse (C), cette approche donne également une minoration des exposants de Hölder de X (mais pas de ceux de Z). Pour voir cela, il faut d'une part utiliser les mêmes troncatures que celles que nous employons pour étudier X , et d'autre part écrire les X_i comme différence d'un drift et d'un processus de sauts pure.

Néanmoins, il reste des difficultés concernant la minoration des dimensions de Hausdorff des ensembles de niveau, et aussi avec la détermination de l'exposant de Hölder maximal de X . Ces problèmes se situent dans le fait que la taille δ d'un saut de $\sum_{2^j \leq \lambda_i < 2^{j+1}} X_i(\cdot)$ n'est plus nécessairement de l'ordre de 2^{-j} (au sens où $\log \delta$ peut être négligeable devant $-j$).

Cela oblige à établir un raffinement du résultat de [S1] sur le recouvrement de la droite par des intervalles poissonniens centrés sur les points de sauts de L . Le résultat utilisé dans [Jaf6]

et qui se déduit du Théorème de Shepp et d'une estimation simple de dimension de Hausdorff est le suivant:

Théorème 5.0.4 *Soit*

$$E_\delta = \limsup_{j \rightarrow \infty} \bigcup_{i, 2^j \leq \lambda_i < 2^{j+1}} \bigcup_{k \geq 1} [T_k^{(i)} - 2^{-\delta j}, T_k^{(i)} + 2^{-\delta j}].$$

Avec probabilité 1, pour tout $\delta > \beta$ on a $\dim E_\delta \leq \frac{\beta}{\delta}$ et pour tout $\delta < \beta$ on a $(0, \infty) \subset E_\delta$.

Le raffinement nécessaire dans [15] est

Théorème 5.0.5 (Recouvrement économique) *Il existe une fonction φ définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(2^{-j})}{\log 2^{-j}} = 1$ et avec probabilité 1,*

$$(0, \infty) \subset \limsup_{j \rightarrow \infty} \bigcup_{i, 2^j \leq \lambda_i < 2^{j+1}} \bigcup_{k \geq 1: \tau_k^{(i)} \geq \varphi(2^{-j})} [T_k^{(i)} - 2^{-\delta j}, T_k^{(i)} + 2^{-\delta j}]$$

pour tout $\delta < \beta$.

L'intérêt de ce résultat est de montrer que l'approche de [K6] pour le Théorème de Shepp (utilisant une idée de temps d'arrêt de Janson) s'adapte à la sélection faite dans le Théorème 5.0.5, qui traite un cas où l'invariance en loi par translation est rompue. On est sauvé ici par l'absence de mémoire de la loi exponentielle, mais les calculs faits dans [15] incitent à étudier le problème de recouvrement pour d'autres lois que la loi exponentielle.

(3) Notre minoration des exposants de Hölder de X et Z ne repose pas sur le lemme de Stute. Nous utilisons une inégalité de concentration due à Bennett (inégalité (6.10) de [LeTa]) et un certain nombre d'estimations de moments pour des troncatures des X_i et des R_i . Cela permet d'éviter le recours à (C) pour X quand $\beta = 2$.

(4) Le Théorème 5.0.3 possède l'extension suivante. Soit $(\mu_i)_{i \geq 1} \in (1, \infty)^{\mathbb{N}^*}$. Pour tout $i \geq 1$ soit

$$\tilde{Z}_i(t) = \begin{cases} Z_i(0) + t & \text{si } 0 \leq t < \tau_1^{(i)} \\ \frac{\tilde{Z}_i(T_{k-1}^{(i)}) + \tau_k^{(i)}}{\mu_i} + t - T_k^{(i)} & \text{si } T_k^{(i)} \leq t < T_{k+1}^{(i)} \text{ with } k \geq 1, \end{cases}$$

et

$$\tilde{Z}(t) = \sum_{i \geq 1} \tilde{Z}_i(t).$$

Le processus $\tilde{Z}$ est presque sûrement défini partout si $\sum_{i \geq 1} 1/(\mu_i - 1)\lambda_i < \infty$.

