

Intégrales de fonctions de plusieurs variables

Vous connaissez les intégrales de fonctions d'une variable (parfois appelée *intégrales simples*). Si f est une fonction d'une variable, l'intégrale de f sur un intervalle $[a, b]$ — que l'on note $\int_a^b f(x)dx$ — mesure l'aire de la région du plan située entre l'axe des abscisses et le graphe de f , au-dessus de l'intervalle $[a, b]$. Pour calculer cette intégrale, il suffit de trouver une *primitive* de f , c'est-à-dire une fonction F dont la dérivée est égale à f ; on a alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

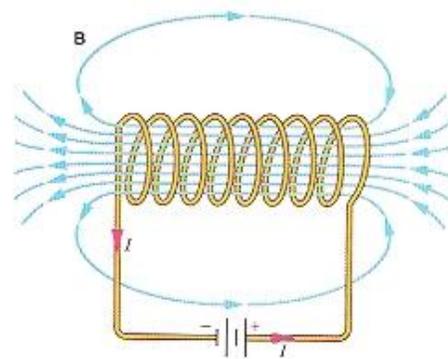
Le but des chapitres qui suivent est de définir une notion d'intégrale pour les fonctions de plusieurs variables. L'une des nouveautés est la richesse des domaines sur lesquelles on peut intégrer. En effet, le domaine d'intégration d'une intégrale simple est toujours un intervalle (ou une union d'intervalles). Par contre, on peut intégrer une fonction de deux variables sur un rectangle, un disque, un domaine entouré par une courbe compliquée (on parle d'*intégrales doubles*). On peut intégrer une fonction de trois variables sur une sphère, un cylindre, un cône, un ellipsoïde, *etc.* (on parle d'*intégrales triples*). Vous verrez que l'on peut aussi intégrer des fonctions de deux variables le long de courbes : on parle d'*intégrales curvilignes*. Vous apprendrez également à relier ces différents types d'intégrales : certaines intégrales curvilignes le long d'une courbe fermée C peuvent s'exprimer comme des intégrales doubles sur la région du plan entourée par C (c'est la formule de Green-Riemann).

Des intégrales de fonctions de plusieurs variables interviennent dans toutes sortes de problèmes. Voici quelques exemples (choisis à peu près au hasard, volontairement très simplifiés, et de ce fait peu réalistes).

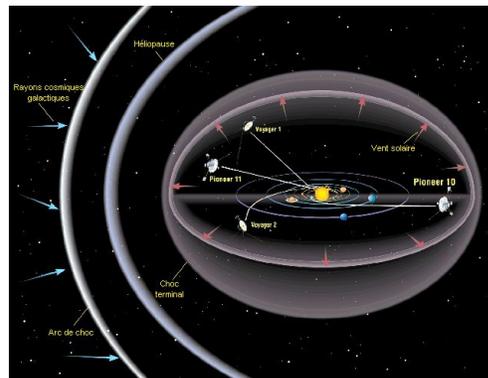
Vous souhaitez calculer le volume d'une cheminée centrale nucléaire. Celle-ci est comme toujours en forme d'hyperboloïde (pour des raisons de solidité et de simplicité de construction). Le volume de la cheminée s'exprime à l'aide d'une intégrale triple facile à calculer.



Vous étudiez le champ magnétique créé par une bobine dans laquelle circule un courant électrique. La valeur du champ en un point s'exprime à l'aide d'une intégrale triple que vous devrez évaluer. Notons que l'on ne sait pas calculer explicitement cette intégrale ; on doit donc l'estimer numériquement à l'aide d'un ordinateur ; on peut aussi calculer une valeur approchée du champ près de l'axe de la bobine à l'aide de développements limités).



Vous étudiez une sonde spatiale, soumise à l'attraction du Soleil et des planètes à proximité desquelles elle passe, et munie de moteurs lui permettant de suivre une trajectoire calculée à l'avance. Vous voulez calculer le travail de la force d'attraction qu'exerce le Soleil et les planètes sur la sonde au cours de son trajet (ce calcul est — entre autre — nécessaire pour évaluer l'énergie que consommeront les moteurs de la sonde au cours du trajet). Ce travail s'exprime à l'aide une intégrale curviligne le long de la trajectoire de la sonde. En général, on ne saura pas calculer cette intégrale explicitement (à moins que la trajectoire de la sonde ne soit très simple), et on devra avoir recours à un calcul numérique.



J'ai évoqué ci-dessus, à deux reprises, la nécessité de recourir à des instruments numériques pour calculer certaines intégrales. De fait, calculer des intégrales n'est pas une tâche aisée. Calculer la dérivée d'une fonction est toujours possible, et relativement facile : il suffit d'appliquer un certain nombre de règles de calcul bien connues ; il s'agit d'une procédure purement algorithmique. Par contre, si on se donne une fonction f d'une variable "au hasard", il ne sera pas possible, en général, de calculer explicitement une primitive de f . Même lorsque cela est possible, il n'existe pas de procédure algorithmique qui fournit la primitive de f : il faut "deviner" quelle est la bonne méthode à appliquer (intégration par partie, changement de variable) pour obtenir la primitive de f . C'est pourquoi calculer des intégrales de fonctions d'une variable, et *a fortiori* des intégrales de fonctions de plusieurs variables ne peut s'apprendre que par la pratique.

Chapitre 8

Rappels sur les intégrales de fonctions d'une variable

8.1 Primitives et intégrales

Définition (Primitive d'une fonction). *Une primitive d'une fonction d'une variable f est une fonction F dont la dérivée est égale à f .*

Proposition 8.1.1 (Existence et quasi-unicité d'une primitive). *Toute fonction continue d'une variable f admet des primitives. De plus, (sur tout intervalle contenu dans l'ensemble de définition de f) la différence entre deux primitives de f est une constante.*

L'existence de primitive n'est pas facile à démontrer. Par contre, il est très facile de voir que la différence entre deux primitives d'une même fonction est une constante : en effet, si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une fonction f , alors la dérivée de $F_2 - F_1$ est nulle (puisque F_2 et F_1 ont la même dérivée f) ; par conséquent, $F_2 - F_1$ est une constante (sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition).

Considérons maintenant une fonction continue d'une variable f , et un intervalle $I = [a, b]$ contenu dans l'ensemble de définition de f . Puisque f est continue, elle admet une primitive F . De plus, la différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F . En effet, si G est une autre primitive de f , alors il existe une constante c tel que $G - F = c$; par conséquent, $G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$. Ceci nous permet de définir l'intégrale de f sur l'intervalle $I = [a, b]$:

Définition (Intégrale d'une fonction d'une variable). *Soit f une fonction . On appelle intégrale de f sur l'intervalle I la quantité :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

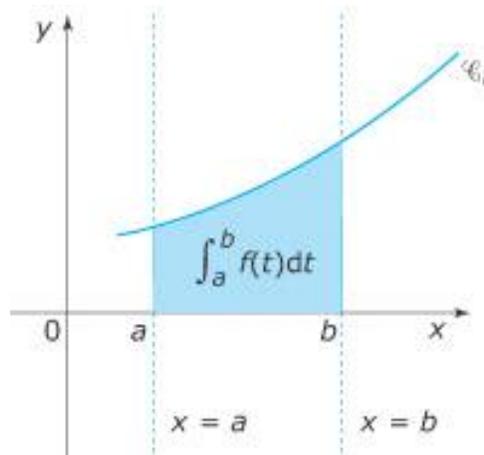
Remarque. La notation dx réfère à une “variation infinitésimale” de la variable x . La notation $\int_a^b f(x)dx$ indique que l'on intègre la quantité $f(x)$ lorsque la variable x varie entre les

bornes a et b . Dans cette notation, x est une variable muette ; on peut remplacer x par une autre variable sans que cela ne change le résultat :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

8.2 Intégrale et aire sous le graphe

Les intégrales ont été inventées pour calculer des aires. Considérons par exemple une fonction continue d'une variable, et un intervalle $I = [a, b]$ inclus dans le domaine de définition de f . Pour simplifier on suppose f positive. L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ a été définie pour calculer l'aire de la région S du plan délimitée par la droite verticale $x = a$, la droite verticale $x = b$, l'axe des abscisses, et le graphe de f (figure ci-dessous). Pour que cela ait un sens, il faut au préalable définir ce qu'on entend par "l'aire d'une région".



8.2.1 Comment définir l'aire d'une région du plan ?

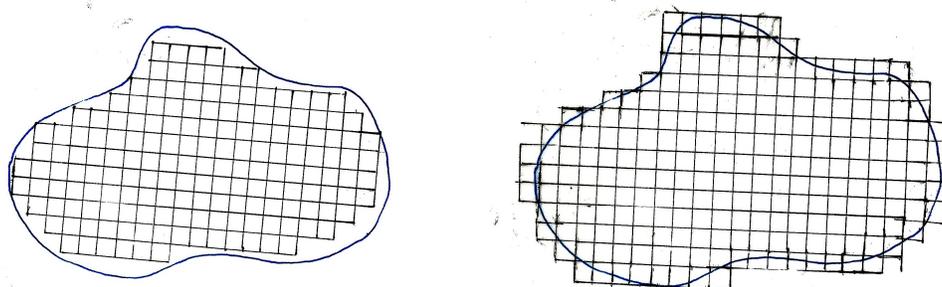
Commençons par formuler un certain nombre d'exigences :

1. Tout d'abord, si D_1 et D_2 sont deux régions telles que D_1 est contenue dans D_2 , on veut que l'aire de D_1 inférieure à l'aire de D_2 .
2. Ensuite, si D_1 et D_2 sont deux régions disjointes, on veut que l'aire de $D_1 \cup D_2$ soit égale à la somme de l'aire de D_1 et de l'aire de D_2 .
3. Enfin, on veut que l'aire d'un carré de côté a soit égal à a^2 .

