

## Courbes pour la CAO

### Courbes de Bézier et B-Splines

## Courbes de Bézier

Les courbes de Bézier ont été inventées en 1962 par Pierre Bézier, ingénieur chez Renault.

Une courbe élémentaire de Bézier est une courbe paramétrée déterminée par 4 points de contrôle  $P_0, P_1, P_2, P_3$  dans le plan ou dans l'espace :

$$S(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1$$

On vérifie que  $S(0) = P_0$ ,  $S'(0) = -3\overrightarrow{P_0 P_1}$  et  $S(1) = P_3$ ,  $S'(1) = 3\overrightarrow{P_2 P_3}$ , la courbe passe par  $P_0$  et  $P_3$  et y est tangente, respectivement, à  $\overrightarrow{P_0 P_1}$  et  $\overrightarrow{P_2 P_3}$ . Par ailleurs la courbe est en chaque point barycentre avec des poids positifs des 4 points de contrôle, elle est donc dans l'enveloppe convexe des 4 points.

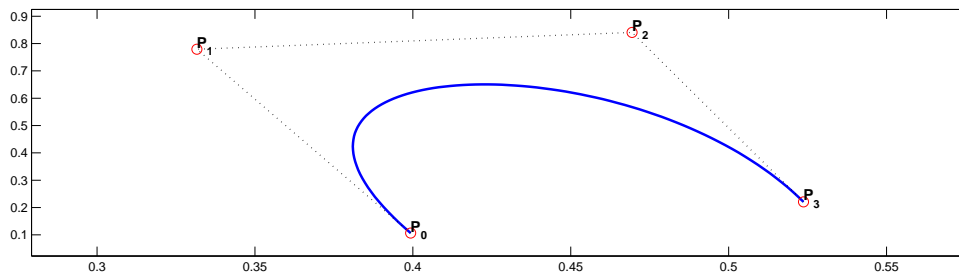


FIG. 1 – Courbe élémentaire de Bézier et son polygone de contrôle.

Soit  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ ,  $n+1$  points du plan ou de l'espace. On définit la courbe de Bézier associée à ces points de contrôle par :

$$S(t) = \sum_{k=0}^{k=n} B_k^n(t) P_k \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1$$

où les  $B_k^n(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$  sont les polynômes de base de Bernstein.

On vérifie que  $S(0) = P_0$ ,  $S'(0) = -n\overrightarrow{P_0P_1}$  et  $S(1) = P_n$ ,  $S'(1) = 3\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ , la courbe de Bézier passe par  $P_0$  et  $P_n$  et y est tangente, respectivement, à  $\overrightarrow{P_0P_1}$  et  $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ . La courbe est  $C^\infty$ , elle est dans l'enveloppe convexe des points de contrôle. Le déplacement d'un seul de ces points modifie toute la courbe.

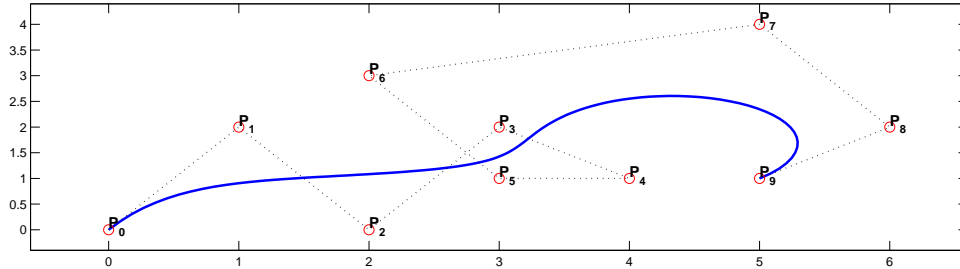


FIG. 2 – Courbe de Bézier et son polygone de contrôle à 10 points.

## Les B-Splines

Soit  $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_m$  une suite croissante (au sens large) de réels, on définit par récurrence les fonctions B-Spline de degré  $k$  par :

$$\begin{cases} \text{pour } 0 \leq i \leq m-1 \\ B_{i,0}(t) = 1 \quad \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}[ , \quad B_{i,0}(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \text{pour } k \geq 1 \text{ et } 0 \leq i \leq m-k-1 \\ B_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) \end{cases} \quad (2)$$

avec la convention  $\frac{x}{0} = 0$ .