Théorème 5.0.6 *Supposons $(\mu_i)_{i \geq 1}$ bornée, $|\log(\mu_i - 1)| = o(\log(\lambda_i))$ et $\sum_{i \geq 1} 1/(\mu_i - 1)\lambda_i < \infty$. Avec probabilité 1, $\tilde{Z}$ est fini partout et son spectre multifractal est donné par d_β .*

La nature multifractale de Z n'est donc pas modifiée si μ est remplacé par μ_i dans Z_i et si μ_i , tout en restant borné, n'approche pas trop vite de 1.

L'étude de $\tilde{Z}$ quand l'hypothèse $|\log(\mu_i - 1)| = o(\log(\lambda_i))$ est violée nécessite d'autres arguments, et c'est une question ouverte.

Bibliographie

- [AouBenSl] J. Aouidi, M. Ben Slimane, *Multi-fractal formalism for quasi-self-similar functions*, J. Stat. Phys., **108**(3/4) (2002), 541–590.
- [ArPa] M. Arbeiter and N. Patzschke, *Random self-similar multifractals*, Math. Nachr., **181** (1996), 5–42.
- [ArnGrHol] A. Arneodo, G. Grasseau, G., M. Holschneider, *Wavelet transform of multifractals*, Phys. Rev. Lett. **61** (1988), no. 20, 2281–2284.
- [ArnBaMu] A. Arneodo, E. Bacry, J.-F Muzy, *Random cascades on wavelet dyadic trees*, J. Math. Phys., **39** (1998), 4142–4264.
- [AuJ] J.-M. Aubry and S. Jaffard, *Random wavelet series*, Commun. Math. Phys, **227** (2002), 483–514.
- [AvBan] V. Aversa, C. Bandt, *The multifractal spectrum of discrete measures*, Acta Uni. Caro.-Math. et Phys., **31**(21) (1990).
- [BaMu] , E. Bacry and J.-F. Muzy, *Log-infinitely divisible multifractal processes*, Commun. Math. Phys., **236** (2003), 449–475.
- [1] J. Barral, *Continuité, moments d’ordres négatifs, et analyse multifractale des cascades multiplicatives de Mandelbrot*, Thèse, Université Paris-Sud, N° d’ordre 4704, 1997.
- [2] J. Barral, *Une variante des martingales de B. Mandelbrot*, C. R. Acad. Sci. Paris, **324** (1997), 93–98.
- [3] J. Barral, *Une extension de l’équation fonctionnelle de B. Mandelbrot*, C. R. Acad. Sci. Paris, **324** (1998), 421–426.
- [4] J. Barral, *Moments, continuité, et analyse multifractale des martingales de Mandelbrot*, Probab. Theory Relat. Fields, **113** (1999), 535–569.
- [5] J. Barral, *Continuity of the multifractal spectrum of a statistically self-similar measure*, J. Theoretic. Probab., **13** (2000), 1027–1060.
- [6] J. Barral, *Differentiability of multiplicative processes related to branching random walks*, Ann. Inst. H. Poincaré Prob. Statist., **36** (2000), 407–417.
- [7] J. Barral, *Generalized vector multiplicative cascades*, Adv. Appl. Probab. **33** (2001), 874–895.
- [8] J. Barral, *Poissonian products of random weights: uniform convergence and related measures*, Rev. Math. Ibero-americana, **19** (2003), 813–856.