Ces trois exigences nous suffisent à définir l'aire de n'importe quelle région "par trop biscornue" du plan. Considérons une région D bornée du plan. Si on peut faire tenir n^- carrés de côtés ϵ deux-à-deux disjoints à l'intérieur de la région D , alors les conditions 1, 2 et 3 impliquent immédiatement que l'aire de D (si tant est que l'on puisse la définir) doit être supérieure à $n^- \cdot \epsilon^2$ (figure ci-dessous à gauche). De même, si on peut recouvrir la région D par n^+ carrés de côtés ϵ , alors les conditions 1, 2 et 3 impliquent immédiatement que l'aire de D doit être inférieure à $n^+ \cdot \epsilon^2$ (figure ci-dessous à droite). Par ailleurs, si on a l'impression que, si on choisit ϵ très petit, la région D sera très bien approchée par une union de carrés de côté ϵ . Résumons cela dans une définition formelle :

Définition (Aire d'une région du plan). Soit D une région bornée du plan. Pour tout $\epsilon > 0$, on note n_ϵ^- le nombre maximum de carrés de côté ϵ deux-à-deux disjoints que l'on peut faire tenir dans la région D , et on note n_ϵ^+ le nombre minimum de carrés de côté ϵ nécessaires pour recouvrir entièrement la région D . On dit que la région D est quarrable si les quantités $n_\epsilon^- \cdot \epsilon^2$ et $n_\epsilon^+ \cdot \epsilon^2$ ont la même limite quand ϵ tend vers 0. Cette limite commune est alors par définition l'aire de la région D . Autrement dit :

$$\text{Aire}(D) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} n_\epsilon^- \cdot \epsilon^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} n_\epsilon^+ \cdot \epsilon^2.$$



Il existe des régions du plan (“très biscornues”) telles que les quantités $n_\epsilon^- \cdot \epsilon^2$ et $n_\epsilon^+ \cdot \epsilon^2$ n'ont pas de limites quand ϵ tend vers 0, ainsi que des régions telles que les quantités $n_\epsilon^- \cdot \epsilon^2$ et $n_\epsilon^+ \cdot \epsilon^2$ ont des limites différentes quand ϵ tend vers 0. L'aire de telles régions ne sont pas quarrables; leur aire n'est pas bien définie. Néanmoins, toutes les régions dont le bord est défini à l'aide de fonctions continues sont quarrables.

8.2.2 Interprétation des intégrales simples en termes d'aire.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer des résultats qui interprètent l'intégrale d'une fonction d'une variable comme l'aire d'une région du plan. Pour simplifier, commençons par le cas de l'intégrale d'une fonction positive :

Proposition 8.2.1 (Lien entre aire et intégrale I). Soit f une fonction d'une variable, et $[a, b]$ un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de f . On suppose f continue et positive sur $[a, b]$. On note D la région située entre les droites verticales $x = a$ et $x = b$, au-dessus de l'axe des abscisses et en dessous du graphe de f . Alors la région D est quarrable, et on a

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Aire}(D)$$

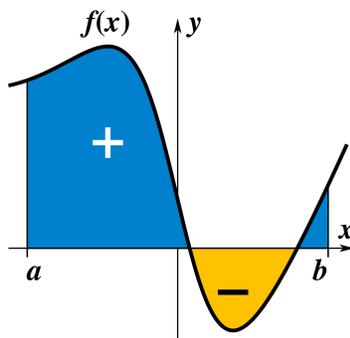
(voir la figure de la page précédente).

La proposition ci-dessus fait le lien entre aire et intégrale d'une fonction continue positive. Pour une fonction continue de signe quelconque, il faut distinguer la partie du graphe de f située au-dessus de l'axe des abscisses et celle située en dessous :

Proposition 8.2.2 (Lien entre aire et intégrale II). Soit f une fonction d'une variable, et $[a, b]$ un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de f . On note D^+ la région située entre les droites verticales $x = a$ et $x = b$, au-dessus de l'axe des abscisses et en dessous

du graphe de f (région bleue sur la figure ci-dessous). On note D^- la région située entre les droites verticales $x = a$ et $x = b$, en-dessous de l'axe des abscisses et au-dessus du graphe de f (région jaune sur la figure ci-dessous). Alors les régions D^- et D^+ sont quarrables, et on a

$$\int_a^b f(x)dx = \text{Aire}(D^+) - \text{Aire}(D^-).$$



Remarque. La manière dont j’ai présenté les intégrales ci-dessus est la plus simple, mais ce n’est pas la plus “logique”. En effet, si on voulait démontrer la proposition 7.1.1 (l’existence d’une primitive pour toute fonction continue), il faut commencer par démontrer une partie de la proposition 7.2.2 (le fait que la région située entre l’axe des abscisse et le graphe d’une fonction continue est quarrable). La présentation que j’ai choisie ci-dessus a un gros avantage : elle permet de donner très rapidement une définition de l’intégrale d’une fonction continue f (comme différence de valeurs d’une primitive de f). Cette définition est effective : elle permet de calculer des intégrales.

8.3 Calcul des intégrales

Pour calculer l’intégrale d’une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ revient — nous l’avons dit — à trouver une primitive de f . Hélas, ce n’est pas toujours possible : il n’existe aucun algorithme qui permettrait de trouver une expression explicite d’une primitive de n’importe quelle fonction (elle-même donnée par une formule explicite). Il existe cependant un certain nombre de méthodes qui, utilisées judicieusement, permettent de calculer des primitives pour certaines fonctions simples. Nous allons rappeler ces méthodes.

Tout d’abord, on connaît des primitives pour la plupart des fonctions “de base” :

Fonction	Primitive
$x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \neq -1$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constante}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x + \text{constante}$
$x \mapsto \exp(x)$	$x \mapsto \exp(x) + \text{constante}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x \ln(x) - x + \text{constante}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + \text{constante}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + \text{constante}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto \ln \cos(x) + \text{constante}$
$x \mapsto \cosh(x)$	$x \mapsto \sinh(x) + \text{constante}$
$x \mapsto \sinh(x)$	$x \mapsto \cosh(x) + \text{constante}$

Le tableau ci-dessus fournit les “briques de bases” pour calculer des primitives. Hélas, il n’est pas facile de combiner ces briques de bases entre elles. Certes, pour la somme et le produit par une constante, tout se passe bien :

Proposition 8.3.1. *Si F et G sont respectivement des primitives de f et g , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$. Si F est une primitive de f , et si λ est une constante, alors λF est une primitive de λf .*

... mais ça se gâte pour le produit, pour le quotient et la composée de deux fonctions :

Même si on connaît des primitives des fonctions f et g , on ne sait en général calculer ni une primitive du produit fg , ni une primitive du quotient $\frac{f}{g}$, ni une primitive de la composée $f \circ g$.

Il y a cependant quelques résultats qui aident à s’en sortir dans certain cas. Tout d’abord, si on connaît une primitive de f , alors, pour toute fonction dérivable u , on connaît une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x).f(u(x))$:

Proposition 8.3.2. *Si F est une primitive de f , et si u est une fonction dérivable, alors $x \mapsto F(u(x))$ est une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x).f(u(x))$*

La preuve de cet énoncé est immédiate : il suffit de dériver $x \mapsto F(u(x))$. Cet énoncé est cependant très souvent utile. Il nous dit par exemple que, pour toute fonction dérivable u , la fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$ est une primitive de la fonction $\frac{u'(x)}{u(x)}$ (là où cela a un sens, c'est-à-dire en dehors du lieu où u s'annule). C'est ainsi que nous avons pu affirmer plus haut que la fonction $x \mapsto \ln|\cos(x)|$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Si on doit calculer la primitive d'un produit de fonctions, on peut parfois utiliser la formule d'intégration par partie pour transformer ce produit en un autre :

Proposition 8.3.3 (Intégration par partie). *Soient f et g deux fonctions d'une variable, que l'on suppose dérivables, et définies (au moins) sur un intervalle $[a, b]$. On a*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Démonstration. La dérivée de fg est $f'g + fg'$. Autrement dit fg est une primitive de $f'g + fg'$. Par définition de l'intégrale, on a donc $\int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$. \square

Exemple. Supposons que l'on veuille calculer $\int_a^b x \sin(x)dx$. L'intégrande est le produit de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ et de la fonction $x \mapsto x$. Appliquer la formule d'intégration par partie, nous conduira à remplacer l'une de ces fonctions par sa dérivée, et l'autre par sa primitive. Cela sera-t-il avantageux ? On remarque que la dérivée de la fonction $x \mapsto x$ est une constante (ce qui simplifie considérablement la situation, et que la primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est $x \mapsto -\cos(x)$ (qui n'est ni plus ni moins compliquée que $x \mapsto \sin(x)$). L'intégration par partie semble donc avantageuse. On pose $f'(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$, et on obtient

$$\int_a^b x \sin(x)dx = -b \cos(b) + a \cos(a) - \int_a^b -\cos(x)dx = -b \cos(b) + a \cos(a) - \sin(b) + \sin(a).$$

L'intégrale est calculée.