### Propriétés des B-Splines :

- $B_{i,k}(t)$  est un polynôme de degré  $k$  sur  $[t_j, t_{j+1}[$
- $B_{i,k}(t) = 0$  si  $t \notin [t_i, t_{i+k+1}[$  support compact
- $0 < B_{i,k}(t) \leq 1$  si  $t \in ]t_i, t_{i+k+1}[$
- $B_{i,k}(t_i) = 0$  sauf si  $t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+k} < t_{i+k+1}$  alors  $B_{i,k}(t_i) = 1$
- Pour  $t \in ]t_i, t_{i+k+1}[$ ,  $B_{i,k}(t) = 1$  si et seulement si  $t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+k} = t$
- Partition de l'unité
  - ◆  $\sum_{i=j-k}^{i=j} B_{i,k}(t) = 1$  pour  $t \in [t_j, t_{j+1}[$
  - ◆  $\sum_{i=0}^{i=m-k-1} B_{i,k}(t) = 1$  pour  $t_k \leq t < t_{m-k}$
  - ◆  $\sum_{i=0}^{i=n-1} B_{i,k}(t) = 1$  pour  $n \leq m-k$  et  $t_k \leq t < t_n$

- $B_{i,k}$  est  $C^\infty$  à droite de chaque point
- $B_{i,k}$  est  $C^{k-r}$  au voisinage de chaque nœud de multiplicité  $r$
- $\forall t, B_{i,k}(t)$  est dérivable à droite et

$$B'_{i,k}(t) = k \left[ \frac{B_{i,k-1}(t)}{t_{i+k} - t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \right]$$

**Cas des nœuds distincts uniformes :**  $t_i = i, 0 \leq i \leq m$

- $B_{i,k}(t) = B_{0,k}(t - i)$  invariance par translation
- $B_{0,k}(t) = B_{0,k}(k + 1 - t)$  symétrie
- Support de  $B_{0,k}$  dans  $[0, k + 1]$

$$B_{0,0}(t) = \mathbf{1}_{[0,1[}$$

$$B_{0,1}(t) = t \mathbf{1}_{[0,1[} + (2 - t) \mathbf{1}_{[1,2[}$$

$$B_{0,2}(t) = \frac{t^2}{2} \mathbf{1}_{[0,1[} + \frac{-2t^2 + 6t - 3}{2} \mathbf{1}_{[1,2[} + \frac{(3 - t)^2}{2} \mathbf{1}_{[2,3[}$$

$$B_{0,3}(t) = \frac{t^3}{6} \mathbf{1}_{[0,1[} + \frac{-3t^3 + 12t^2 - 12t + 4}{6} \mathbf{1}_{[1,2[} + \frac{3t^3 - 24t^2 + 60t - 44}{6} \mathbf{1}_{[2,3[} + \frac{(4 - t)^3}{6} \mathbf{1}_{[3,4[}$$

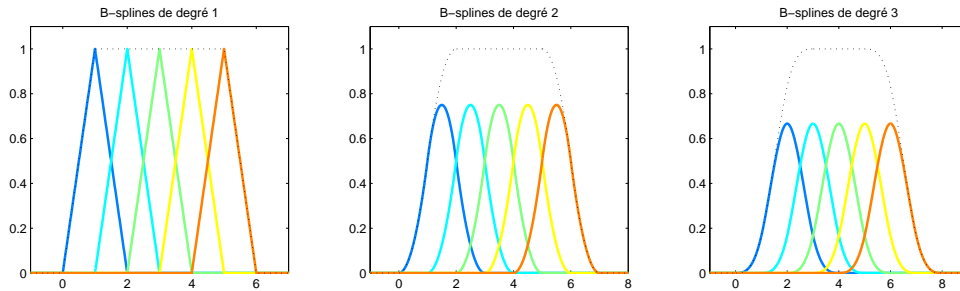


FIG. 3 – Cinq B-Splines uniformes et leur somme, degrés 1 à 3.

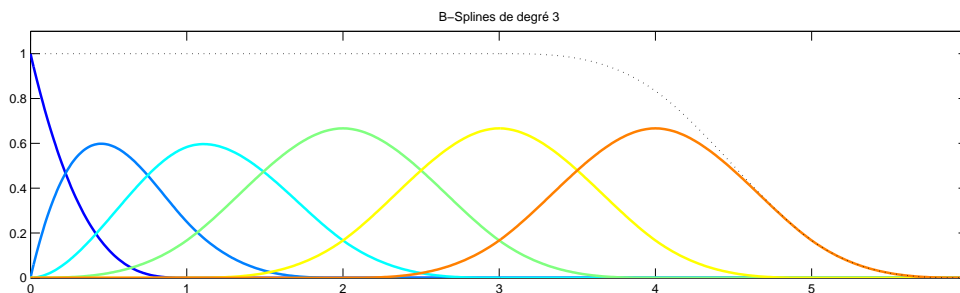


FIG. 4 –  $B_{0,3}$  à  $B_{5,3}$  pour les nœuds  $0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  et leur somme.

