Annales et commentaires sur le Kultur'Math S2 MIAS 2002

10 juillet 2002

Contexte

Les modules de "Culture Mathématiques" a été mis en place pour le DEUG MIAS d'Orsay à partir de 2000-2001 en première année, puis en deuxième année en 2001-2002. Ils sont destinés aux étudiants spécialement motivés pour les maths, en particulier (mais pas exclusivement) ceux qui se destinent à une licence de maths, ou de physique fondamentale. À l'origine, le but est d'essayer de diminuer l'échec en licence et au CAPES des meilleurs étudiants issus du DEUG. De manière plus générale, il permet d'avoir un espace de temps où les étudiants se confrontent à des problèmes plus difficiles, moins scolaires, en se donnant le temps de "sécher". Le danger du découragement est assez bien évité par le fait que les étudiants travaillent en groupe.

Remarques diverses

Certains énoncés ont été modifiés après coup, en tenant compte du déroulement des séances. Tous les exercices n'ont pas été traités. La plupart des sources tex sont disponibles sur

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ guirarde/EXEMAALT/exos_ individuels/

Les "objectifs et commentaires" qui précèdent chaque exercice étaient absents des textes fournis aux étudiants.

Voici des remarques, feuilles par feuilles, qui complètent les commentaires précédant les exercices, ainsi qu'une indication de durée.

1. (Nombres complexes et polynômes, durée : 3 séances) L'exercice du crocodile est beaucoup apprécié... L'exercice 3 marche assez bien : bien sûr, les étudiants ne donnent pas la solution la plus courte (très peu pensent à utiliser que la somme des racines fait 0 pour réduire le problème), mais ça n'est pas le but !

2. (Carrés magiques, durée : 1 séances) Cet activité fonctionne assez bien. Le principal problème est qu'il faudrait probablement 3 heures pour tout faire.

3. (Suites, durée : 3 séances) Cette feuille marche bien, les étudiants ne font pas tout mais ici ça n'a pas vraiment d'importance. Il faut Une séance pour le quizz (on peut demander aux groupes d'inscrire leur réponses au tableau pour renforcer le côté ludique) ; ensuite, c'est très variable selon les groupes.

4. (algèbre linéaire, durée : trois séances) L'exercice sur les hyperplans est vraiment très difficile pour les étudiants, il faudrait probablement essayer de le reformuler

encore. Pour les espaces de fonctions, on peut insister sur l'importance de l'activité de "traduction", quand on passe du cadre "algèbre linéaire abstraite", où l'on doit oublier qu'on a affaire à des fonctions (en particulier, le "x" disparait), au cadre "ensemble de fonctions" : par exemple, pour la question b, on écrit d'abord la définition de l'indépendance (premier cadre) ; puis on revient au cadre "fonctions", ce qui consiste principalement à ne pas se tromper sur le zéro de l'espace vectoriel (et ne pas oublier le "pour tout x..."). Il faudrait probablement multiplier ce genre d'activités.

5. (matrices et applications linéaires, durée : 2 séances) On a principalement fait l'exercice sur les rotations. Il y a une difficulté pour la question 1.b (linéarité d'une rotation qui n'est pas centrée en 0) : les étudiants ont tendance à dessiner leurs vecteurs issus du centre de la rotation ; autrement dit, ils testent la linéarité de l'application tangente et non pas de la rotation elle-même ! Et au fond, ils ont raison, il est très bizarre de vouloir faire agir une rotation non centrée en 0 sur des vecteurs "issus de 0". Il faut probablement ré-écrire cette question en évoquant la double vie des éléments de $\mathbb{R}^2$, vecteurs et points...

6. (Examen, durée : 3h) Un ou deux groupes ont réussi à faire l'exercice sur les polynômes en entier (ce qui a donné deux notes de 20).

   La méthode de Newton a été traitée par beaucoup et a assez bien marché.

   Un groupe a abordé la "dynamique des populations", malheureusement la recherche des valeurs propres a été formulée de manière exacte mais non efficace, ce qui a conduit à une erreur de calcul.

   L'exercice sur les droites a été très peu abordé.

   Par contre presque tous les groupes ont fait des trous dans le tapis de Sierpinski. Et très peu ont remarqué que les sommes obtenues étaient géométriques (le fait qu'il ne reste rien du tapis à la fin leur parait évident, mais sans preuve). Et ils refusent de calculer la durée, parce que, bien sûr, ça ne peut que durer un temps infini puisqu'il y a une infinité d'étape (et revoilà le bon vieux paradoxe de Zénon...).

Suggestions Essayer la bataille navale linéaire ! (voir EXEMAALT...).

Dans les fiches d'évaluation remises par les étudiants, la difficulté de certains sujets est parfois critiquée. Cependant, le travail en groupe est très apprécié, et l'approche moins scolaire que d'habitude également :

"C'est plus intéréssant que les TD de maths "normaux" qui sont souvent très ennuyeux. Certaines séances m'ont rappelé que les maths, ça peut être amusant."

"Ça permet de réfléchir, ce qu'on ne fait pas toujours en TD normal." !!

L'aspect ludique est également apprécié, et sans doute à développer (par exemple sous forme de "compétitions" entre groupes ?).

Les étudiants attendent aussi que le module les aide a approfondir les notions etudiées en cours de maths. Ceci est une contrainte a respecter plus ou moins quand on choisit des exercices.

Nombres complexes, polynômes

Exercice 1 : Dessiner le crocodile : visualisation de la multiplication complexe –

> OBJECTIF ET COMMENTAIRES. *L'image d'un crocodile par l'application $z \mapsto z^2$ est un crocodile qui se mord la queue, manière visuelle percevoir la non-injectivité. Cet exercice est inspiré du début du film d'Adrien Douady sur la dynamique du lapin, où Adrien explique sans formule, graphiquement, la fonction $z \mapsto z^2 + c$.*
>
> *On peut faire placer des points de l'image du croco au fur et à mesure des questions 1 et 2.*

On voudrait comprendre "quel effet cela fait à un nombre complexe de se faire élever au carré", c'est-à-dire *construire une représentation mentale* de l'application φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2. \end{array}$$

Pour ça, on cherche à dessiner l'image du crocodile par l'application φ. Voici quelques