Enfin, un outil très puissant — mais difficile à manipuler — pour calculer des intégrales est le théorème de changement de variable :

Théorème 8.3.4 (Théorème de changement de variable). *Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} , soit u une fonction définie (au moins) sur $[a, b]$ et dérivable, et soit f une fonction continue définie (au moins) sur l'image de l'intervalle $[a, b]$ par u . Alors on a*

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f . Alors $x \mapsto F(u(x))$ est une primitive de la fonction $x \mapsto f(u(x))u'(x)$ (proposition 7.3.2). Par définition de l'intégrale, on a donc

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = F(u(b)) - F(u(a)).$$

Par ailleurs, puisque F est une primitive de f , on a, à nouveau par définition de l'intégrale,

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = F(u(b)) - F(u(a)).$$

En mettant ensemble ces deux égalités, on obtient la formule de changement de variables. \square

En pratique (changement de variable). Il existe deux façon d'appliquer les théorème de changement de variable :

- "En simplifiant l'intégrande". On a une intégrale $\int_a^b g(x)dx$ à calculer. On remarque que $g(x)$ est presque de la forme $f(u(x))$ (ou mieux $f(u(x))u'(x)$). On change alors de variable en posant $t = u(x)$ (sans oublier que l'on a alors $dt = u'(x)du$). On obtient alors l'intégrale d'une fonction plus simple... ce qui permet parfois de terminer le calcul.
- "En compliquant l'intégrande". On a une intégrale $\int_c^d f(t)dt$ à calculer. Hélas on ne connaît pas de primitive de f . On peut alors essayer de poser $t = u(x)$, et de réécrire notre intégrale sous la forme $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx$. La nouvelle fonction à intégrer est :empha priori plus compliquée; il arrive néanmoins que l'on connaisse une primitive de cette fonction plus compliquée. Bien sûr, toute la difficulté consiste à choisir astucieusement la fonction u pour obtenir une fonction $f(u(x))u'(x)$ dont on sait calculer une primitive...

Exemple (Un changement de variable où on "simplifie l'intégrande"). Supposons que l'on veuille calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$. On remarque $e^{2x} = (e^x)^2$. L'intégrande est donc de la forme $f(u(x))$ avec $u(x) = e^x$, et même de la forme $g(u(x)).u'(x)$. On fait donc le changement de variable $t = e^x$ (d'où $dt = e^x dx$), et on obtient

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}e^x dx \stackrel{t=e^x}{=} \int_1^e \frac{t}{t+1}dt = \int_1^e 1 - \frac{1}{t+1}dt = [t - \ln(t+1)]_1^e.$$

L'intégrale est calculée.

Exemple (Un changement de variable où on "complique l'intégrande"). Supposons que l'on veuille calculer l'intégrale $\int_0^\pi \sqrt{1-t^2}dt$. On ne connaît pas de primitive de la fonction $\sqrt{1-t^2}$. Mais, si on a un peu l'habitude, on repère tout de suite qu'en posant $t = \sin(x)$, on pourra profiter de la formule de trigonométrie $\sqrt{1-\sin^2(x)} = \cos(x)$ pour se débarrasser de la racine carrée. On fait donc le changement de variable $t = \sin(x)$ (d'où $dt = \cos(x)dx$), et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt &\stackrel{t=\sin(x)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(x)} \cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

L'intégrale est calculée.

Chapitre 9

Intégrales multiples

9.1 Théorème de Fubini - Intégrales doubles

Considérons une fonction de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue, et une région D du plan \mathbb{R}^2 , bornée et contenue dans l'ensemble de définition de f .

Nous voulons définir l'intégrale de la fonction f sur D . Pour ce faire, nous allons utiliser ce que nous connaissons déjà : les intégrales simples, *i.e.* les intégrales de fonctions d'une variable. Autrement dit, on va d'abord intégrer f par rapport à la variable x , en considérant la variable y comme un paramètre. Le résultat de cette première intégration dépendra de la valeur du "paramètre" y . On intégrera alors ce résultat par rapport à y . Bien entendu, on pourra faire la même chose en échangeant les rôles de x et de y ; nous verrons que cela donne le même résultat.

Une des difficulté est de tenir compte de la géométrie de D : ce peut être un polygone quelconque, ou un disque, ou la région délimitée par une courbe fermée très compliquée... Fixer la valeur de la variable y et intégrer par rapport à x revient à découper D en tranches horizontales; fixer la valeur de la variable x et intégrer par rapport à y revient à découper D en tranches verticales

Découpage d'une région bornée en tranches horizontales et verticales.

La région D est bornée; il existe donc des nombres a, b, c, d tels que D est contenu dans le rectangle $[a, b] \times [c, d]$. Pour intégrer f , on veut fixer la valeur de x , et faire varier y de manière à ce que le point (x, y) reste dans la région D . On est donc amené à considérer, pour chaque valeur $x_0 \in [a, b]$, l'ensemble

$$V_{x_0} := \{y \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x_0, y) \in D\}.$$

L'ensemble V_{x_0} est (la projection sur \mathbb{R} de) l'intersection de D avec la droite verticale $x = x_0$. Autrement dit, moins formellement, V_{x_0} est la tranche verticale de D d'abscisse x_0 . On a alors

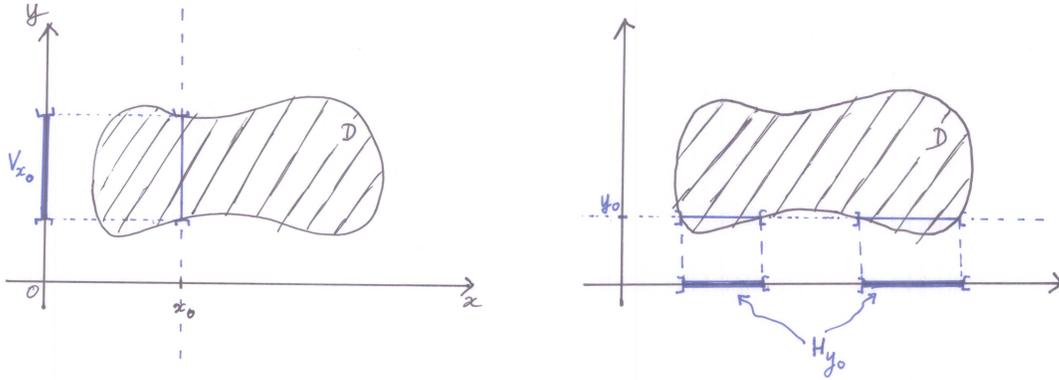
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in [a, b] \text{ et } y \in V_x\}.$$

Bien entendu, on peut aussi fixer la valeur de y et faire varier x de manière à ce que le point (x, y) reste dans la région D . On est donc amené à considérer, pour chaque valeur $y_0 \in [c, d]$, l'ensemble

$$H_{y_0} := \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x, y_0) \in D\}.$$

L'ensemble H_{y_0} est (la projection sur \mathbb{R} de) l'intersection de D avec la droite horizontale $y = y_0$. Autrement dit, moins formellement, H_{y_0} est la tranche horizontale de D d'ordonnée y_0 . On a alors

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y \in [c, d] \text{ et } x \in H_y\}.$$



Exemple. Considérons le disque Δ centré en $(0, 0)$ de rayon 1. Autrement dit,

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Clairement le disque Δ est inclus dans le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Pour $x \in [-1, 1]$, si on note $V_x := \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) \in \Delta\}$, alors

$$\begin{aligned} V_x &= \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\} \\ &= \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\right]. \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in [-1, 1] \text{ et } y \in \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\right]\right\}.$$

De même, pour $y \in [-1, 1]$, si on note $H_y := \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) \in \Delta\}$, alors

$$\begin{aligned} H_y &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\right\} \\ &= \left[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}\right]. \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y \in [-1, 1] \text{ et } x \in \left[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}\right]\right\}.$$

Exemple. Considérons maintenant le triangle T est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$. On peut voir T comme l'intersection de trois demi-plans : pour chacun des trois côtés de T , on considère le demi-plan contenant T délimité par la droite qui porte le côté considéré.

On vérifie facilement que des équations de ces demi-plans sont respectivement $x \leq 1$, $y \geq 0$ et $y \leq x$. Autrement dit, on a

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \leq 1, y \geq 0 \text{ et } y \leq x\}.$$

Clairement, le triangle T est inclus dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Pour $x \in [0, 1]$, si on note $V_x := \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) \in \Delta\}$, alors

$$V_x = \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } y \geq 0 \text{ et } y \leq x\} = \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } 0 \leq y \leq x\} = [0, x].$$

On peut donc écrire

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in [0, 1] \text{ et } y \in [0, x]\}.$$

De même, pour $y \in [0, 1]$, si on note $H_y := \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) \in \Delta\}$, alors

$$H_y = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq 1 \text{ et } y \leq x\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } y \leq x \leq 1\} = [y, 1].$$

On peut donc écrire

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y \in [0, 1] \text{ et } x \in [y, 1]\}.$$

Le théorème de Fubini et l'intégrale d'une fonction sur une région du plan

Le mathématicien italien G. Fubini a démontré le résultat important suivant au début du XXème siècle :

Théorème 9.1.1 (Théorème de Fubini). *Considérons une fonction continue de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et une région D du plan, contenue dans le domaine de définition de f , et bordée par une courbe fermée continue. Considérons un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ contenant D . Pour chaque $x \in [a, b]$, notons $V_x = \{y \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x, y) \in D\}$. Pour chaque $y \in [c, d]$, notons $H_y = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x, y) \in D\}$. On a alors l'égalité*

$$(9.1.1) \quad \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y \in V_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x \in H_y} f(x, y) dx \right) dy.$$



Guido Fubini (1879-1943)

Le théorème de Fubini affirme qu'il revient au même de faire l'une ou l'autre des deux choses suivantes :

1. Fixer une valeur de la coordonnée x , intégrer $f(x, y)$ par rapport à la variable y , puis intégrer le résultat trouvé (qui dépend de la valeur que l'on a fixée pour x) par rapport à la variable x .
2. Fixer une valeur de la coordonnée y , intégrer $f(x, y)$ par rapport à la variable x , puis intégrer le résultat trouvé (qui dépend de la valeur que l'on a fixée pour y) par rapport à la variable y .