- [9] J. Barral, *Techniques for the study of infinite products of independent random functions (Random multiplicative multifractal measures, Part III)*, Proc. Symp. Pure Math. **72(2)**, AMS, Providence, 2004, pp 53–90.
- [10] J. Barral, F. Ben Nasr and J. Peyrière, *Comparing multifractal formalisms: the Neighboring Boxes Conditions*, Asian J. Math., **7** (2003), 149–166.
- [11] J. Barral, M.-O. Coppins and B.B. Mandelbrot, *Multiperiodic multifractal martingale measures*, J. Math. Pures Appl., **82** (2003), 1555–1589.
- [12] J. Barral, A.H. Fan, *Covering numbers of different points in Dvoretzky covering*, Bull. Sci. Math. **119** (2005), 275–317.
- [13] J. Barral, A.H. Fan, *Densities of some Poisson $\mathbf{T}$ -martingales and random covering numbers*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **338** (2004), 571–574.
- [14] J. Barral, A.H. Fan, *Asymptotic behavior of densities of certain multiplicative chaos*, en préparation.
- [15] J. Barral, J. Lévy Véhel, *Multifractal Analysis of a Class of Additive Processes with Correlated Non-Stationary Increments*, Elec. J. Probab, **9** (2004), 508–543.
- [16] J. Barral, B.B. Mandelbrot, *Multifractal products of cylindrical pulses*, Probab. Theory Relat. Fields, **124** (2002), 409–430.
- [17] J. Barral, B.B. Mandelbrot, *Introduction to Infinite Products of Independent Random Functions (Random Multiplicative Multifractal Measures, Part I)*, Proc. Symp. Pure Math. **72(2)**, AMS, Providence, 2004, pp 3–16.
- [18] J. Barral, B.B. Mandelbrot, *Non-degeneracy, moments, dimension, and multifractal analysis for random multiplicative measures (Random multiplicative multifractal measures, Part II)*, Proc. Symp. Pure Math. **72(2)**, AMS, Providence, 2004, pp 17–52.
- [19] J. Barral, S. Seuret, *From multifractal measures to multifractal wavelet series*, (2003). Accepté pour publication dans J. Fourier Anal. Appl.
- [20] J. Barral, S. Seuret, *Combining multifractal additive and multiplicative chaos*, Commun. Math. Phys. (2005).
- [21] J. Barral, S. Seuret, *Functions with multifractal variations*, Math. Nachr., **274–275** (2004), 3–18.
- [22] J. Barral, S. Seuret, *The multifractal nature of heterogeneous sums of Dirac masses*, (2004). Soumis pour publication.
- [23] J. Barral, S. Seuret, *Heterogeneous ubiquitous systems and Hausdorff dimension in $\mathbb{R}^d$* , (2004). Soumis pour publication.
- [24] J. Barral, S. Seuret, *Inside singularity sets of random Gibbs measures*, à paraître dans J. Stat. Phys. et *Renewal of singularity sets of statistically self-similar measures*, (2004), Soumis pour publication.
- [BatH] A. Batakis, Y. Heurteaux, *On relations between entropy and Hausdorff dimension of measures*, Asian J. Math. **6** (2002), no. 3, 399–408.
- [Bel] F. Ben Nasr, *Analyse multifractale de mesures*, C. R. Acad. Sci. Paris, **319**, Série I (1994), 807–810.