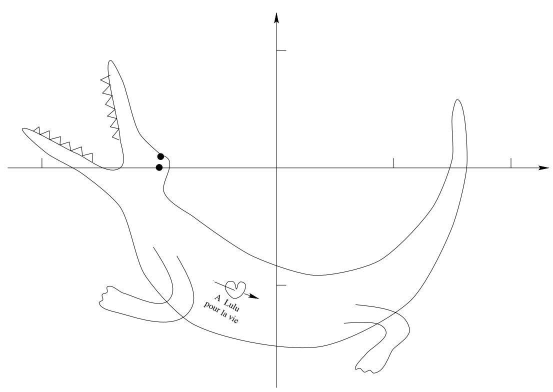


FIG. 1:

questions pour vous aider à faire le dessin :

a. Ecrire les parties réelles et imaginaires de z^2 en fonction de celles de z, puis le module et l'argument de z^2 en fonction de ceux de z. Commentaire ?

b. Dessiner une demi-droite issue de 0 et son image par φ.

c. Quelle est l'image d'un cercle centré en 0 ? Placer aussi les images de quelques points particuliers du cercle. "Comment décririez-vous l'effet de φ sur le cercle unité" ?

d. “Dessiner l’image du crocodile”.

e. “Comment voit-on que l’application n’est pas injective?”

f. Dessiner l’image réciproque du crocodile (attention, il y a un piège...).

Exercice 2 : Puissances des racines 90èmes de l’unité –

> Objectif et commentaires. *Savoir expérimenter pour découvrir une formule ; un peu de théorie des groupes sans le dire...*
>
> *Expérience : un étudiant motivé peut trouver la formule ; la preuve est beaucoup plus délicate.*

Soit z un nombre complexe qui est une racine 90ème de l’unité. On considère toutes les puissances positives de z :

$$z^0, z^1, z^2, z^3, \ldots$$

Combien obtient-on ainsi de nombres complexes distincts ?

Autrement dit, quel est le cardinal de l’ensemble

$$G_z = \{z^k | k \in \mathbb{N}\} \quad ?$$

Suggestion Expérimentez !

Exercice 3 : Sommes de racines cinquième de l’unité –

> Objectif et commentaires. *Expérimenter, visualiser des sommes de nombres complexes, utiliser les propriétés du groupe des racines de l’unité (somme nulle, invariance par rotation).*

On considère l’ensemble des racines cinquièmes de l’unité. On en choisit certaines (entre une et cinq !), on fait leur somme, et on prend le module de cette somme.

Quel est le plus grand nombre que l’on peut obtenir de cette manière ?

Autrement dit, si U_5 désigne l’ensemble des racines cinquièmes de l’unité, la question consiste à calculer le nombre suivant :

$$\mathrm{Max} \left\{ \left| \sum_{w \in E} w \right| \text{ avec } E \subset U_5 \right\}.$$

Suggestions

– Rassemblez vos connaissances sur les racines $n$ièmes de l’unité ;

– expérimentez : représentez quelques-unes des sommes impliquées dans le problème ; pouvez-vous les calculer ? Faites une conjecture, prouvez la conjecture !

Généralisation Généralisez l'énoncé précédent. Essayez de deviner la réponse au problème généralisé. Prouvez votre conjecture...

Exercice 4 : Quelqu'un aurait-il vu passer un polynôme ? –

> OBJECTIF ET COMMENTAIRES. *Cet exercice a été proposé en travail en groupe de quatre. La plupart des étudiants, avec un peu de temps, arrivent à trouver un énoncé satisfaisant (existence et unicité avec la condition de degré). Le plaisir d'avoir fabriquer un théorème les a marqué.*
>
> *Il est assez rejouissant de voir des étudiants trouver également eux-même la formule d'interpolation, alors qu'il y a souvent un blocage quand on la leur donne d'emblée. Notons que la preuve de l'unicité est très difficile à trouver pour eux (bien que très courte).*

*Ceci est un sujet ouvert, avec un énoncé vague, où votre premier travail sera d'expérimenter pour essayer de transformer cet énoncé vague en un énoncé précis, le plus intéressant et le plus "joli" possible ! Autrement dit, d'****apprendre à "fabriquer" l'énoncé d'un théorème...***

Voici une question vague : si on se donne un certain nombre de points dans le plan $\mathbb{R}^2$, y a-t-il des polynômes dont le graphe passe par ces points ? Y en a-t-il toujours, y en a-t-il un seul ou plusieurs, et quand il en existe, peut-on trouver une formule les donnant ?

Suggestions Voici quelques pistes de recherche (avec l'idée : quand un problème est trop difficile, **il faut essayer de le simplifier**, par exemple en commençant par des cas particuliers...) :

- Avez-vous une idée intuitive de la réponse ?
- Essayer avec 2 points. Comment peut-on formuler le résultat dans ce cas-là ? Essayer de donner le "meilleur" énoncé possible.
- Que dire si tous les points sont situés sur l'axe des abscisses (par exemple avec trois ou quatre points) ?
- Que dire si tous les points *sauf un* sont sur l'axe des abscisses ? Si tous les points *sauf deux* sont sur l'axe des abscisses ?...

Algèbre linéaire

Exercice 5 : Introduction à l'algèbre linéaire : les carrés magiques –

OBJECTIF ET COMMENTAIRES. *Cet exercice est destiné à être posé au tout début du cours d'algèbre linéaire, voire avant le cours. On tente d'introduire "naturellement" certaines des notions-clés, comme la définition d'espaces vectoriels, les bases (et l'existence de bases distinctes), la notion de somme directe, les applications linéaires...*

Cet exercice est fortement inspiré d'un devoir donné à l'université de Lille, que l'on trouve dans l'annexe 7 du texte de Marc Rogalski, Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année, *(cahier de DIDIREM 11, octobre 91). On lira d'ailleurs avec profit ce texte d'une trentaine de pages qui présente un enseignement pensé dans sa globalité ("ingénieurie longue"), ce qui n'empèche pas d'en extraire des petits morceaux...*

Il s'agit d'une activité de découverte de nouvelles notions, et il est difficile de rédiger un sujet sans interventions d'un professeur... On a donc signalé par le symbole (*) tous les endroits qui nécessite quelques commentaires. Voici des commentaires sur ces commentaires, dans l'ordre d'apparition du texte :