Nous nous appuyons sur ce théorème pour définir l'intégrale d'une fonction de deux variables sur un domaine du plan :

Définition (Intégrale d'une fonction de deux variables sur un domaine du plan). *Avec les notations du théorème 8.1.1, on appellera intégrale de f sur le domaine D la quantité*

$$\iint_D f(x, y) dx dy := \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y \in V_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x \in H_y} f(x, y) dx \right) dy.$$

Quand on veut calculer l'intégrale d'une fonction f sur un domaine D , on a donc deux possibilités¹ : soit on intègre d'abord par rapport à x (à y fixé), puis par rapport à y , soit on intègre par d'abord par rapport à y (à x fixé), puis par rapport à x . D'après le théorème de Fubini, ces deux manières de procéder donnent le même résultat. En pratique, elle ne sont pourtant pas toujours équivalentes : parfois, l'une des deux méthodes donnent des calculs beaucoup plus simples que l'autre.

Exemple. Soit Δ le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, et Δ^+ la moitié de Δ situé au-dessus de l'axe des abscisses. On cherche à calculer l'intégrale de la fonction $f(x, y) = y$ sur Δ^+ . Essayons tout d'abord de la calculer en intégrant d'abord en y puis en x . En utilisant la description de Δ vue précédemment, on vérifie facilement que

$$\Delta^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in [-1, 1] \text{ et } y \in \left[0, \sqrt{1-x^2} \right] \right\}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{x=-1}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} y dy \right) dx \\ &= \int_{x=-1}^{x=1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{x=-1}^{x=1} \frac{1-x^2}{2} dx \\ &= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Essayons maintenant de calculer l'intégrale en intégrant d'abord en x puis en y . En utilisant la description de Δ vue précédemment, on vérifie facilement que

$$\Delta^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y \in [0, 1] \text{ et } x \in \left[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2} \right] \right\}.$$

1. Sans tenir compte pour l'instant des possibilités offertes par les changements de variables que nous verrons bientôt

On a donc :

$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} y dx \right) dy \\
 &= \int_{y=0}^{y=1} [yx]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy \\
 &= \int_{y=0}^{y=1} 2y\sqrt{1-y^2} dy \\
 &= \left[-\frac{2}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{y=0}^{y=1} \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

On aboutit bien au même résultat, mais avec des calculs intermédiaires sensiblement différents.

9.2 Intégrale et volume sous le graphe ; aire d'un domaine

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'intégrale d'une fonction d'une variable f (que l'on supposera positive pour simplifier) est égale à l'aire de la région située entre l'axe des abscisses et le graphe de f . Ce résultat se généralise pour les fonctions de deux variables : nous allons voir que l'intégrale d'une fonction de deux variables f sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est égale au volume de la région de l'espace \mathbb{R}^3 située à la verticale du domaine D , entre le plan $z = 0$ et le graphe de f .

Pour donner un sens à un tel énoncé, il faut bien sûr définir le volume d'une région D de l'espace \mathbb{R}^3 . On le fait exactement de la même manière que nous avons défini l'aire d'une région du plan dans le chapitre précédent : on approche la région D par une union de cubes de côté ϵ ; on fait tendre ϵ vers 0 ; si le volume de l'union de cubes a une limite, alors cette limite sera par définition le volume de la région D .

On a alors le résultat suivant :

Théorème 9.2.1 (Intégrale double et volume sous le graphe). *Soit f une fonction de deux variables, et D une région bornée du plan \mathbb{R}^2 , délimitée par une courbe continue fermée et contenue dans le domaine de définition de f . On suppose que f est positive sur D . On note A la région de l'espace \mathbb{R}^3 constituée des points situés à la verticale de D , entre le plan $z = 0$ et le graphe de f ; autrement dit :*

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } (x, y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

La région A est alors quarrable, et on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \text{Volume}(A).$$

Nous laissons au lecteur qui le souhaite le soin dénoncer la généralisation du théorème 8.2.1 aux fonctions dont le signe n'est pas constant sur le domaine d'intégration.

Appliquons le théorème 8.2.1 dans le cas particulier où la fonction f est constante égale à 1. Dans ce cas particulier, le graphe de f n'est autre que le plan $z = 1$. La région A est donc

un cylindre de base D et de hauteur 1. Le volume de ce cylindre est égal à Aire de la base \times hauteur = Aire(D) \times 1 = Aire(D). On obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire 9.2.2. *Si D est une région bornée du plan, bordée par une courbe fermée continue, alors on a*

$$\text{Aire}(D) = \iint_D 1 dx dy.$$

9.3 Intégrales triples

Les définitions et les résultats vus ci-dessus pour les fonctions de deux variables se généralisent aux fonctions de trois variables. En particulier, le théorème de Fubini :

Théorème 9.3.1 (Théorème de Fubini pour les fonctions de trois variables). *Considérons une fonction continue de trois variables f , et une région D de l'espace \mathbb{R}^3 , contenue dans le domaine de définition de f et bordée par une surface fermée continue. Considérons un pavé $I \times J \times K = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ contenant D , et définissons des ensembles comme suit :*

- pour $(x, y) \in I \times J = [a, b] \times [c, d]$, nous notons $Z_{x,y} = \{z \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x, y, z) \in D\}$;
- pour $(x, z) \in I \times K = [a, b] \times [e, f]$, nous notons $Y_{x,z} = \{y \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x, y, z) \in D\}$;
- pour $(y, z) \in J \times K = [c, d] \times [e, f]$, nous notons $X_{y,z} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x, y, z) \in D\}$.

On a alors l'égalité

$$\begin{aligned} & \iint_{I \times J} \left(\int_{z \in Z_{x,y}} f(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \iint_{I \times K} \left(\int_{y \in Y_{x,z}} f(x, y, z) dy \right) dx dz \\ &= \iint_{J \times K} \left(\int_{x \in X_{y,z}} f(x, y, z) dx \right) dy dz. \end{aligned}$$

En bref, ce théorème dit que, lorsqu'on intègre une fonction f successivement par rapport à ses trois variables x, y, z , on obtient le même résultat quel que soit l'ordre dans lequel on considère les variables. Ce théorème nous permet de définir l'intégrale d'une fonction de trois variables sur un domaine de \mathbb{R}^3 :

Définition (Intégrale d'une fonction de trois variables sur un domaine). *On reprend les notations du théorème 8.3.1. On appellera intégrale de f sur le domaine D la quantité*

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz := \iint_{[a,b] \times [c,d]} \left(\int_{z \in Z_{x,y}} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \dots$$

L'un des intérêts des intégrales de fonctions de trois variables est qu'elles permettent de calculer le volume de régions de l'espace \mathbb{R}^3 . On a ainsi en effet un analogue du corollaire 8.2.2 :

Corollaire 9.3.2. *Si D est une région bornée de l'espace \mathbb{R}^3 , bordée par une surface fermée continue, alors on a*

$$\text{Volume}(D) = \iiint_D 1 dx dy dz.$$

9.4 Changement de variables

9.4.1 Le théorème général

Le théorème de changement de variables que vous connaissez pour les intégrales simples se généralise pour les intégrales doubles ou triples. En pratique, vous utiliserez presque toujours les mêmes changements de variables : les passages en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques. Afin d'expliquer d'où viennent ces cas particuliers, je vais tout de même énoncer les théorèmes de changements de variables généraux pour les intégrales doubles et triples.

Commençons par les intégrales doubles. Un changement de variable dans une intégrale simple fait intervenir une application ϕ d'une partie de \mathbb{R}^2 vers une autre partie de \mathbb{R}^2 , et la formule de changement de variables utilise la dérivée ϕ' de cette application ϕ . Pour les intégrales doubles, nous aurons à faire à une application ϕ d'une partie de \mathbb{R}^2 vers une autre partie de \mathbb{R}^2 . La formule de changement de variables utilisera une combinaison des dérivées partielles de fonctions coordonnées de ϕ , qu'on appelle le *jacobien* de ϕ . Voici la définition.

Définition. *Considérons une application*

$$\begin{aligned}\phi : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))\end{aligned}$$

On suppose que les fonctions de deux variables $(u, v) \mapsto x(u, v)$ et $(u, v) \mapsto y(u, v)$ admettent des dérivées partielles (partout là où elles sont définies). Le jacobien de ϕ au point (u, v) , que l'on note $Jac(\phi)(u, v)$, est le déterminant de la matrice des dérivées partielles de ϕ ; plus précisément :

$$Jac(\phi)(u, v) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}.$$

Les conditions pour pouvoir effectuer un changement de variables dans une intégrales doubles sont plus strictes que pour les intégrales simples. En particulier, on a besoin de supposer que le changement de variables est un "difféomorphisme"; voici la définition. On dit qu'une application

$$\begin{aligned}\phi : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))\end{aligned}$$

induit un *difféomorphisme d'une région $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ sur une région $D \subset \mathbb{R}^2$* si :

1. pour tout point (x, y) de D , il existe un point $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ de Δ et une seul tel que $(x, y) = \phi(u, v)$,
2. les fonctions de deux variables $(u, v) \mapsto x(u, v)$, $(u, v) \mapsto y(u, v)$, $(x, y) \mapsto u(x, y)$ et $(x, y) \mapsto v(x, y)$ admettent des dérivées partielles continues.

En pratique, la condition 2 sera toujours vérifiée ou presque dans les exemples auxquels vous aurez à faire; par contre, il faudra déterminer l'ensemble Δ pour que la condition 1 soit satisfaite.