## Courbes B-Spline

Soit  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ ,  $n$  points du plan ou de l'espace.

Soit, une famille croissante au sens large de réels  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$ , avec  $m \geq n + k$ , et les B-Splines

$B_{i,k}$  de degré  $k$  associées.

On appelle courbe B-Spline associée au polygone des  $P_i$  la courbe paramétrée :

$$S(t) = \sum_{i=0}^{i=n-1} B_{i,k}(t)P_i, \quad \text{pour } t_k \leq t < t_n$$

Notez que l'intervalle du paramètre  $t$  est défini de telle façon que la somme des  $B_{i,k}(t)$  soit toujours égale à 1, de sorte que, pour tout  $t$ ,  $S(t)$  est le barycentre à poids positifs des  $P_i$ , ainsi la courbe spline est-elle dans l'enveloppe convexe des points  $P_i$ .

La courbe ne passe en général pas par les points  $P_i$ . Par contre si  $t_0 = t_1 = \dots = t_k < t_{k+1}$  la courbe passe par  $P_0$  ( $S(t_0) = P_0$ ) et est en ce point tangente à  $P_0P_1$ . De même si  $t_n = t_{n+1} = \dots = t_{n+k}$  la courbe passe par  $P_{n-1}$  et y est tangente à  $P_{n-2}P_{n-1}$ , on dit alors que la courbe est "vissée" aux extrémités (clamped).

Un point de la courbe ne dépend que au plus de  $k + 1$  points de contrôle, si  $t_j \leq t < t_{j+1}$ ,  $S(t)$  ne dépend que des points  $P_i$  pour  $j - k \leq i \leq j$ . Inversement le point  $P_j$  n'influence la courbe que pour les points tels que  $t_j \leq t < t_{j+k+1}$ .

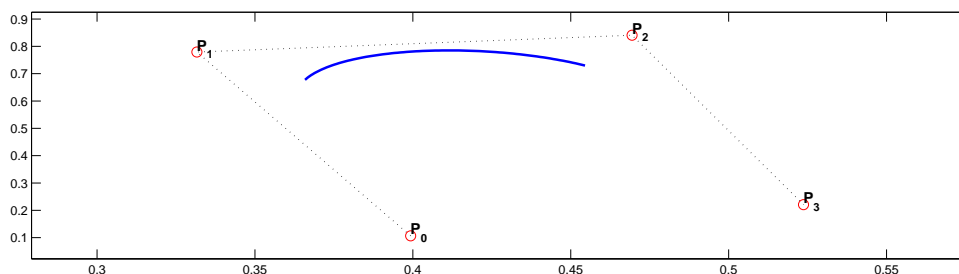


FIG. 5 – Spline cubique avec 4 points de contrôle et 7 nœuds uniformes.

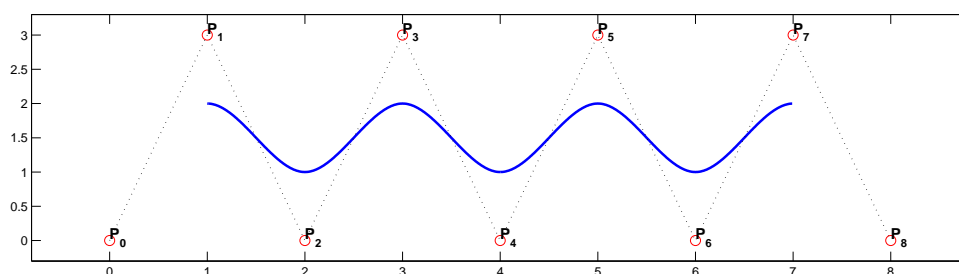


FIG. 6 – Spline cubique avec 9 points de contrôle et 13 nœuds uniformes.