1. *On espère que les étudiants auront trouvé les carrés magiques constants, et au moins un autre (on peut éventuellement faire intéragir tous les groupes d'étudiants pour cela). Introduire ici la notion de somme et de produit par un scalaire (d'autres idées peuvent apparaitre, à l'aide de symétries par exemple : elles pourraient déboucher sur l'idée d'application linéaire, mais il vaut sans doute mieux les laisser tomber pour le moment...). Remarquer que l'on définit des nouvelles opérations (très simples), sur l'ensemble des carrés magiques E. Introduire le terme* espace vectoriel, *si le cours correspondant n'a pas déjà été fait. On peut aussi parler de* combinaison linéaire. *Faire remarquer que l'on n'est pas sûr d'avoir trouvé tous les carrés magiques...*
2. *La question n'est pas très facile à faire comprendre, et il faudra peut-être la reformuler ; on espère trouver des schémas du type*

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a & b & c \\ ? & e & ? \\ ? & ? & ? \end{array}}$$

ou bien

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a & b & ? \\ ? & e & ? \\ ? & ? & i \end{array}}$$

3. Simple vérification des résultats.

4. Idem.

Quand vous rencontrez le symbole (*), appelez le professeur et expliquez-lui vos résultats.

I. Définition, objectifs

Dans cet exercice, on appellera *carré magique* un tableau carré contenant 9 nombres réels, tel que les sommes des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales soient égales :

$$\boxed{\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}}$$

avec

$$\begin{matrix} a+b+c=S & a+d+g=S & a+e+i=S \\ d+e+f=S & \dots & c+e+g=S \\ g+h+i=S & \dots & \end{matrix}$$

où le nombre S s'appelle *la somme* du carré.[1]

Le but de l'exercice est de trouver *tous* les carrés magiques.

Sur le plan pédagogique, l'exercice est en quelque sorte un prétexte pour introduire dans ce cadre certaines des notions-clés de l'algèbre linéaire : *espaces vectoriels, bases, dimension, sommes directes, applications linéaires.*[2] Notamment, on n'essaiera pas de résoudre le problème de la manière la plus simple ou la plus courte, on tentera plutôt de bien comprendre les propriétés des objets étudiés.

Plus précisément, voici une stratégie possible : le problème revient à résoudre un système de 8 équations linéaires à 10 inconnues, et on a des méthodes pour faire ça. Mais ça n'est pas très agréable : avec un peu d'astuce et de réflexion, on va essayer de diminuer le nombre de calculs.

II. Fabrication de quelques carrés magiques

Question 1. Premiers exemples

Trouvez des exemples de carrés magiques les plus simples possibles. Essayez d'obtenir deux exemples "les plus différents possibles".

Question 2. Machines à fabriquer de nouveaux exemples

Comment peut-on obtenir de nouveaux exemples à partir de carrés magiques connus ? Essayez de trouver le plus possible de tels procédés.

(*)

1. Les amateurs de casse-tête rajoutent d'autres types de conditions, ce qui change radicalement la nature du problème (et le rend bien plus difficile).

2. Les notions introduites ici de manière un peu floue seront précisées en cours.

III. Une réduction du problème

Question 1. Décomposition

Montrer que tout carré magique peut se décomposer comme somme d'un carré magique constant (c'est-à-dire dont tous les termes sont égaux) et d'un carré magique de somme nulle.

Question 2. Unicité

Montrer que cette décomposition est unique.

Question 3.

Vérifiez que ces deux sous-ensembles de carrés magiques sont aussi des espaces vectoriels (on dit que ce sont des *sous-espaces vectoriels* de l'espace vectoriel E des carrés magiques).

On traduit les propriétés de cette partie en disant que *l'espace vectoriel des carrés magiques est la somme directe du sous-espace formé des carrés de somme nulle et du sous-espace formé des carrés constants.*

En quoi ceci permet-il de simplifier le problème? Formuler cette simplification le plus précisément possible.

IV. Résolution

On va chercher maintenant à déterminer tous les carrés magiques de somme nulle (répétons-le, en évitant de résoudre un “gros” système d'équations).

Question 1.

En pratique, quand on essaie de construire un carré magique (de somme nulle), on commence par remplir quelques cases par des valeurs arbitraires (il y a bien sûr énormément de choix possibles), puis, au bout d'un moment, on n'a plus du tout le choix : la suite du remplissage du carré est entièrement déterminée par les valeurs choisies dans les premières cases. Donnez un ou plusieurs exemples de remplissages de quelques cases du carré qui forcent ainsi toute la suite du remplissage du carré.

(*)

Question 2.

Choisir l'un des schémas trouvés à la question précédente, et compléter dans le carré les cases restantes en fonction des cases présélectionnées. Obtient-on toujours ainsi un carré magique de somme nulle? Sinon, que faut-il rajouter?

Question 3.

À partir de la question précédente, exprimer tous les carrés magiques de somme nulle à partir de quelques carrés particuliers.

En déduire l'ensemble de tous les carrés magiques, sous la même forme.

(*)

V. Encore quelques notions d'algèbre linéaires

Question 1. Bases et dimension

a. Combien faut-il de coefficients, au minimum, pour exprimer l'ensemble des carrés magiques ?

Ce "nombre minimum de paramètres à utiliser pour décrire un espace vectoriel" s'appelle la *dimension* de l'espace vectoriel. Donner de même la dimension du sous-espace vectoriel des carrés magiques constants, puis celle des carrés magiques de somme nulle.

b. Les carrés magiques particuliers utilisés à la question 3 pour décrire l'ensemble de tous les éléments de l'espace vectoriel forment *une base* de l'espace vectoriel (à condition toutefois qu'on en ait pris le moins possible).

Quel lien y a-t-il entre une base et la dimension ?

Un espace vectoriel peut-il avoir plusieurs bases différentes ?

Voyez-vous des liens entre la somme directe et les bases ?

(*)

VI. En guise de conclusion

A quoi sert l'algèbre linéaire ? Malheureusement, il n'y a pas de réponse simple au niveau DEUG : en effet, la plupart des problèmes pour lesquels on va utiliser l'algèbre linéaire peuvent aussi se résoudre de manière élémentaire, la plupart du temps en resolvant un système d'équations ; et ceci peut donner l'impression qu'on remplace des calculs fastidieux mais simples par des arguments et des concepts très compliqués, très abstraits : donc, l'utilité en tant qu'*outil* n'est pas très claire (en DEUG en tout cas !)