Théorème 9.4.1 (Théorème de changement de variables). *Considérons une fonction continue de deux variables f , et une région bornée D de \mathbb{R}^2 délimitée par une courbe continue fermée et contenue dans le domaine de définition de f . Considérons une application $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, et supposons que cette application induit un difféomorphisme d'une région Δ sur D . Alors on a*

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_\Delta f(\phi(u, v)) |Jac(\phi)(u, v)| \, du dv.$$

Passons maintenant aux intégrales triples. Le théorème est presque le même que pour les intégrales doubles ; la seule différence est qu'il nous faut maintenant considérer une application ϕ de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3 (ou d'une partie de \mathbb{R}^3 vers une partie de \mathbb{R}^3).

Définition. *Considérons une application*

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) &\mapsto \phi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \end{aligned}$$

On suppose que les fonctions de deux variables $(u, v, w) \mapsto x(u, v, w)$, $(u, v, w) \mapsto y(u, v, w)$ et $(u, v, w) \mapsto z(u, v, w)$ admettent des dérivées partielles (partout là où elles sont définies). Le jacobien de ϕ au point (u, v, w) , que l'on note $Jac(\phi)(u, v, w)$, est le déterminant de la matrice des dérivées partielles de ϕ ; plus précisément :

$$Jac(\phi)(u, v, w) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u, v, w) \end{pmatrix}.$$

On définit la phrase “ ϕ induit un diffeomorphisme de Δ sur D ” exactement de la même manière que dans le cas d'une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Théorème 9.4.2 (Théorème de changement de variables pour les intégrales triples). *Considérons une fonction continue de trois variables f , et une région bornée D de \mathbb{R}^3 délimitée par une surface continue fermée et contenue dans le domaine de définition de f . Considérons une application $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, et supposons que cette application induit un diffeomorphisme d'une région Δ sur D . Alors on a*

$$\iint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_{\Delta} f(\phi(u, v, w)) |Jac(\phi)(u, v, w)| \, du dv dw.$$

Nous allons maintenant détailler trois exemples importants de changements de variables : les passages en coordonnées polaires, en coordonnées cylindriques, et en coordonnées sphériques.

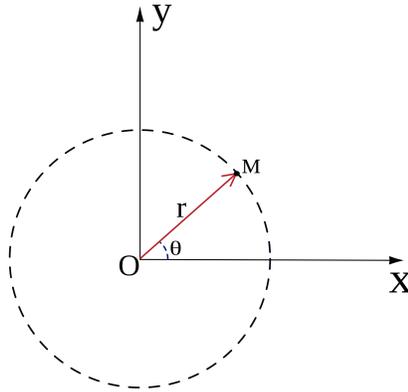
9.4.2 Coordonnées polaires

Un point M du plan \mathbb{R}^2 peut bien sûr être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y) , mais aussi par ses coordonnées polaires (r, θ) . Rappelons que r désigne alors la distance de M à l'origine O , et que θ désigne l'angle orienté entre la demi-droite $[Ox)$ et la demi-droite $[OM)$. Dans ces conditions r est bien sûr positif ou nul, et θ n'est bien défini que modulo 2π . On peut décider que l'on choisit toujours θ dans $[0, 2\pi[$; c'est ce que nous ferons. Le passage de coordonnées polaires à cartésiennes est facile à faire ; on a :

$$x = r \cos(\theta) \text{ et } y = r \sin(\theta).$$

Le théorème de changement de variable permet d'exprimer l'intégrale d'une fonction de deux variables en coordonnées polaires. Pour ce faire considérons l'application “passage de coordonnées polaires à cartésiennes”

$$\begin{aligned} \phi : \quad [0, +\infty[\times [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (x(r, \theta), y(r, \theta)) := (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned}$$



Étant donné une région D , si on note

$$\Delta = \{(r, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\text{ tels que } (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in D\},$$

alors ϕ induit (presque)² un difféomorphisme de Δ sur D . Calculons le jacobien de ϕ :

$$\text{Jac}(\phi)(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r.$$

En appliquant le théorème de changement de variables à ϕ , on obtient :

Théorème 9.4.3 (Intégrale en coordonnées polaires). *Soit f une fonction continue de deux variables x, y , et D une région bornée du plan \mathbb{R}^2 , délimitée par une courbe fermée continue, et contenue dans le domaine de définition de f . On note*

$$\Delta = \{(r, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\text{ tels que } (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in D\}.$$

On a alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \, r \, dr d\theta.$$

Dans l'énoncé ci-dessus, il faut comprendre que D et Δ représente le même domaine, mais vu dans des coordonnées différentes : en coordonnées cartésiennes pour D , et en coordonnées polaires pour Δ . Par exemple, dans le cas du disque unité, on aura

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1\},$$

et

$$\Delta = \{(r, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\text{ tels que } r \leq 1\}.$$

Le théorème 8.4.3 permet d'exprimer l'intégrale de n'importe quelle fonction de deux variables en coordonnées polaires. C'est utile lorsque le domaine d'intégration et la fonction considérée ont des expressions plus simples en coordonnées polaires qu'en coordonnées cartésiennes. C'est

2. Ce n'est pas tout à fait vrai, car il y a des problèmes en $r = 0$ et $\theta = 0$, mais ça ne compte pas.

typiquement le cas lorsque le domaine d'intégration est un disque centré à l'origine (qui se définit donc en coordonnées polaires par une seule inéquation très simple $r \leq r_0$), et/ou lorsque la fonction f à intégrer ne dépend que de $\sqrt{x^2 + y^2}$ (en coordonnées polaires, f ne dépend alors que de la variable $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, et pas de la variable θ).

Exemple. Supposons que l'on veuille calculer l'intégrale de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur le disque unité D . On a $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$. En coordonnées polaires, le disque unité s'écrit correspond à

$$\Delta = \{(r, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\text{ tels que } r \leq 1\}.$$

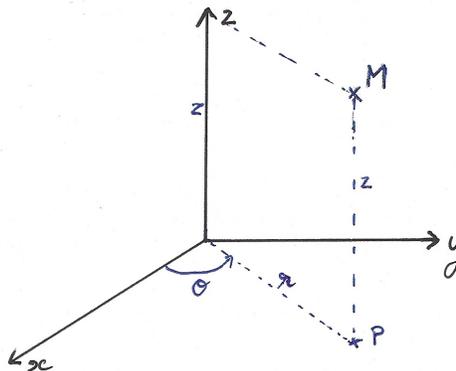
D'après le théorème 8.4.3, on a donc

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx dy &= \iint_{\Delta} r^2 \, r \, dr d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=1} r^3 \, dr \right) d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{4} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Effectuer le calcul sans passer par les coordonnées polaires aurait été impossible.

9.4.3 Coordonnées cylindriques

Un point M de l'espace \mathbb{R}^3 peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Il peut aussi l'être par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Rappelons que (r, θ) sont ici les coordonnées polaires de la projection de M dans le plan (Oxy) (c'est-à-dire le plan $z = 0$).



Le passage de coordonnées cylindriques à cartésiennes est donné par :

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad z = z.$$

Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'un point de l'espace varient donc dans $[0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$.

Considérons l'application "passage de coordonnées cylindriques à cartésiennes"

$$\begin{aligned} \phi : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) &\mapsto (x, y, z) := (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \end{aligned}$$

Étant donné une région D , si on note

$$\Delta = \{(r, \theta, z) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \text{ tels que } (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \in D\},$$

alors ϕ induit (presque, mais ça ne compte pas) un difféomorphisme de Δ sur D . Le jacobien de ϕ est égal à :

$$\begin{aligned} \text{Jac}(\phi)(r, \theta, z) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial x}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial y}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial z}{\partial z}(r, \theta, z) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) \\ &= r. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de changement de variables à ϕ , on obtient :

Théorème 9.4.4 (Intégrale en coordonnées cylindriques). *Soit f une fonction continue de deux variables x, y, z , et D une région bornée de l'espace \mathbb{R}^3 , délimitée par une surface fermée continue, et contenue dans le domaine de définition de f . On note*

$$\Delta = \{(r, \theta, z) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \text{ tels que } (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \in D\}.$$

On a alors

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \, r \, dr d\theta dz.$$

Encore une fois, dans l'énoncé ci-dessus, il faut comprendre que D et Δ représente le même domaine, mais vu dans des coordonnées différentes : en coordonnées cartésiennes pour D , et en coordonnées cylindriques pour Δ . Voici un exemple de calcul d'intégrale en coordonnées cylindriques.

Exemple. Supposons que l'on veuille calculer le volume d'un cône dont la base est un disque de rayon 1 et de hauteur 1. D'après le corollaire 8.3.2, cela revient à calculer l'intégrale de la fonction constante 1 sur un tel cône, par exemple sur le cône C dont la base est le disque D de centre $(0, 0, 0)$, de rayon 1, situé dans le plan $z = 0$, et dont le sommet est le point $(0, 0, 1)$. En coordonnées cylindriques, ce cône C est défini par

$$C := \{(r, \theta, z) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \text{ tels que } 0 \leq z \leq 1 \text{ et } r \leq 1 - z\}.$$

En utilisant le théorème 8.4.4, on a donc

$$\begin{aligned}
 \text{Volume}(C) &:= \int_C 1 \, r \, dr d\theta dz \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{z=0}^1 \left(\int_{r=0}^{1-z} r \, dr \right) dz \right) d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{z=0}^1 \left(\left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1-z} \right) dz \right) d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{z=0}^1 \frac{(1-z)^2}{2} dz \right) d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[-\frac{(1-z)^3}{6} \right]_{z=0}^{z=1} d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{6} d\theta \\
 &= \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

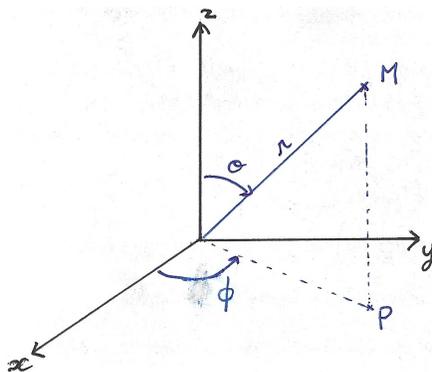
Le volume d'un cylindre d'un cône dont la base est un disque de rayon 1 et de hauteur 1 est donc égal à $\frac{\pi}{3}$.