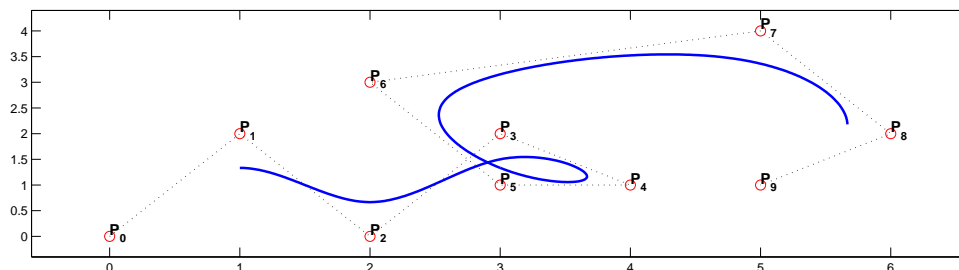


FIG. 7 – Spline cubique avec 10 points de contrôle et 14 nœuds uniformes.

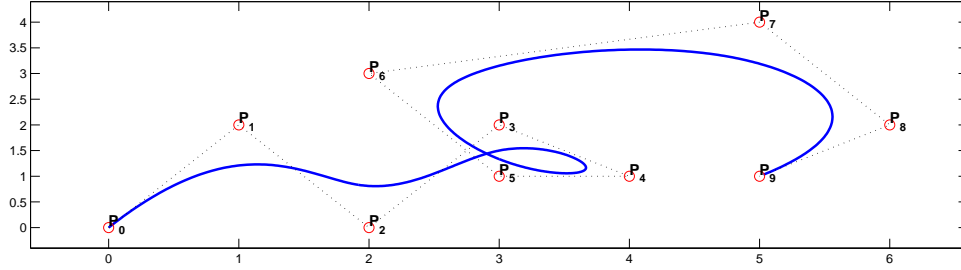


FIG. 8 – Spline cubique avec 10 points de contrôle et les 14 nœuds : 0 0 0 0 1 2 3 4 5 6 7 7 7 7. Comparez avec la courbe de Bézier (figure 2) et la B-Spline à nœuds uniformes (figure 7) pour le même polygone.

### Courbe Spline fermée - spline périodique

Pour obtenir une courbe fermée de degré  $k$  à partir du polygone  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  on utilisera des nœuds uniformes et :

$$S(t) = \sum_{i=0}^{i=n'-1} B_{i,k}(t)P_i, \quad \text{pour } t_k \leq t < t_{n'}$$

avec  $n' = n + k + 1$  et  $P_{i+n} = P_i$ .

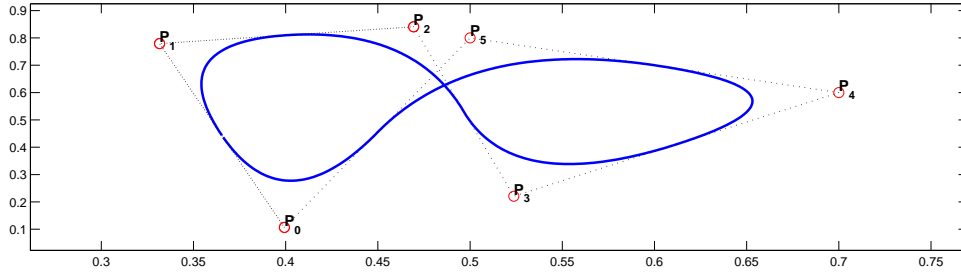


FIG. 9 – Spline périodique de degré 2 avec 5 points de contrôle et des nœuds uniformes.

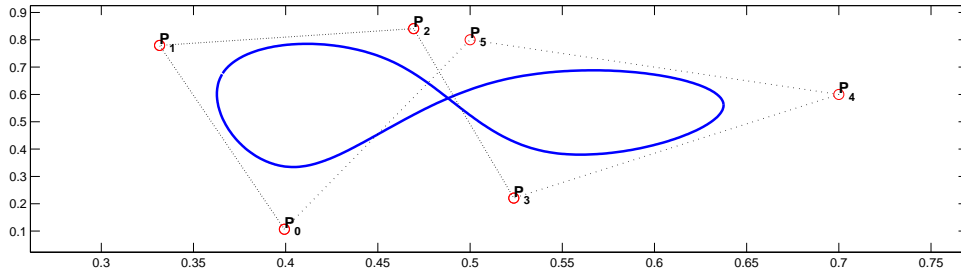


FIG. 10 – Spline périodique de degré 3 avec 5 points de contrôle et des nœuds uniformes.