On peut quand même faire sentir l'intérêt de l'algèbre linéaire : celle-ci permet d'*unifier* des problèmes et des situations a priori très différentes, en donnant un cadre général dans lequel ces problèmes vont avoir le même aspect. Une telle démarche s'appelle *la méthode axiomatique*, et est fondamentale dans les mathématiques récentes.

Plus précisément, on commence par remarquer que l'on sait additionner deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ou deux fonctions, ou deux polynômes, ou deux suites de réels (comment ?...), ou deux carrés magiques ; et qu'on sait aussi multiplier chacun de ces objets par des réels.

Puisque ces objets (différents) peuvent subir le même type d'opération, ayant les mêmes propriétés formelles, les raisonnements ou les concepts qui utilisent uniquement ces opérations vont être valables dans chacun des cinq cadres cités. Par exemple, les notions de droite, de plan, de repère (on dira *base*), que l'on connait déjà dans $\mathbb{R}^3$, vont aussi être valables pour des espaces de fonctions ou de polynômes ! La propriété qui dit que "dans $\mathbb{R}^3$, deux plans ont toujours une droite en commun" deviendra ainsi "dans tout espace vectoriel de dimension 3, deux sous-espaces vectoriel de dimension 2 ont toujours un sous-espaces de dimension 1 en commun" et sera vraie quelle que soit la nature des éléments de l'espace vectoriel (fonctions, polynômes, suites, carrés magiques ou autres ; et on pourra d'ailleurs la généraliser à des dimensions supérieures).

Ce point de vue donne également un support géométrique, et permet de visualiser les objets : dans l'exercice, l'ensemble des carrés magiques s'avère être un espace vectoriel de dimension 3, ce qui permettra d'y faire exactement les mêmes opérations et les même raisonnements que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, que l'on "voit" beaucoup mieux que l'espace des carrés magiques.

Même si le DEUG n'en donne qu'un tout petit aperçu, la quantité de situations qui peuvent être modélisées par l'algèbre linéaire est immense, et va de questions purement mathématiques jusqu'à des problèmes très concrets d'écologie (dynamique des populations), de météorologie, d'économie, de physique...

Suites

Objectif et commentaires.

Dans tout le texte, les suites considérées sont toutes à valeurs réelles.

I. Testez votre intuition

Question 1. Dessins

Dessiner les suites $(1/n)$, $(1/2^n)$, $(-1)^n$.

Question 2. Exemples

Donner...

1. ...un exemple de suite à valeurs strictement positives qui tend vers 0 ;
2. ...un exemple de suite à valeurs strictement négatives qui tend vers 0 ;
3. ...un exemple de suite qui tend vers 0 et qui prend une infinité de valeurs négatives ET une infinité de valeurs positives.

Question 3. Quizz

Répondre par VRAI ou FAUX :

a. Si une suite est bornée, alors elle admet une limite.

b. Si (u_n) est une suite strictement positive et convergente, alors $\lim(u_n) > 0$.

c. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Alors cette suite est croissante.

d. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Alors cette suite est croissante à partir d'un certain rang.

e. Soit (u_n) une suite à valeurs strictement positives et qui tend vers 0. Alors cette suite est décroissante à partir d'un certain rang.

f. Toute suite positive non bornée tend vers $+\infty$.

g. Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

h. Toute suite positive croissante non bornée tend vers $+\infty$.

i. Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

II. À propos des définitions "en εpsilon"

> Pendant longtemps (jusqu'au XIXème siècle), les mathématiciens ont manipulé des suites et des fonctions en se contentant de la définition intuitive de la limite, sans rencontrer de problème particulier. Puis, ils sont tombés sur des propriétés plus subtiles, où l'intuition les a conduits à des contradictions. Ils ont alors commencé à critiquer le manque de rigueur en Analyse (en comparant par exemple à d'autres domaines des mathématiques comme l'arithmétique), et ils ont ressenti le besoin de se donner des **définitions précises**.
> Ceci n'a pas été sans mal. En 1821, Cauchy propose la définition suivante : "*Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres*" ; en 1835, De Morgan écrit : "*Laissez-moi rendre x aussi petit que je veux, et je pourrai rendre $7+x$ aussi proche de 7 que* vous *voulez*" ; enfin, Weierstrass écrit la définition moderne de la limite, avec les ϵs et les δs, entre 1840 et 1860. Une des difficultés était que les notions de variables et de fonctions n'étaient pas non plus clairement définies.
> Ces définitions ont représenté **un progrès énorme**, puisqu'elles permettent de savoir exactement de quoi on parle, et de distinguer avec certitude les propriétés vraies des propriétés fausses.
> Mais il ne faut pas cacher que ces définitions ont aussi **un gros désavantage** : elles sont difficiles à comprendre, et surtout très difficiles à manipuler. Atteindre la certitude a un prix : il faut pour cela accepter de passer un certain temps à se familiariser, progressivement, avec ces notions.
> En particulier, les premiers exercices peuvent être un peu frustrants, puisqu'on a l'impression de se fatiguer beaucoup pour démontrer des évidences. Il ne faut pas oublier que ce ne sont que "des gammes", et qu'il faut commencer par faire des gammes avant de pouvoir jouer de la vraie musique...

Dans tous les exercices qui suivent, la règle du jeu est d'obtenir une rédaction la plus convainquante possible, en utilisant chaque fois qu'il le faut la définition "en ϵ" de la limite.

III. Exercices simples avec le formalisme en "ϵ"

Question 1. Préliminaires

Donner la définition...

a. d'une suite ;

b. de sa limite éventuelle[3] ;

c. d'une suite bornée ; d'une suite non bornée ;

d. d'une suite croissante ;

e. d'une suite croissante à partir d'un certain rang.

Question 2. Applications directes de la définition

Montrer les propriétés suivantes :

a. La suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$.

b. Soit (u_n) une suite qui tend vers 1 ; alors cette suite est strictement positive à partir d'un certain rang (traduire d'abord cette phrase avec des quantificateurs).

c. Si une suite admet une limite finie, alors elle est bornée.

d. Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. Alors la suite (u_{n+100}) tend aussi vers 0. Même chose pour la suite (u_{2n}). **Aide** pour comprendre ce qu'est la suite (u_{n+100}) : prenez $u_n = 1/n$, écrivez les premiers termes des suites (u_{n+100}), (u_{2n}), (u_{n^2}).