9.4.4 Coordonnées sphériques

Un point M de l'espace \mathbb{R}^3 peut également être repéré par ses coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) . Rappelons comment sont définies ces coordonnées :

- r est la distance du point M à l'origine O ;
- θ est l'angle orienté entre la demi-droite $[Oz]$ et la demi-droite $[OM]$; en termes géographiques, θ est la co-latitude du point M (c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ radians moins la latitude du point M) ;
- si on note P la projection de M sur le plan (Oxy) (c'est-à-dire le plan $z = 0$), alors ϕ est l'angle orienté entre la demi-droite $[Ox]$ et la demi-droite $[OP]$; en termes géographiques, ϕ est la longitude du point M .

La coordonnée r varie dans $[0, +\infty[$. La co-latitude θ varie dans $[0, \pi]$. La longitude ϕ varie dans $[0, 2\pi]$.



Remarque. Certains textes utilisent d'autres conventions pour la définition des coordonnées. En particulier, il arrive qu'on utilise la latitude au lieu de la co-latitude, ou qu'on échange les noms des angles θ et ϕ (i.e. que ϕ désigne la co-latitude et θ la longitude). Faites attention à ces choix de conventions !

En faisant un peu de trigonométrie, on voit que le passage de coordonnées sphériques à cartésiennes est donc donné par :

$$x = r \cos(\phi) \sin(\theta) \quad y = r \sin(\phi) \sin(\theta) \quad z = r \cos(\theta).$$

Considérons l'application "passage de coordonnées sphériques à cartésiennes"

$$\begin{aligned} \phi : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \phi, \theta) &\mapsto (x, y, z) := (r \cos(\phi) \sin(\theta), r \sin(\phi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Étant donné une région D , si on note

$$\Delta = \{(r, \phi, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \text{ tels que } (r \cos(\phi) \sin(\theta), r \sin(\phi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \in D\},$$

alors ϕ induit (presque, mais ça ne compte pas) un difféomorphisme de Δ sur D . Le jacobien de ϕ est égal à :

$$\begin{aligned} \text{Jac}(\phi)(r, \theta, z) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \phi, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \phi}(r, \phi, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \phi, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \phi, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \phi}(r, \phi, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \phi, \theta) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(r, \phi, \theta) & \frac{\partial z}{\partial \phi}(r, \phi, \theta) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(r, \phi, \theta) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) & -r \sin(\phi) \sin(\theta) & r \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & r \cos(\phi) \sin(\theta) & r \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -r \sin(\theta) \end{vmatrix} \\ &= \cos(\theta) (-r^2 \sin^2(\phi) \sin(\theta) \cos(\theta) - r^2 \cos^2(\phi) \cos(\theta) \sin(\theta)) \\ &\quad - r \sin(\theta) (r \cos^2(\phi) \sin^2(\theta) + r \sin^2(\phi) \sin^2(\theta)) \\ &= -r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) (\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) - r^2 \sin(\theta) \sin^2(\theta) (\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) \\ &= -r^2 \sin(\theta) (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \\ &= -r^2 \sin(\theta). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de changement de variables à ϕ , on obtient :

Théorème 9.4.5 (Intégrale en coordonnées sphériques). *Soit f une fonction continue de deux variables x, y, z , et D une région bornée de l'espace \mathbb{R}^3 , délimitée par une surface fermée continue, et contenue dans le domaine de définition de f . On note*

$$\Delta = \{(r, \phi, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \text{ tels que } (r \cos(\phi) \sin(\theta), r \sin(\phi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \in D\}.$$

On a alors

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos(\phi) \sin(\theta), r \sin(\phi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \, r^2 \sin(\theta) \, dr d\phi d\theta.$$

Voici un exemple d'utilisation des coordonnées sphériques pour un calcul d'intégrale.

Exemple. Supposons que l'on veuille calculer le volume d'une boule de rayon R . D'après le corollaire 8.3.2, cela revient à calculer l'intégrale de la fonction constante 1 sur une boule de rayon R , par exemple sur la boule B de rayon R centrée en $(0, 0, 0)$. En coordonnées sphériques, cette boule B est simplement définie par

$$B := \{(r, \phi, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \text{ tels que } r \leq R\}.$$

En utilisant le théorème 8.4.4, on a donc

$$\begin{aligned} \text{Volume}(C) &:= \int_C 1 \, r \, dr d\theta dz \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^R r^2 \sin(\theta) \, dr \right) d\phi \right) d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\left[\frac{r^3}{3} \sin(\theta) \right]_{r=0}^{r=R} \right) d\phi \right) d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{R^3}{3} \sin(\theta) d\phi \right) d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} 2\pi \frac{R^3}{3} \sin(\theta) d\theta \\ &= 2\pi \frac{R^3}{3} [-\cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Le volume d'une boule de rayon R est donc égal à $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Chapitre 10

Intégrales curvilignes

Dans le chapitre précédent, nous avons appris à intégrer des fonctions de deux variables sur des régions du plan : ce sont des intégrales doubles. Pour calculer ces intégrales doubles, on est amené à intégrer les fonctions de deux variables considérées sur des segments horizontaux ou verticaux. En fait, on peut aussi intégrer une fonction de deux variables le long d'une courbe plane. On parle alors d'*intégrale curviligne*. Ces intégrales sont l'objet de notre dernier chapitre.

10.1 Courbes géométriques, paramétrages et orientations

Dans ce chapitre, nous considérerons des *courbes géométriques planes*. Rappelons (voir le chapitre ??) qu'une *courbe géométrique plane* C est un sous-ensemble du plan \mathbb{R}^2 qui est l'image d'une courbe paramétrée plane continue, c'est-à-dire l'image d'une fonction continue d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^2 . Si C est une courbe géométrique plane, et si $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée d'image C , on dit que $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un *paramétrage* de C . Un paramétrage $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'une courbe C est dit *injectif* s'il ne repasse pas deux fois au même point : si $t_1 \neq t_2$ alors $M(t_1) \neq M(t_2)$. Une courbe plane admet toujours un paramétrage injectif. Il est important de comprendre que, si une courbe paramétrée plane admet par définition des paramétrages, elle n'est munie *a priori* d'aucun paramétrage privilégiée : c'est simplement un sous-ensemble du plan.

Comme toujours, nous ne nous préoccupons guère des questions de continuité et de dérivabilité. Toutes les courbes paramétrées que nous considérerons seront — sans qu'on le précise à chaque fois — seront dérivables, à dérivées continues, sauf peut-être en un nombre fini de points (ceci permettant d'inclure par exemple les courbes paramétrées dont les images sont des polygones). Les courbes géométriques considérées seront également supposées continuellement dérivables par morceaux, ce qui signifie qu'elles admettront des paramétrages dérivables, à dérivées continues, sauf peut-être en un nombre fini de points.

Une *orientation* d'une courbe géométrique plane est un “sens de parcours” de cette courbe¹. Une courbe géométrique plane admet exactement deux orientations. Une *courbe géométrique plane orientée* est une courbe géométrique plane munie d'un choix d'orientation. Un *paramétrage direct* d'une courbe plane orientée C est un paramétrage injectif $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de C

1. Je ne donne pas de définition mathématiques précise ; à mon avis, cela ne ferait que vous embrouiller.

qui respecte le sens de parcourt donné par l'orientation de C . Ceci équivaut à demander que le vecteur vitesse $O\vec{M}'(t)$ pointe selon le sens de parcourt de C donné par son orientation.

Définition. Soit C une courbe géométrique plane orientée, et p_0 un point de cette courbe. Le vecteur unitaire tangent direct à C au point p_0 , que nous noterons généralement $\vec{t}(p)$, est le “vecteur tangent à C au point p_0 de norme 1 qui pointe selon l'orientation de C ”. Plus formellement, il est défini en choisissant un paramétrage direct $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de C , en notant s_0 l'unique élément de I tel que $c(s_0) = p_0$, puis en posant

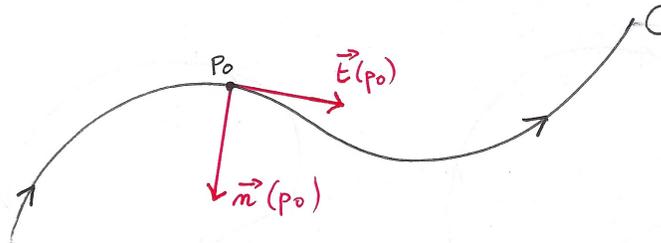
$$\vec{t}(p_0) = \vec{t}(M(s_0)) := \frac{O\vec{M}'(s_0)}{\|O\vec{M}'(s_0)\|}.$$

On vérifie facilement que cette définition ne dépend pas du choix du paramétrage direct M . Si on note $(x(s), y(s))$ les coordonnées de $M(s)$, alors on a

$$\vec{t}(M(s_0)) = \frac{1}{\|O\vec{M}'(s_0)\|} (x'(s_0), y'(s_0)).$$

Définition. Soit C une courbe géométrique plane orientée, et p_0 un point de cette courbe. Le vecteur unitaire normal direct à C au point p_0 , que nous noterons généralement $\vec{n}(p)$, est le vecteur obtenu en tournant $\vec{t}(p_0)$ de $-\frac{\pi}{2}$. Autrement dit, c'est le vecteur en p_0 tel que $(\vec{n}(p_0), \vec{t}(p_0))$ forme une base orthonormale directe. Si $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un paramétrage de C , et si on note $(x(s), y(s))$ les coordonnées de $M(s)$, alors on a

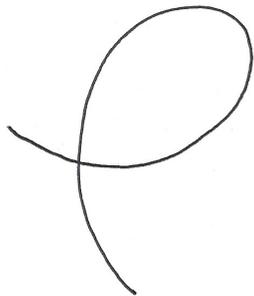
$$\vec{n}(M(s_0)) = \frac{1}{\|O\vec{M}'(s_0)\|} (y'(s_0), -x'(s_0)).$$



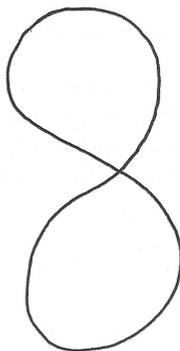
Une courbe orientée C . Les vecteurs unitaire tangent direct et unitaire normal direct à C en un point $p_0 \in C$.