- [BeBh] F. Ben Nasr and I. Bhouiri, *Spectre multifractal de mesures boréliennes sur $\mathbb{R}^d$* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **325** (1997), no. 3, 253–256.
- [BeBhH] F. Ben Nasr, I. Bhouiri, Y. Heurteaux, *The validity of the multifractal formalism: results and exemples*, Adv. Math., **165** (2002), 264–284.
- [Ber] J. Bertoin, *Lévy processes*. Cambridge University Press, 1996.
- [Bes] A.S. Besicovitch, *On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system*, Math. Annalen, **110** (1934-35), 321–330.
- [Bh] I. Bhouiri, *Une condition de validité du formalisme multifractal pour les mesures*. Thèse de Doctorat. Tunis, 1999.
- [Bi1] J.D. Biggins, *Uniform convergence of martingales in the one-dimensional branching random walk*, Selected Proceedings of the Sheffield Symposium on Applied Probability, 1989. Edited by I.V. Basawa and R.L. Taylor. IMS Lecture Notes– Monograph Series 18, 1991, pp. 159–173.
- [Bi2] J.D. Biggins, *Uniform convergence of martingales in the branching random walk*, Ann. Prob., **20** (1992), 137–151.
- [BlGe] R. M. Blumenthal, R. K. Gettoor, *Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments*, J. Math. Mech., **10** (1961), 493–516.
- [BrMiP] G. Brown, G. Michon and J. Peyrière, *On the multifractal analysis of measures*, J. Stat. Phys., **66** (1992), no. 3/4, 775–790.
- [CawMau] R. Cawley, R.D. Mauldin, *Multifractal decompositions of Moran fractals*, Adv. Math., **92** (1992), 196–236.
- [ColLebPo] P. Collet, J.L. Lebowitz, A. Porzio, *The dimension spectrum of some dynamical systems*, J. Stat. Phys., **47** (1987), 609–644.
- [DemPeRoZe1] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen, O. Zeitouni, *Thin points for Brownian motion*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat., **36** (2000), 749–774.
- [DemPeRoZe2] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen, O. Zeitouni, *Thick points for spatial Brownian motion: multifractal analysis of occupation measure*, Ann. Probab., **28** (2000), 1–35.
- [DemPeRoZe3] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen, O. Zeitouni, *Thick points for planar Brownian motion and the Erdős-Taylor conjecture on random walk*, Acta Math., **186** (2001), 239–270.
- [DiUh] J. Diestel, J.J. Uhl, *Vector Measures*, Math. Surveys **15**, American Mathematical Society, Providence RI, 1977.
- [DodRyVi] M.M. Dodson, B.P. Rynne, J.A.G. Vickers, *Diophantine approximation and a lower bound for Hausdorff dimension*, Mathematika, **37** (1990), 59–73.
- [DodMePesVel] M.M. Dodson, M.V. Melián, D. Pestane, S.L. Vélani, *Patterson measure and Ubiquity*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., **20**(1) (1995), 37–60.
- [DL] R. Durrett and T. Liggett, *Fixed points of the smoothing transformation*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete **64** (1983), 275–301.
- [Dvo] A. Dvoretzky, *On covering a circle by randomly placed arcs*, Pro. Nat. Acad. Sci. USA, **42** (1956), 199–203.

- [E] H.G. Eggleston, *The fractaional dimension of a set defined by decimal properties*, Quart. J. Math. Oxford Ser., **20** (1949), 31–46.
- [Fal1] K. J. Falconer, *The multifractal spectrum of statistically self-similar measures*, J. Theor. Prob., **7** (1994), 681–702.
- [Fal2] K. J. Falconer, *Representation of families of sets by measures, dimension spectra and Diophantine approximation*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **128** (2000).
- [Fan1] A.-H. Fan, *Une condition suffisante d’existence du moment d’ordre m (entier) du chaos multiplicatif*, Ann. Sci. Math. Québec, **10** (1986), no. 2, 119–120.
- [Fan2] A.-H. Fan, *Chaos additif et chaos multiplicatif de Lévy*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **308** (1989), no. 5, 151–154.
- [Fan3] A.-H. Fan, *Equivalence et orthogonalité des mesures aléatoires engendrées par des martingales homogènes*, Studia Mathematica, **98** (1991), 249–266.
- [Fan4] A.-H. Fan, *Sur la dimension des mesures*, Studia Mathematica, **111** (1994), 1–17.
- [Fan5] A.H. Fan, *Sur les chaos de Lévy stables d’indice $0 < \alpha < 1$* , Ann. Sci. Math. Québec, **21** (1997), no. 1, 53–66.
- [Fan6] A.-H. Fan, *Multifractal analysis of infinite products*, J. Stat. Phys., **86**(5/6) (1997), 1313–1336.
- [Fan7] A.-H. Fan, *How many intervals cover a point in Dvoretzky covering?*, Israël J. Math., **131** (2002), 157–184.
- [Fan8] A.-H. Fan, *On Markov-Mandelbrot martingales*, J. Math. Pures Appl., **81** (2002), 967–982.
- [FanK1] A.-H. Fan, J.-P. Kahane, *Rareté des intervalles recouvrant un point dans un recouvrement aléatoire*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **29** (1993), 453–466.
- [FanK2] A.-H. Fan and J.-P. Kahane, *How many intervals cover a point in random dyadic covering?*, Portugaliae Mathematica, **58** (2001), 59–75.
- [FanLau] A.-H. Fan, K.-S. Lau, *Asymptotic behavior of multiperiodic functions*, J. Four. Anal. Appl., **4**(2) (1998), 129–150.
- [FanLauRao] A.-H. Fan, K.-S. Lau, H. Rao, *Relationships between different dimensions of a measure*, Monatsh. Math. **135** (2002), no. 3, 191–201.
- [FeOl] D.-J. Feng, E. Olivier, *Multifractal analysis of weak Gibbs measures and phase transition—application to some Bernoulli convolutions*, Ergodic Theory Dynam. Systems **23**: 1751–1784, 2003.
- [FrPa] U. Frisch and G. Parisi, *Fully developped turbulence and intermittency in turbulence, and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dymnatics*, International school of Physics “Enrico Fermi”, course 88, edited by M. Ghil, North Holland (1985), p. 84.
- [Fro] O. Frostman, *Potentiel d’équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Meddel. Lunds. Unic. Mat. Sem., **3** (1935), 1–118.
- [GWFel] A. C. Gilbert, W. Willinger, A. Feldmann, *Scaling Analysis of Conservative Cascades, with Applications to Network Traffic*, IEEE Trans. on Information Theory, vol. 45, no. 3, pp. 971–992, 1999.