IV. Exercices plus difficiles

Question 1. Suites de rang pair et impair

Soit (u_n) une suite telle que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers 0. Montrer que la suite (u_n) tend aussi vers 0.

Question 2. Critère séquentiel de la continuité

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue en 0 si et seulement si elle vérifie le *critère séquentiel de la continuité : pour toute suite (u_n) convergeant vers 0, la suite $f(u_n)$ converge vers $f(0)$.*

Question 3.

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet une limite finie l en $+\infty$. Quel est le comportement (en $+\infty$) de la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \int_n^{n+5} f(t)dt \qquad ?$$

Indication : essayer de deviner la valeur de cette intégrale quand n est très grand (à l'aide d'un dessin), puis rédiger une preuve.

3. Si le cours n'a pas encore eu lieu, inspirez-vous de la définition de la limite pour une fonction.

Question 4. Suites d'entiers

Donner la définition d'une suite stationnaire. Montrer qu'une suite d'entiers qui tend vers une limite finie est stationnaire.

Question 5. Extraction

On appelle *suite extraite de la suite* (u_n) (ou *sous-suite de* (u_n)) "n'importe quelle suite obtenue à partir de (u_n) en oubliant certains termes".

a. Transformez cette définition vague en une vraie définition.

b. Choisissez une suite (u_n) bornée non convergente (voir le quizz, question I.3.a). Trouvez une suite extraite de (u_n) qui est convergente. Trouvez une autre suite extraite de (u_n) qui converge vers une autre limite.

c. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui est croissante. (**Indication :** commencez par relire le quizz, question I.3.d ; faites un dessin d'un contre-exemple à cette affirmation du quizz ; sur le dessin, comment extraire une suite croissante ? Puis construire la suite extraite, par récurrence, dans le cas général.)

Question 6. Vers l'idée de "valeurs d'adhérence"...

a. Existe-t-il une suite qui prend une infinité de fois les valeurs 1 et 2 ?

b. Existe-t-il une suite qui prend une infinité de fois les valeurs 1 et 2 et 3 ?

c. Existe-t-il une suite qui prend une infinité de fois la valeur 1, ET une infinité de fois la valeur 2, ... ET ainsi de suite pour CHAQUE entier positif k ?

d. Existe-t-il une suite (u_n) à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ telle que : pour tout réel x entre 0 et 1, la suite (u_n) s'approche arbitrairement près de x, et à un rang arbitrairement grand ? (Commencer par traduire cette propriété avec des "ϵ").

Question 7.

A-t-on $0,999... = 1$?

Algèbre linéaire (2) : liberté et hyperplans

Exercice 6 : Hyperplans –

OBJECTIF ET COMMENTAIRES. *Ce sujet propose une jolie question de mathématiques. La preuve est assez difficile à trouver, bien que la réponse semble intuitivement évidente (quoiqu'en dimension 47?...) Après avoir laisser les étudiants explorer la question, on leur "vend" donc un schéma de preuve ; la difficulté consiste alors à comprendre ce schéma (qui implique une récurrence subtile), et à en rédiger tous les détails de la façon la plus convainquante possible.*

Remarque sur la deuxième partie : on peut aussi montrer la version affine de cette propriété : il existe dans $\mathbb{R}^n$ une famille infinie de vecteurs telle que dès qu'on en prend $n+1$, ils sont affinement indépendants (prendre les vecteurs $(x, x^2, \ldots, x^n)$). Une conséquence intéressante, et immédiate, est un théorème de plongement "du type Whitney" : tout graphe se plonge dans $\mathbb{R}^3$ (sans point double, contrairement à $\mathbb{R}^2$) ; et plus généralement, tout complexe simplicial de dimension k se plonge dans $\mathbb{R}^{2k+1}$ (et on comprend bien la raison du "$2k+1$"). Le plongement des graphes est probablement à la portée des étudianst de DEUG, et donnerait une motivation intéressante à l'exercice ; malheureusement, il deviendrait beaucoup plus long.

I. Hyperplans de $\mathbb{R}^n$

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :

QUESTION $\mathbb{R}^n$ *est-il réunion d'un nombre fini d'hyperplans?*

On rappelle qu'un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Question 1. Exploration

a. Cas $n = 2$ Traduisez le problème en dimension 2. Avez-vous une idée intuitive de la réponse? Pouvez-vous prouver que votre intuition est juste?

b. Cas $n = 3$ Mêmes questions pour $n = 3$.

c. Cas général Avez-vous une idée de la réponse dans le cas général? Comment pourrait-on écrire une preuve?

Question 2. Petites questions

Commencez par répondre aux questions suivantes :

a. Si H_1 et H_2 sont deux hyperplans de $\mathbb{R}^n$, quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$?

b. Même question pour un hyperplan H_1 et un plan P (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension 2).

Question 3. Aide à la preuve en dimension $n \geq 3$

On propose le schéma de preuve suivant :

"On raisonne par récurrence sur la dimension. On considère des hyperplans $H_1, \ldots, H_k$ dans $\mathbb{R}^n$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve un vecteur e_1 qui est dans H_1 et qui n'est dans aucun des autres hyperplans. De même, on trouve un vecteur e_2 qui est dans H_2 et qui n'est dans aucun des autres hyperplans. On se place ensuite dans le plan P engendré par e_1 et e_2. En étudiant dans P les sous-espaces $H_i \cap P$, on arrive à la conclusion."

Il manque bien sûr beaucoup de détails. Rédigez soigneusement une preuve en suivant ce schéma.

II. Famille de vecteurs en position générale

Le but de cette partie est de trouver, dans $\mathbb{R}^n$, une famille $\mathcal{F}$ contenant une infinité de vecteurs et ayant la propriété suivante : dès qu'on choisit n vecteurs dans la famille $\mathcal{F}$, ils sont linéairement indépendants.

Question 1. Cas $n = 2$

Traduire la question dans $\mathbb{R}^2$; trouver une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui répond à la question. Pouvez-vous en trouvez d'autres ?

Question 2. Cas $n = 3$

Traduire la question dans $\mathbb{R}^3$. Essayer d'y répondre.

Question 3. Suggestion

On propose d'étudier la famille $\mathcal{F}$ contenant tous les vecteurs du type

$$v(x) = (1, x, x^2, \ldots x^{n-1}).$$

Montrer que cette famille répond au problème.