### Courbe Spline cubique - autre formulation

Soit  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , 4 points de contrôle; la courbe spline cubique associée à ces 4 points et des nœuds uniformes s'écrit :

$$S(t) = \frac{1}{6} \left( \alpha_1(t) P_1 + \alpha_2(t) P_2 + \alpha_3(t) P_3 + \alpha_4(t) P_4 \right) \quad \text{pour } 0 \leq t < 1$$

avec :

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= (1-t)^3 \\ \alpha_2(t) &= 3t^3 - 6t^2 + 4 \\ \alpha_3(t) &= -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1 \\ \alpha_4(t) &= t^3\end{aligned}$$

On vérifie que pour  $t \in [0, 1]$  :  $0 \leq \alpha_i(t)$  et  $\sum_1^4 \alpha_i(t) = 6$ .

Maintenant, soit  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ ,  $n$  points de contrôle, la courbe B-Spline associée à des nœuds uniformes est donnée en  $n - 3$  morceaux par :

$$S_i(t) = \frac{1}{6} \left( \alpha_1(t) P_i + \alpha_2(t) P_{i+1} + \alpha_3(t) P_{i+2} + \alpha_4(t) P_{i+3} \right) \quad \text{pour } 0 \leq t < 1 \text{ et } 0 \leq i \leq n - 4$$

On vérifie en effet que :

- $S_i(0) = \frac{1}{6} (P_i + 4P_{i+1} + P_{i+2}) = S_{i-1}(1)$  d'où la continuité,
- $S'_i(0) = \frac{1}{2} (P_{i+2} - P_i) = S'_{i-1}(1)$  d'où le caractère  $C^1$
- $S''_i(0) = P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i = S''_{i-1}(1)$  d'où le caractère  $C^2$

### Relation entre courbe de Bézier et B-Splines

La courbe de Bézier associée à  $n + 1$  points de contrôle est la courbe B-Spline de degré  $n$  avec comme nœuds les points  $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$  et  $t_{n+1} = t_{n+2} = \dots = t_{2n+1} = 1$ .

## Approximation par B-Splines

Soit une fonction  $f(x)$  définie et  $C^2$  sur  $[a, b]$  et soit la suite croissante au sens large de  $n + k + 1$  nœuds  $t_i$  tels que :

$$t_0 = t_1 = \dots = t_k = a < t_{k+1} \dots \leq t_{n-1} < b = t_n = \dots = t_{n+k}$$

permettant de définir les B-Splines de degré  $k$ ,  $B_{i,k}$  pour  $0 \leq i \leq n - 1$ . Posons :

$$t_i^* = \frac{t_{i+1} + t_{i+2} + \dots + t_{i+k}}{k} \quad \text{et} \quad S_f(t) = \sum_{i=0}^{i=n-1} f(t_i^*) B_{i,k}(t)$$

$S_f(t)$  est une approximation B-Spline de  $f$  sur  $[a, b]$ . On a la majoration de l'erreur suivante :

$$\|f - S_f\|_\infty \leq \frac{h^2}{2k^2} \|f''\|_\infty$$

avec  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f|$  et  $h = \sup_i (t_{i+1} - t_i)$ .

La dérivée à droite de  $S_f$  est donnée (avec toujours la convention  $\frac{x}{0} = 0$ ) par :

$$S'_f(t) = \sum_{i=1}^{i=n-1} k \frac{f(t_i^*) - f(t_{i-1}^*)}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

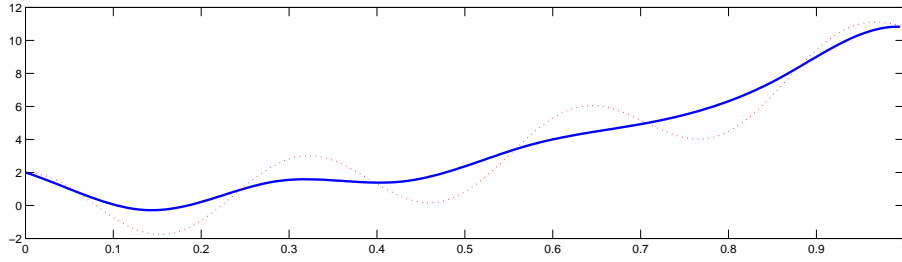


FIG. 11 – Spline de degré 3 d'approximation de la fonction en pointillés,  $n = 10$ .