Informellement, une *courbe fermée* est une courbe qui “revient au même point”. Plus formellement, une *courbe géométrique plane fermée* est une courbe géométrique plane qui admet un paramétrage $M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $M(a) = M(b)$. Informellement, une *courbe fermée simple* est une courbe fermée “sans croisement”. Plus formellement, c'est une *courbe géométrique plane fermée* est une courbe géométrique plane qui admet un paramétrage $M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $M(a) = M(b)$ (elle est fermée) et $M(t_1) \neq M(t_2)$ pour $t_1, t_2 \in [a, b[$ et $t_1 \neq t_2$ (elle est simple).

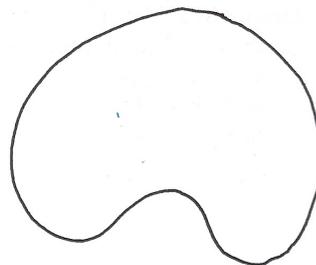
Une courbe géométrique plane fermée C sépare le plan en deux régions : une région bornée qu'on appelle usuellement *l'intérieur de C* , et une région non-bornée qu'on appelle *l'extérieur de C* . Nous l'avons déjà dit : une courbe fermée admet toujours deux orientations. Lorsque la courbe est fermée et simple, il est possible de distinguer ces deux orientations *a priori*.



Une courbe non-fermée

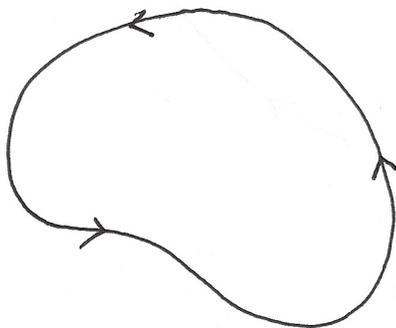


Une courbe fermée (non-simple)

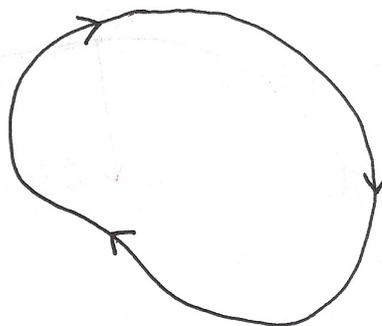


Une courbe fermée simple

Définition. Soit C une courbe fermée simple orientée. On dit que C est positivement orientée si le vecteur normal unitaire direct \vec{n} pointe vers l'extérieur de C . Sinon on dit que C est négativement orientée.



Une courbe positivement orientée



Une courbe négativement orientée

10.2 Intégrale d'une fonction le long d'une courbe

Proposition 10.2.1. Soient $M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $N : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux paramétrages directs (et continument dérivables par morceaux) d'une même courbe plane orientée C . Soit f une fonction de deux variables (continue), définie sur C . Alors on a

$$\int_a^b f(M(s)) \|\vec{OM}'(s)\| ds = \int_c^d f(P(t)) \|\vec{OP}'(t)\| dt.$$

Démonstration. Le paramétrage P est direct donc injectif : on peut donc définir son inverse $P^{-1} : C \rightarrow [c, d]$. On considère le changement de paramétrage

$$\begin{aligned} [a, b] &\rightarrow [c, d] \\ s &\mapsto t(s) := P^{-1}(M(s)). \end{aligned}$$

En utilisant la formule de dérivation composée, on vérifie que

$$t'(s) = \frac{\|O\vec{M}'(s)\|}{\|\vec{O}P'(P^{-1}(M(s)))\|} = \frac{\|O\vec{M}'(s)\|}{\|\vec{O}P'(t(s))\|},$$

autrement dit

$$\|\vec{O}P'(t)\|dt = \|O\vec{M}'(s)\|ds.$$

Dès lors, l'égalité souhaitée découle donc de la formule de changement de variable. \square

La proposition 9.2.1 permet de formuler la définition suivante :

Définition (Intégrale d'une fonction le long d'une courbe plane orientée). Soit C une courbe plane orientée (qu'on suppose comme toujours continument dérivable par morceaux), et f une fonction de deux variables définie (au moins) sur C . On appelle intégrale de f le long de C , et on note $\int_C f$, la quantité définie comme suit : on choisit un paramétrage direct $M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la courbe C , et on pose

$$\int_C f := \int_a^b f(M(s)) \|O\vec{M}'(s)\| ds,$$

où $O\vec{M}'(s)$ désigne la vitesse du paramétrage M au temps s .

Remarque. Cette définition est légitime puisque, d'après la proposition 9.2.1, la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(M(s)) \|O\vec{M}'(s)\| ds$ ne dépend pas du choix du paramétrage direct $s \mapsto M(s)$. Insistons sur la présence du facteur $\|O\vec{M}'(s)\|$: sans ce facteur, l'intégrale ne serait pas indépendante du choix du paramétrage de la courbe.

Exemple (Longueur d'une courbe). Soit C une courbe plane orientée, qu'on suppose comme toujours continument dérivable par morceaux. On peut définir la longueur de C , en approchant C de mieux en mieux par des lignes polygonales (une ligne polygonale est une suite de segments mis bout-à-bout). On peut alors montrer l'énoncé suivant :

La longueur de C est égale à l'intégrale de la fonction 1 le long de C .

10.3 Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe. Flux d'un champ de vecteurs à travers une courbe

Définition (Champ de vecteurs). Un champ de vecteurs \vec{X} sur une région D de \mathbb{R}^2 est une application qui à chaque point (x, y) de D associe un vecteur $\vec{X}(x, y)$ basé au point (x, y) .

Exemple. Vous avez déjà manipulé des champs de vecteurs. D'une part, en Physique, les champs de forces (le champ électrique créé par une distribution de charge par exemple) sont des champs de vecteurs : en chaque point de l'espace Physique, on a un vecteur qui donne l'intensité et la direction de la force considérée (par exemple, électrique) en ce point. D'autre part, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables, alors le gradient de f

$$(x, y) \mapsto \overrightarrow{\text{Grad}}_{(x, y)} f$$

est un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^2 . Ces deux exemples sont d'ailleurs reliés. En effet, la plupart des champs de forces en Physique “dérivent d'un potentiel”. ceci signifie que ce sont des gradients de fonctions, qu'on appelle des “potentiels”. Par exemple, le champ électrique \vec{E} est le gradient du potentiel électrique.

Définition (Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe). Soit C une courbe plane orientée, et \vec{X} un champ de vecteurs (défini au moins au voisinage de C). Pour $(x, y) \in C$, on note $\vec{t}(x, y)$ le vecteur tangent unitaire direct de C en (x, y) . La circulation de \vec{X} le long de C est l'intégrale du produit scalaire de \vec{X} avec \vec{t} le long de la courbe C :

$$\text{Circulation}(\vec{X}, C) := \int_C \vec{X} \cdot \vec{t}$$

La circulation d'un champ de vecteurs \vec{X} le long d'une courbe plane orientée C est définie indépendamment de toute paramétrisation. Il n'empêche que, pour calculer cette circulation, il faut choisir une paramétrisation de C . Soit donc

$$\begin{aligned} M : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto M(s) = (x(s), y(s)) \end{aligned}$$

une paramétrisation directe de C . Alors

$$\vec{t}(M(s)) = \frac{O\vec{M}'(s)}{\|O\vec{M}'(s)\|}.$$

Notons $(P(x, y), Q(x, y))$ les coordonnées du vecteur $\vec{X}(x, y)$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_C \vec{X} \cdot \vec{t} &= \int_a^b \frac{1}{\|O\vec{M}'(s)\|} \vec{X}(M(s)) \cdot O\vec{M}'(s) \|O\vec{M}'(s)\| ds \\ &= \int_a^b \vec{X}(M(s)) \cdot O\vec{M}'(M(s)) ds \\ &= \int_a^b P(x(s), y(s)) \cdot x'(s) + Q(x(s), y(s)) \cdot y'(s) ds. \end{aligned}$$

En résumé :

La circulation du champ de vecteurs $\vec{X} = (P, Q)$ le long de la courbe paramétrée $s \mapsto M(s)$ est égale à

$$(10.3.1) \quad \text{Circulation}(\vec{X}, \Gamma) = \int_a^b P(x(s), y(s)) \cdot x'(s) + Q(x(s), y(s)) \cdot y'(s) ds.$$

Interprétation physique. Si \vec{X} est un champ de forces, alors la circulation de \vec{X} le long d'une courbe Γ est le *travail* de ce champ de force quand on déplace un point le long de C . Considérons par exemple la situation où une charge électrique e se trouve dans soumise à un champ électrique \vec{E} . Cette charge subit une force électrique $\vec{X} = e \cdot \vec{E}$. Si on déplace la charge le long d'une courbe Γ , le travail de force électrique au cours de ce déplacement sera égal la circulation de \vec{X} le long de Γ .