Indication Si n vecteurs sont liés, il existe un hyperplan qui les contient (pourquoi ?) ; quelle est l'équation cartésienne d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$?

Question 4. Retour sur la partie I

A l'aide de la famille $\mathcal{F}$, trouver une nouvelle preuve (sans récurrence) pour la partie I.

Indication Combien de vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ un hyperplan peut-il contenir au maximum ?

Exercice 7 : Espace de fonctions –

Objectif et commentaires.

Montrer que l'ensemble des fonctions $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ peut se doter d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dénote cet espace par $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a. Quel est le $\mathbf{0}$ de cet espace vectoriel ? Quel est le sous-espace vectoriel engendré par la fonction constante 1 ?

b. On considère les fonctions $f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^{2x}$. Montrer que f_1, f_2 sont linéairement independantes.

c. Généraliser : montrer que les fonctions $\{x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}, ..., x \mapsto e^{nx}\}$ sont linéairement independantes.

d. Même question pour les fonctions $\{x \mapsto \sin x, x \mapsto \sin 2x, ..., x \mapsto \sin nx\}$.

Indication Vous pouvez essayer d'utiliser la derivée.

e. Soit $f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

Montrer que la suite $\{f, f^2, ..., f^n\}$ est libre dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Matrices et applications linéaires

Exercice 8 : Faire des manteaux avec des matrices –

Objectif et commentaires. *Les tableaux de nombres qui ont donné naissance aux matrices apparaissent naturellement dans ce contexte de produits formés à partir des mêmes ingrédients. Le but de l'exercice est de mettre les matrices dans ce contexte où la composition des matrices est complètement naturelle (on a deux tableaux, et on cherche un autre tableau). L'exercice lui-même est élémentaire.*

Une entreprise fabrique des manteaux[4]. Ces manteaux sont composés de tissu rouge, de tissu bleu, et d'une doublure noire. Le tableau 1 résume la quantité de chaque tissu nécessaire à la confection du manteau en tailles S, M, L et XL.

Taille	S	M	L	XL
Tissu rouge	0,4m^2	0,5m^2	0,6m^2	0,7m^2
Tissu bleu	1m^2	1,1m^2	1,2m^2	1,3m^2
Doublure	1,5m^2	1,7m^2	1,9m^2	2,1m^2

Chaque tissu est tissé à l'aide plusieurs types de fil : coton, polyester, et polyamide. Le tableau 2 résume les longueurs de fil de chaque type nécessaire par mètre carré de tissu.

Tissu	rouge	bleu	doublure
Coton	500m	400m	1000m
Polyamide	1000m	900m	700m
Polyester	500m	600m	0

Enfin, le tableau 3 donne les prix de chaque mètre de fil (en centimes).

Fil	Coton	Polyamide	Polyester
prix	5c	10c	7c

Question 1. Gestion de stocks...

a. Pour savoir quelle quantité de fil commander, l'entreprise a besoin d'un tableau donnant la quantité de chaque fil nécessaire à la confection de chaque manteau. Calculez quelques cases de ce tableau (en notant les opérations effectuées).

b. On peut aussi avoir besoin du tableau donnant le prix que l'entreprise paie, en matières premières, pour chaque manteau. Calculez une case de ce tableau.

4. Si un jour vous deviez réaliser un manteau, il serait raisonnable de ne pas vous baser aveuglément sur les données de l'exercice !

Question 2. ... matrices...

a. Exprimez le tableau de la question 1.a dans le langage des matrices (en fonction des tableaux fournis par l'énoncé).

b. Même question pour le tableau de la question 1.b (vérifiez la cohérence des tailles des tableaux).

c. L'entreprise veut produire a manteaux taille S, b manteaux taille M, c manteaux taille L et d manteaux taille XL. Toujours dans le langage des matrices, exprimez le coûtde la commande de fils à l'aide des tableaux fournis.

Question 3. ... et applications linéaires

Dans les questions précédentes, on a constaté que le produit matriciel a un sens dans cette situation. Il doit donc y avoir du "linéaire" quelquepart...

a. Donner des exemples de quantités évoquées par l'énoncé qui dépendent **linéairement** d'autres quantités de l'énoncé.

b. Interpréter chacun des tableaux de l'exercice comme la matrice d'une application linéaire. En termes d'applications linéaires, à quoi correspond le produit matriciel effectué à la question 2.a?

Question 4.

Pouvez-vous imaginer d'autres situations ou on trouve des dépendances linéaires? Y a-t-il aussi des dépendances qui ne sont pas linéaires?

Exercice 9 : Rotations du plan –

Objectif et commentaires.

Le but de cet exercice est d'étudier les rotations du plan, en confrontant le point de vue géométrique au point de vue matriciel.

Pour tout θ réel, on note R_θ la rotation du plan $\mathbb{R}^2$ de centre $O = (0,0)$ et d'angle θ.

Question 1. Linéarité

a. On prend la rotation d'angle $\theta = \pi/4$. Faites un dessin pour tester, sur quelques vecteurs, la linéarité de cette application.

b. Testez la linéarité de la rotation de même angle, et de centre $(1,0)$. Conclusion?

On admet (provisoirement) que les rotations de centre O sont linéaires.

Question 2. Matrices et géométrie

a. Déterminer (géométriquement) la matrice M_θ de R_θ dans la base canonique.

b. On raisonne géométriquement : décrire l'application composée $R_\theta \circ R'_\theta$. En déduire, sans calcul, la matrice de cette application.

c. On raisonne matriciellement : retrouvez par le calcul la matrice précédente.

d. À partir de ce qui précède, expliquer une façon simple de retrouver certaines formules trigonométriques, si on les a oubliées.

Question 3. (optionnelle) Rotations réciproques

Quelle est l'application réciproque de la rotation R_θ, et que vaut sa matrice? comme à la question précédente, donner un argument géométrique, puis un argument matriciel.