- [Gu] Y. Guivarc'h, *Sur une extension de la notion de loi semi-stable*, Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. et Statist. **26** (1990), 261–285.
- [HaJeKaPrSh] T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, and B.I. Shraiman, *Fractal measures and their singularities: the characterisation of strange sets*, Phys. Rev. A **33** (1986), p. 1141.
- [H] Y. Heurteaux, *Estimations de la dimension inférieure et de la dimension supérieure des mesures*, Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. et Statist. **34** (1998), 309–338.
- [HoWa] R. Holley and E.C. Waymire, *Multifractal dimensions and scaling exponents for strongly bounded random fractals*, Ann. Appl. Probab., **2** (1992), 819–845.
- [Jaf1] S. Jaffard, *Exposants de Hölder en des points donnés et coefficients d'ondelettes*, C. R. Acad. Sci. Paris, **308** Série I (1989), 79–81.
- [Jaf2] S. Jaffard, *The spectrum of singularities of Riemann's function*, Rev. Math. Ibero-americana, **12** (1996), 441–460.
- [Jaf3] S. Jaffard, *Multifractal formalism for functions*, S.I.A.M. J. Math. Anal., **28** (1997), 944–998.
- [Jaf4] S. Jaffard, *Old friends revisited. The multifractal nature of some classical functions*, J. Four. Anal. Appl., **3** (1997), 1–22.
- [Jaf5] S. Jaffard, *Oscillations spaces: Properties and applications to fractal and multifractal functions*, J. Math. Phys. **39** (8) (1998), 4129–4141.
- [Jaf6] S. Jaffard, *The multifractal nature of Lévy processes*, Probab. Theory Rel. Fields, **114** (2) (1999), 207–227.
- [Jaf7] S. Jaffard, *On lacunary wavelet series*, Ann. of Appl. Prob., **10**(1) (2000), 313–329.
- [Jaf8] S. Jaffard, *On the Frisch-Parisi Conjecture*, J. Math. Pures Appl., **79**(6) (2000), 525–552.
- [Jaf9] S. Jaffard, *Beyond Besov spaces. I. Distributions of wavelet coefficients*, J. Fourier Anal. Appl. **10** (2004), no. 3, 221–246.
- [Jaf10] S. Jaffard, *Beyond Besov spaces. II. Oscillation spaces*, à paraître dans Constructive Approximation.
- [Ja] V. Jarník, *Diophantischen Approximationen und Hausdorffsches Mass*, Mat. Sbornik **36** (1929), 371–381.
- [JoLeN] A. Joffe, L. Le Cam and J. Neveu, *Sur la loi des grands nombres pour des variables aléatoires de Bernoulli attachées à un arbre dyadique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **277** (1973), 963–964.
- [K1] J.-P. Kahane, *Sur le modèle de turbulence de Benoît Mandelbrot*, C. R. Acad. Sci. Paris, **278** (1974), 621–623.
- [K2] J.-P. Kahane, *Sur le chaos multiplicatif*, Ann. Sci. Math. Québec, **9** (1985), 105–150.
- [K3] J.P. KAHANE, *Some random series of functions*, Cambridge University Press, 1985.
- [K4] J.-P. Kahane, *Positive martingales and random measures*, Chi. Ann. of Math., **8B1** (1987), 1–12.