Définition (Flux d'un champ de vecteurs à travers une courbe). Soit C une courbe plane orientée, et \vec{X} un champ de vecteurs (défini au moins au voisinage de C). Pour $(x, y) \in C$, on note $\vec{n}(x, y)$ le vecteur normal unitaire direct de C en (x, y) . Le flux de \vec{X} à travers C est l'intégrale du produit scalaire de \vec{X} avec \vec{n} le long de la courbe C :

$$\text{Flux}(\vec{X}, \Gamma) := \int_{\Gamma} \vec{X} \cdot \vec{n}$$

Considérons un champ de vecteurs \vec{X} et une courbe C comme ci-dessus. Notons (P, Q) les coordonnées de \vec{X} , et considérons une paramétrisation directe

$$\begin{aligned} M : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto M(s) = (x(s), y(s)) \end{aligned}$$

de la courbe C . Notons $\vec{OM}'(t) = (x'(t), y'(t))$ le vecteur vitesse de cette paramétrisation au temps s . Comme nous l'avons vu plus haut, le vecteur normal unitaire direct de C est donné par

$$\vec{n}(M(s)) = \frac{1}{\|\vec{OM}'(s)\|} (y'(s), -x'(s)).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_C \vec{X} \cdot \vec{n} &= \int_a^b \frac{1}{\|\vec{OM}'(s)\|} (P(M(s)).y'(s) - Q(M(s)).x'(s)) \|\vec{OM}'(s)\| ds \\ &= \int_a^b P(M(s)).y'(s) - Q(M(s)).x'(s) ds. \end{aligned}$$

Ainsi :

Le flux du champ de vecteurs $\vec{X} = (P, Q)$ à travers la courbe paramétrée $s \mapsto c(s)$ est égale à

$$(10.3.2) \quad \text{Flux}(\vec{X}, C) = \int_a^b P(x(s), y(s)).y'(s) - Q(x(s), y(s)).x'(s) ds.$$

Remarque. Considérons une courbe plane orientée Γ . En observant les formules (9.3.1) et (9.3.2), on constate que le flux à travers C d'un champ de vecteurs de coordonnées (P, Q) est égal à la circulation le long de C du champ de vecteurs de coordonnées $(-Q, P)$.

Interprétation physique. Le terme “flux” provient du cas où \vec{X} est le champ des vitesses des particules d'un fluide (qu'on suppose en écoulement stationnaire pour simplifier) Ceci signifie que $\vec{X}(x, y)$ est la vitesse de la particule se trouvant au point (x, y) (cette vitesse ne dépend pas de l'instant d'observation si l'écoulement est stationnaire). Dans ce cas, le flux de \vec{X} à travers la courbe Γ est une quantité de fluide qui traverse Γ par unité de temps. Autrement dit, c'est le “débit” de fluide à travers Γ .

10.4 Formule de Green-Riemann

Dans le chapitre précédent, nous avons appris à intégrer une fonction de deux variables sur une région du plan entourée par une courbe fermée : c'est la notion d'*intégrale double*. Nous venons de voir qu'il est aussi possible d'intégrer une fonction de deux variables le long d'une courbe : c'est la notion d'*intégrale curviligne*. Nous allons maintenant énoncer des résultats qui relient certaines intégrales curvilignes le long de courbes fermées à des intégrales doubles sur les régions du plan entourées par ces courbes fermées.

Théorème 10.4.1 (Formule de Green-Riemann). *Soit C une courbe plane fermée simple positivement orientée (et continument dérivable). On note D la région bornée délimitée par C . Si \vec{X} est un champ de vecteurs de coordonnées (P, Q) défini sur D , on a*

$$\text{Circulation}(\vec{X}, C) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$



Georges Green (1793-1841)



Bernhard Riemann (1826-1866)

La formule de Green-Riemann exprime la circulation de \vec{X} le long de la courbe C (qui est, par définition, une intégrale curviligne, donc une intégrale simple) comme une intégrale double sur le domaine délimité par C . Dans cette intégrale double interviennent certaines dérivées partielles des coordonnées du champ de vecteurs \vec{X} . La formule de Green-Riemann est une généralisation en dimension 2 de la formule que vous connaissez bien $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$.

Nous allons donner ci-dessous un corollaire de la formule de Green-Riemann qui permet d'exprimer le flux d'un champ de vecteurs comme une intégrale double. Pour énoncer ce corollaire, il est commode d'introduire la notion de *divergence* d'un champ de vecteurs :

Définition (Divergence d'un champ de vecteurs). *Soit \vec{X} un champ de vecteurs défini sur une région du plan, de coordonnées (P, Q) . La divergence de \vec{X} , notée $\text{div}\vec{X}$ est la fonction de deux variables définie par*

$$\text{div}\vec{X}(x, y) := \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y).$$

Interprétation physique. La valeur de la divergence du champ \vec{X} indique si, quand on prend deux points proches (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , les vecteurs $\vec{X}(x_1, y_1)$ et $\vec{X}(x_2, y_2)$ ont tendance à pointer dans la même direction (divergence nulle), à avoir des directions divergentes (divergence positive), ou des directions convergentes (divergence négative)².

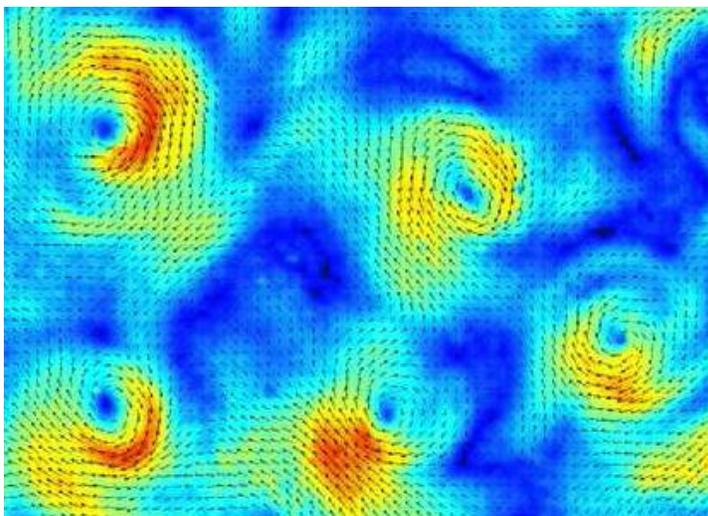
Nous pouvons maintenant énoncer (et démontrer) le corollaire annoncé :

Corollaire 10.4.2 (Flux et divergence). *Soit C une courbe plane fermée simple positivement orientée (dérivable, à dérivée continue, au moins par morceaux). On note D la région bornée délimitée par C . Si \vec{X} est un champ de vecteurs défini sur D , alors le flux de \vec{X} à travers la courbe C est égal à l'intégrale sur D de la divergence de \vec{X} :*

$$\text{Flux}(\vec{X}, C) = \iint_D \text{div} \vec{X}.$$

Démonstration. Si (P, Q) sont les coordonnées du champ \vec{X} , il suffit d'appliquer la formule de Green-Riemann au champ $(-Q, P)$ et d'utiliser la remarque 9.3. \square

Application en mécanique des fluides. Soit \vec{X} le champ de vitesse d'un fluide. Supposons le fluide incompressible. Alors, pour toute région bornée D du plan, la quantité de fluide qui se trouve dans D ne varie pas au cours du temps. Ceci implique que le flux de \vec{X} à travers le bord de D est nul. D'après le corollaire 9.4.2 ceci implique que l'intégrale de la divergence de \vec{X} sur la région D est nulle. Mais ceci est valable pour n'importe quelle région bornée D . On en déduit facilement que la divergence de \vec{X} est identiquement nulle (en effet, si la divergence de X n'était pas identiquement nulle, elle serait strictement positive ou strictement négative en un point (x, y) ; par continuité, elle serait strictement positive ou strictement négative sur un voisinage de (x, y) ; son intégrale sur une petite région contenue dans ce voisinage de (x, y) serait donc non-nulle). On a donc montré que : si \vec{X} est le champ de vitesse d'un fluide incompressible, alors la divergence de \vec{X} est nulle.



Un exemple de champ de vitesse de fluide compressible

2. Attention, je simplifie beaucoup.

Application électrostatique. Soit \vec{E} le champ électrique créé par une distribution de charge de densité ρ . On sait que \vec{E} dérive d'un potentiel U ; autrement dit, il existe une fonction $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, qu'on appelle "potentiel électrique", telle que $\vec{E} = \overrightarrow{\text{Grad}}U$. On sait également que ce potentiel U est relié à la distribution de charges $\text{div}(\overrightarrow{\text{Grad}}U) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, où ϵ_0 est une constante : la *permittivité* du milieu³. Considérons maintenant une courbe fermée simple positivement orientée C délimitant une région D du plan. D'après le corollaire 9.4.2, on a

$$\text{Flux}(\vec{E}, C) = \iint_D \text{div}\vec{E} = \iint_D \text{div}(\overrightarrow{\text{Grad}}U) = \iint_D \rho.$$

On obtient donc le théorème de Gauss électrostatique :

Théorème 10.4.3 (Théorème de Gauss électrostatique). *Si \vec{E} est le champ électrique créé par une distribution de charge de densité ρ sur le plan, et si C est une courbe fermée simple positivement orientée délimitant une région D du plan, alors le flux de \vec{E} à travers C est égal à l'intégrale de la densité de charges ρ sur D .*

3. La fonction $\text{div}(\overrightarrow{\text{Grad}}U)$ s'appelle le *laplacien* du potentiel U ; on le note généralement ΔU