Question 4. Changement de bases

a. On prend $\theta = \pi/2$. Donner la matrice de $R_{\frac{\pi}{2}}$ dans la base canonique, puis dans la base $((1,0),(1,1))$.

b. (Question plus difficile) Existe-t-il une base dans laquelle $R_{\frac{\pi}{2}}$ a une matrice diagonale? [*Idée : raisonnez par l'absurde ; comment interpréter géométriquement le fait d'avoir une matrice diagonale dans une certaine base ?...*]

Question 5. Racines carrées

On voudrait savoir combien y a-t-il de *racines carrées* de la matrice Identité, c'est-à-dire de matrices M, de taille 2×2, telles que $M \times M = Id$.

a. On propose d'abord d'envisager la question d'un point de vue purement matriciel. Donnez-vous 5 minutes, et cherchez le plus possible de telles matrices.

b. Donnez la traduction géométrique du problème (*i.e.* donnez un problème logiquement équivalent mais concernant les applications linéaires). Trouvez maintenant d'autres racines carrées de l'identité ! [Indication : quelles applications linéaires du plan connaissez-vous en plus des rotations ?...]

c. Trouvez, de la même manière, des racines carrées de la matrice $-Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Question 6. Retour sur la linéarité

Montrer que les rotations R_θ sont linéaires. [*Idée : il suffit d'écrire la formule donnant les coordonnées de $R_\theta(x, y)$, où (x, y) est un point quelconque du plan. C'est plus facile avec les nombres complexes...*]

Examen

AVIS:
- On ne vous demande absolument pas de tout faire.
- Le symbole (*) signale des questions plus difficiles.
- Parmi les **quatre** exercices proposés, il faudrait essayer de traiter **au moins un** exercice de la manière la plus complète possible, et **au maximum trois** ; traiter **deux** exercices nous semble raisonnable.
- Chaque exercice traité doit être traité en commun par tout le groupe.
- Prendre son temps pour tester soigneusement les résultats obtenus et pour vérifier les calculs.
- vous pouvez mentionner les pistes de recherche que vous explorez, *même si elles n'aboutissent pas à une solution.*
- Rendre une seule copie par groupe.

Exercice 10 : Racines de certains polynômes –

Objectif et commentaires.

Soient $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ des nombres strictement négatifs.

Question. Montrer que le polynôme

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$$

a une et une seule racine positive.

Indications :

- traiter le cas $n = 1$, le cas $n = 2$;
- calculer $P(0)$ et la limite de P en $+\infty$; qu'en déduit-on?
- (*) pour montrer qu'il y a au plus une racine, raisonner par récurrence, en utilisant le polynôme dérivé $P'(X)$...

Exercice 11 : Comment calculer $\sqrt{2}$ quand on a oublié sa calculatrice? –

Objectif et commentaires.

La méthode de Newton (ou méthode des tangentes) est une manière d'obtenir des approximations numériques d'un "zéro" d'une fonction (c'est-à-dire d'un nombre où la fonction s'annule). [5]

5. Étant donné le titre de l'exercice, les calculs seront faits sans utiliser de calculatrice...

Question 1. Formule

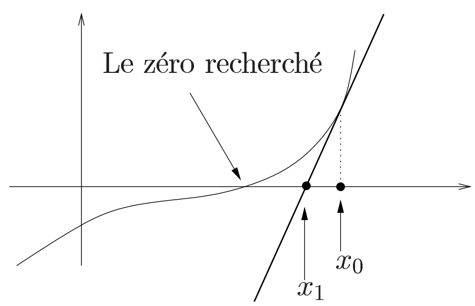
À partir de l'encadré décrivant graphiquement la méthode de Newton, trouver la formule donnant x_1 en fonction de x_0.

Quelles hypothèses doit-on faire sur f et x_0 pour que la formule ait un sens?

La méthode de Newton

Toutes les méthodes de recherche numérique de zéro de fonctions suivent le même principe général : à partir d'une première "bonne" approximation du zéro recherché, trouver une approximation qui soit encore meilleure, puis recommencer...
Voici comment procède la méthode de Newton. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On part d'un nombre "quelconque" x_0 ;
2. à partir de x_0, on calcule un nouveau nombre x_1 de la manière suivante (voir figure) : on trace la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0, et on détermine le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses. On appelle x_1 l'abscisse de ce point d'intersection ;
3. et on recommence : on calcule un nouveau nombre x_2 en appliquant le procédé décrit au point 2 où l'on remplace x_0 par x_1 ;
4. *et caetera...*



Question 2. Calcul explicite

On veut utiliser la méthode de Newton pour calculer, à la main, une approximation décimale du nombre $\sqrt{2}$. Pour ça, on prend la fonction $f(x) = x^2 - 2$, et on part de $x_0 = 1$.

a. Tracer la fonction f, représenter graphiquement les nombres x_0, x_1, x_2 et x_3. Calculer, à la main, les nombres x_1, x_2 et x_3 sous forme de fraction.

b. Sachant que le début du développement décimal de $\sqrt{2}$ est :

$$1.414213562$$

dire, pour x_3, combien on a trouvé de "bonnes" décimales.

c. Autres choix d'approximation initiale On considère toujours la fonction $f(x) = x^2 - 2$. Que se passe-t-il si on part d'une autre valeur que 1 pour x_0 ? Décrire, en fonction du choix de x_0 dans $\mathbb{R}$, le comportement de la méthode de Newton (ne pas oublier les cas particuliers !). Pour le zéro $\sqrt{2}$ de cette fonction f, comment préciserait-on la notion de "bonne" approximation dont parle l'encadré ?

Question 3. Preuve

(*) Dans le cas précédent ($f = x^2 - 2$ et $x_0 = 1$), prouver que la suite (x_n) définie par la méthode de Newton converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 12 : Petit modèle de dynamique des populations – Deux villes X et Y totalisent, à elles deux, une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre plus de possibilités d'emplois; 30% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 20% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour trouver un meilleur emploi. On cherche à comprendre l'évolution de la population des deux villes dans le futur.

On notera x_n la population de la ville X à l'année n, et y_n la population de la ville Y.

a. Décrire les équations d'évolution des populations des deux villes d'une année à l'autre (autrement dit, exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n).

Intuitivement, avez-vous une idée du comportement des suites (x_n) et (y_n), c'est-à-dire de l'évolution de la population des deux villes?

b. On pose

$$V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice A telle que la relation trouvée à la question précédente s'écrive $V_{n+1} = A.V_n$ (on dit qu'on a mis les équations d'évolution sous forme matricielle). En déduire une expression du vecteur V_n en fonction du vecteur V_0 et de la matrice A.