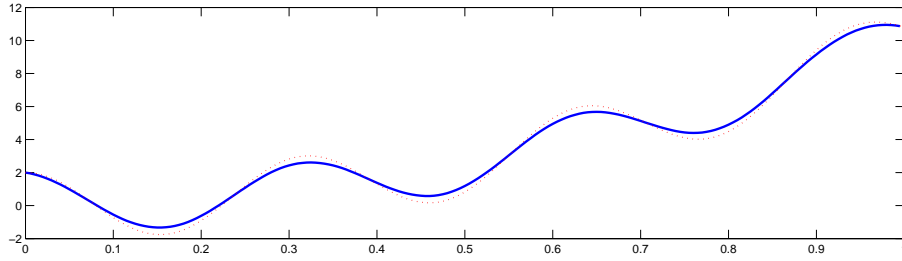


FIG. 12 – Spline de degré 3 d'approximation de la fonction en pointillés,  $n = 20$ .

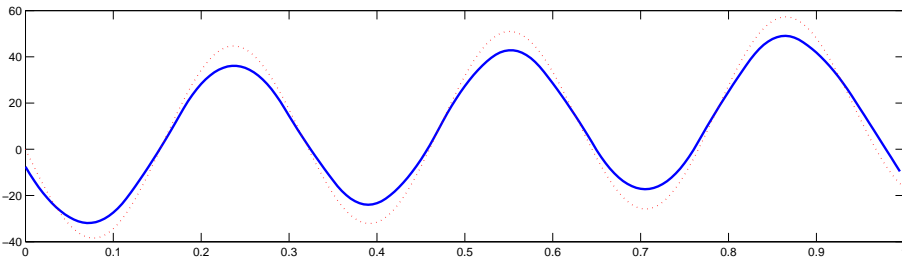


FIG. 13 – Dérivées de la fonction et de son approximation Spline de degré 3,  $n = 20$ .

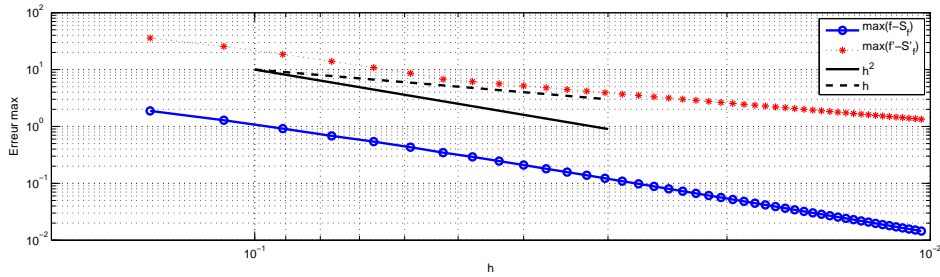


FIG. 14 – Erreur  $L^\infty$  sur la fonction et sa dérivée en fonction de la maille  $h$ .

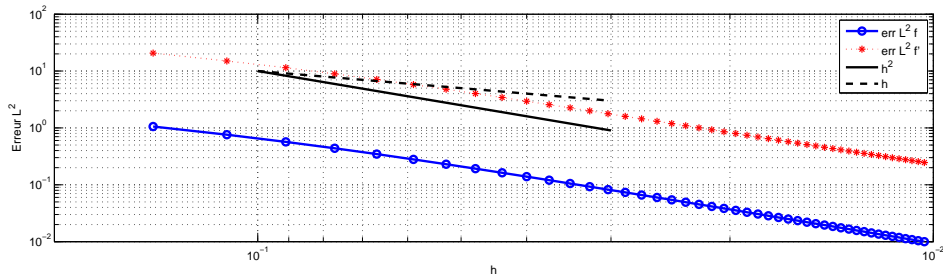


FIG. 15 – Erreur  $L^2$  sur la fonction et sa dérivée en fonction de la maille  $h$ .

## Références

- Méthodes mathématiques pour la CAO - J.J. Risler - RMA 18 - Masson
- A practical guide so Splines - Carl de Boor - Applied Mathematical Sciences 27 - Springer-Verlag
- <http://www.cs.mtu.edu/shene/COURSES/cs3621/NOTES/spline/B-spline/...bspline-curve-prop.html>
- [http://www.liafa.jussieu.fr/carton/Enseignement/InterfacesGraphiques/MasterInfo/ ... Cours/Swing/splines.html](http://www.liafa.jussieu.fr/carton/Enseignement/InterfacesGraphiques/MasterInfo/...Cours/Swing/splines.html)