- [K5] J.-P. Kahane, *Multiplications aléatoires et dimensions de Hausdorff*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **23** (1987), 289–296.
- [K6] J.-P. Kahane, *Produits de poids aléatoires et indépendants et applications*. In: Fractal Geometry and Analysis, J. Bélair and S. Dubuc (eds.), 1991, pp. 277–324.
- [KP] J.-P. Kahane and J. Peyrière, *Sur certaines martingales de Benoît Mandelbrot*, Adv. Math, **22** (1976), 131–145.
- [Ke] M. Kesseböhmer. Large deviations for weak Gibbs measures and multifractal spectra. Nonlinearity **14** (2001), 395–409.
- [KhKi] K. Khanin and Y. Kifer, *Thermodynamic formalism for random transformations and statistical mechanics*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **171** (1996), 107–140.
- [Ki1] Y. Kifer, *Equilibrium states for random expanding transformations*, Random and Comput. Dyn. **1** (1992), 1–31.
- [Ki2] Y. Kifer, *Fractals via random iterated function systems and random geometric constructions*, in Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, Progress in Probability **37**, Bolthausen E., Dozzi M., F. Russo (eds.)(Birkhauser, 1995).
- [KoMo] W. König, P. Mörters, *Brownian intersection local times: upper tails and thick points*, Ann. Probab **30** (2002), 1605–1656.
- [Ky] A.E. Kyprianou, *Martingale convergence and the stopped branching random walk*, Probab. Theory Rel. Fields, **116** (2000), no. 3, 405–419.
- [Law1] G. F. Lawler, *Multifractal nature of two dimensional simple random walks paths*, Sympos. Math. XXXIX, 231–264, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999).
- [Law2] G. F. Lawler, *The frontier of a Brownian path is multifractal*, non publié (1999).
- [LeTa] M. Ledoux, M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Springer, 1991.
- [LedPo] F. Ledrappier, A. Porzio, *On the multifractal analysis of Bernoulli convolutions. I. Large-deviation results, II. Dimensions*, J. Stat. Phys., **82** (1996), 367–420.
- [LemMe] P.-G. Lemarié, Y. Meyer, *Ondelettes et bases hilbertiennes*, Rev. Mat. Iberoamericana, **1** (1986), 1–18.
- [L-VSi] J. Lévy Véhel and B. Sikdar, *A Multiplicative Multifractal Model for TCP Traffic*, Proceedings of IEEE ISCC, 714–719, (2001).
- [Liu1] Q. Liu, *Sur une équation fonctionnelle et ses applications: une extension du théorème de Kesten-Stigum concernant des processus de branchement*, Adv. in Appl. Probab., **29** (1997), 353–373.
- [Liu2] Q. Liu, *Fixed points of a generalized smoothing transformation and applications to the branching random walk*, Adv. in Appl. Probab., **30** (1998), 85–112.
- [Liu3] Q. Liu, *On generalized multiplicative cascades*, Stoch. Proc. Appl., **86** (2000), 263–286.
- [Liu4] Q. Liu, *Asymptotic properties and absolute continuity of laws stable by random weighted mean*, Stoch. Proc. Appl., **95** (2001), 83–107.
- [Liu5] Q. Liu, *An extension of a functional equation of Poincaré and Mandelbrot*, Asian J. Math., **6** (2002), 145–168.