Cette expression n'est pas satisfaisante : par exemple, elle ne permet pas encore de calculer les limites des suites (x_n) et (y_n). Dans la suite, on cherche une expression plus explicite.

c. Des conditions initiales pour lesquelles les calculs sont faciles. — Supposons que la population initiale, décrite par $V_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, satisfasse $A.V_0 = \lambda V_0$ pour un certain réel λ. On dit alors que V_0 est *vecteur propre* de A (si $V_0 \neq 0$).

Dans ce cas très particulier, calculer V_n pour tout $n \geq 0$.

d. Trouver tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que l'équation $A.V = \lambda V$, d'inconnue V, admette d'autres solutions que le vecteur nul. (Ces λ sont appelés *valeurs propres* de A.)

e. Pour chaque valeur de λ trouvée à la question précédente, donner l'ensemble des vecteurs V solutions de l'équation $A.V = \lambda V$ (on a donc trouvé tous les vecteurs propres de la matrice A). Représenter vos résultats sur un dessin. Ces vecteurs ont-ils une interprétation par rapport au problème de dynamique des populations?

f. Principe de superposition (linéarité): comment résoudre le problème à partir des cas où les calculs sont faciles. — On suppose ici qu'à l'année $n = 0$, chacune des deux villes X et Y a 500 000 habitants. Exprimer le vecteur V_0 comme une somme de deux vecteurs propres.

g. En déduire l'expression du vecteur V_n à l'année n.

h. Réponse à la question initiale Quel est le comportement des populations x_n et y_n des deux villes lorsque n tend vers $+\infty$? Au bout de combien d'années les valeurs limites sont-elles atteintes à 1% près ?

Remarques. En résumé, le cheminement est le suivant : on cherche le plus possible de vecteurs propres pour lesquels l'image par A^n est facile à calculer. On espère en trouver assez pour que toute condition initiale (ou au moins, celle qui nous interesse) puisse s'exprimer comme superposition (combinaison linéaire) de vecteurs propres. Si c'est le cas, on a gagné.

Le fait que *tout* vecteur peut s'exprimer comme combinaison linéaire de vecteurs propres signifie qu'il existe une base formée de vecteurs propres. On dit dans ce cas que A est diagonalisable. Pour connaitre la théorie complète, attendre le cours de l'année prochaine !

Exercice 13 : Applications linéaires et droites du plan –

OBJECTIF ET COMMENTAIRES.

I. Exemples

Question 1. Deux droites

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. On se donne les deux droites vectorielles $D_1 = Vect((1,0))$ et $D_2 = Vect((0,1))$. Trouver *toutes* les applications linéaires f du plan dans lui même qui vérifient $f(D_1) = D_1$ et $f(D_2) = D_2$.

Question 2. Trois droites

On se donne maintenant six droites :

$$\begin{array}{ll} D_1 = Vect((1,0)) & F_1 = D_1 \\ D_2 = Vect((0,1)) & F_2 = D_2 \\ D_3 = Vect((1,1)) & F_3 = Vect((2,1)). \end{array}$$

a. Trouver une application linéaire f telle que $f(D_1) = F_1$, $f(D_2) = F_2$ et $f(D_3) = F_3$.

b. Combien y a-t-il de solutions au problème ?

II. Cas général

On voudrait généraliser la question précédente.

(*) Soient D_1, D_2, D_3 trois droites vectorielles quelconques, deux à deux distinctes de $\mathbb{R}^2$. Si F_1, F_2, F_3 sont trois droites vectorielles quelconques deux à deux distinctes de $\mathbb{R}^2$, montrer qu'il existe (au moins) une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$f(D_i) = F_i, \quad i = 1,2,3.$$

Cette application est-elle unique ?

Suggestions :

- Première possibilité :
  - On peut traiter d'abord le cas particulier où D_1, D_2 et D_3 sont les trois droites définies à la question I.2 (F_1, F_2 et F_3 étant quelconques)...
  - ...puis traiter le cas général en utilisant ce cas particulier (comment ?...) ;
- Seconde possibilité : on peut aussi aborder directement le cas général en utilisant *des bases adaptées au problème* : soient d_1, d_2, f_1, f_2 des vecteurs directeurs respectivement des droites D_1, D_2, F_1 et F_2 ; utiliser les bases $\{d_1, d_2\}$ et $\{f_1, f_2\}$...

III. Droites de $\mathbb{R}^3$

On considère maintenant la question dans $\mathbb{R}^3$.

Soient D_1, D_2, D_3 trois droites vectorielles deux à deux distinctes de $\mathbb{R}^3$. On se donne aussi trois droites vectorielles F_1, F_2, F_3 deux à deux distinctes dans $\mathbb{R}^3$.

Montrer par un exemple qu'il n'existe pas toujours d'application linéaire f vérifiant $f(D_1) = F_1$, $f(D_2) = F_2$ et $f(D_3) = F_3$. Essayer de justifier précisément la non-existence pour votre exemple.

Récréation : le tapis de Sierpinski –

Objectif et commentaires.

Cet exercice est plus facile que les autres : il est proposé pour la dernière demi-heure de l'examen, au cas où vous n'auriez plus le courage de réfléchir aux questions plus difficiles...

Monsieur Sierpinski avait ramené d'un voyage en Orient un tapis carré de 1 mètre de côté dont il était très content. Jusqu'au jour où les mites s'introduisirent chez lui.

En 24 heures, elles dévorèrent dans le tapis un carré de côté trois fois plus petit, situé exactement au centre du tapis. En constatant les dégats, Monsieur Sierpinski entra dans une colère noire ! Puis il se consola en se disant qu'il lui restait huit petits carrés de tapis, chacun de la taille du carré disparu. Malheureusement, dans les 12 heures qui suivirent, les mites avaient attaqué les huit petits carrés restants : dans chacun, elles avaient mangé un carré central encore trois fois plus petit. Et dans les 6 heures suivantes elles grignotèrent encore le carré central de chacun des tout petits carrés restants. Et l'histoire se répéta, encore et encore ; à chaque étape, qui se déroulait dans un intervalle de temps deux fois plus petit que l'étape précédente, les mites faisaient des trous de taille trois fois plus petite...

Question 1.

Faire des dessins pour bien comprendre la géométrie du tapis troué. Calculer le nombre total de trous dans le tapis de Monsieur Sierpinski après n étapes. Calculer la surface S_n de tapis qui n'a pas encore été mangée après n étapes. Trouver la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$. Que reste-t-il du tapis à la fin de l'histoire ?

Question 2.

Calculer la durée totale du festin “mitique”...