- [LiuRo] Q. Liu and A. Rouault, *On two measures defined on the boundary of a branching tree*. In: Classical and Modern Branching Processes (Minneapolis, MN, 1994), IMA Vol. Math. Appl., **84**, Springer-Verlag, New York, 1997, pp. 187–201.
- [M1] B.B. Mandelbrot, *Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy in intermittent turbulence*. In: Statistical Models and Turbulence (La Jolla, California). Edited by M. Rosenblatt and C. Van Atta. Lectures Notes in Physics 12. Springer-Verlag, New York, 1972, pp. 333–351.
- [M2] B.B. Mandelbrot, *Renewal sets and random cutouts*, Z. Wahrsch. verw. Geb., **22** (1972), 145–157.
- [M3] B.B. Mandelbrot, *On Dvoretzky coverings for the circle*, Z. Wahrsch. verw. Geb., **22** (1972), 158–160.
- [M4] B.B. Mandelbrot, *Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier*, J. Fluid. Mech., **62** (1974), 331–358.
- [M5] B.B. Mandelbrot, *Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyennes pondérées*, C. R. Acad. Sci. Paris, **278** (1974), 289–292 et 355–358.
- [M6] B.B. Mandelbrot, *Multifractal products of pulses*, non publié (1996).
- [Mat] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces, Fractals and rectifiability*, Cambridge studies in advanced mathematics, **44**, Cambridge University Press, 1995.
- [Mol] G.M. Molchan, *Scaling exponents and multifractal dimensions for independent random cascades*, Commun. Math. Phys., **179** (1996), 681–702.
- [MuBaArn] J.-F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, *The multifractal formalism revisited with wavelets* Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **4** (1994), no. 2, 245–302.
- [O1] L. Olsen, *Random geometrically graph directed self-similar multifractals*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **307**, 1994.
- [O2] L. Olsen, *A multifractal formalism*, Adv. Math., **116** (1995), 92–195.
- [ParPol] W. Parry, M. Pollicott, *Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics*, Astérisque, SMF, **187-188**, 1990.
- [P1] J. Peyrière, *Turbulence et dimension de Hausdorff*, C. R. Acad. Sci. Paris, **278** (1974), 567–569.
- [P2] J. Peyrière, *Calculs de dimensions de Hausdorff*, Duke Math. J., **44** (1977), 591–601.
- [P3] J. Peyrière, *A Singular Random Measure Generated by Splitting $[0,1]$* , Z. Wahrsch. verw. Gebiete **47** (1979), 289–297.
- [Rand] D.A. Rand, *The singularity spectrum $f(\alpha)$ for cookie-cutters*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **9** (1989), 527–541.
- [RiM] R.H. Riedi, B. Mandelbrot, *Exceptions to the Multifractal Formalism for Discontinuous Measures*, Math. Proc. Cambr. Phil. Soc., **123** (1998), 133–157.
- [RiL-V] R. H. Riedi and J. Lévy-Véhel, *TCP Traffic is multifractal: A numerical study*. Inria Tech. Rep. RR-3129 (1997).
- [R] F. Riesz, *Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Function von beschränkter Schwankung*, Math. Z., **2** (1918), 312–315.

- [Ru] D. Ruelle. *Thermodynamic Formalism*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **5**, Addison-Weysley, 1978.
- [Sa-RaT] X. Saint Raymond, C. Tricot, *Packing regularity of sets in n -space*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **288** (1985), 679–699.
- [S1] L. A. Shepp, *Covering the line with random intervals*, Z. Wahrsch. Verw. Gebeite, **23** (1972), 163–170.
- [S2] L. A. Shepp, *Covering the circle with random arc*, Israel J. Math., **11** (1972), 328–345.
- [T] C. Tricot, *Two definitions of fractional dimension*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **91** (1982), 57–74.
- [WaWi] E.C. Waymire and S.C. Williams, *A cascade decomposition theory with applications to Markov and exchangeable cascades*, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), no. 2, 585–632.
- [Y] M. Yuri, *Weak Gibbs measures for certain non-hyperbolic systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **20** (2000), 1495–1518.