

Calculus PCST

Frédéric Le Roux et Thierry Ramond
Mathématiques
Université Paris Sud

e-mail: frederic.leroux@math.u-psud.fr et thierry.ramond@math.u-psud.fr

version du 2 décembre 2005

Table des matières

I	Fonctions d'une variable réelle	5
1	Continuité	6
1.1	Vocabulaire	6
1.2	Définitions	7
1.3	Aspect pratique	10
1.3.1	Comment calculer une limite?	10
1.3.2	Comment montrer la continuité sur un intervalle?	11
1.3.3	Limites à connaître. Fonctions continues de référence	12
1.4	Théorème des valeurs intermédiaires	12
1.5	Résolution approchée d'équation : la dichotomie	13
2	Dérivabilité	15
2.1	Nombre dérivé et fonction dérivée	15
2.2	Les accroissements finis	18
2.3	Application à l'étude des fonctions	18
3	Formule de Taylor et Développements Limités	20
3.1	La formule de Taylor-Young	21
3.1.1	D.L. à l'ordre n	21
3.1.2	Le théorème de Taylor-Young	22
3.2	Calcul de D.L.	22
3.2.1	D.L. de référence en 0	22
3.2.2	Opérations et D.L.	23
3.2.3	Comment calculer un D.L. en $x_0 \neq 0$?	24

3.3	Application à l'étude des fonctions	25
3.3.1	Calcul de limites	25
3.3.2	Position par rapport à la tangente	25
3.3.3	Asymptotes	26
4	Fonctions réciproques	27
4.1	Bijection	27
4.1.1	Définition	27
4.1.2	Bijection réciproque	28
4.1.3	Courbes représentatives	28
4.2	Cas des fonctions régulières	29
4.2.1	Fonctions continues	29
4.2.2	Fonctions dérivables	29
4.3	Fonctions racine n -ième	30
4.3.1	Cas des entiers $n \geq 1$ impairs	30
4.3.2	Cas des entiers $n \geq 1$ pairs	31
4.4	Fonctions circulaires réciproques	32
4.4.1	Les fonctions sin et cos	32
4.4.2	Les fonctions arcsin et arccos	33
4.4.3	La fonction arctan	34
5	Courbes paramétrées du plan	36
5.1	Généralités	36
5.1.1	Courbes paramétrées et courbes géométriques	36
5.1.2	Equation cartésienne d'une courbe géométrique	37
5.1.3	Courbes paramétrées en polaires	38
5.2	Vitesse et longueur	39
5.2.1	Vecteur vitesse	39
5.2.2	Tangente	40
5.2.3	Longueur d'une courbe paramétrée	40
5.3	Changement de paramètre	41

5.3.1	Plusieurs paramétrisations pour une courbe géométrique	41
5.3.2	Changement de paramètre et vitesse	42
5.3.3	Changement de paramètre et longueur	43
5.4	Comment étudier une courbe paramétrée ?	44
5.4.1	Un exemple	44
5.4.2	Plan d'étude	44
5.4.3	Un exemple en polaires	44
II	Fonctions de deux variables	46
6	Généralités	47
6.1	Introduction	47
6.1.1	Un exemple : la météo	47
6.1.2	Questions	48
6.2	Ensemble de définition, graphe	48
6.3	Lignes de niveau	50
6.4	Fonctions partielles	52
6.5	Continuité	53
7	Dérivées partielles	57
7.1	Le problème	57
7.2	Dérivées partielles	57
7.3	Développement limité à l'ordre 1	58
7.4	Dérivation composée	60
7.4.1	Composition à l'arrivée	60
7.4.2	Composition au départ	60
7.5	Application : gradient et lignes de niveau	62
7.6	Courbes implicites	64
7.6.1	Introduction	64
7.6.2	Énoncé	64
7.6.3	Exemples	65

7.7	Extrema	65
III	Intégrales	68
8	Intégrales simples	69
8.1	Aires et Intégrales	69
8.1.1	Cas des fonctions positives	69
8.1.2	Cas des fonctions de signe quelconque	71
8.1.3	Fonctions intégrables	72
8.2	Quelques propriétés	72
8.2.1	Relation de Chasles	72
8.2.2	Linéarité de l'intégrale	73
8.2.3	Intégrales et inégalités	73
8.3	Primitives et intégrales	73
8.3.1	Définition	73
8.3.2	Primitives d'une fonction continue	74
8.3.3	Primitives à connaître	74
8.4	Trois techniques de calcul	75
8.4.1	Intégration par parties	75
8.4.2	Changement de variable	75
8.4.3	Primitives de fraction rationnelles	77
8.5	Une applications géométrique : longueur d'une courbe	77

Première partie

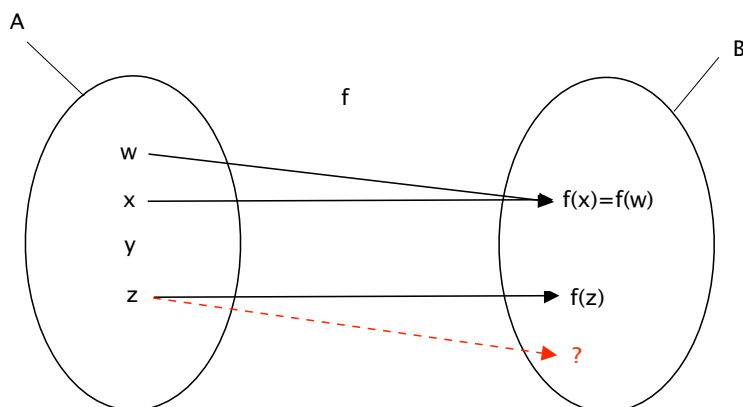
Fonctions d'une variable réelle

Chapitre 1

Continuité

1.1 Vocabulaire

Définition 1.1.1 Une fonction f de A dans B est un procédé qui, à tout élément de x de l'ensemble A , permet d'associer au plus un élément de l'ensemble B , appelé alors image de x et noté $f(x)$. Les éléments de A qui ont une image par f forment l'ensemble de définition de f , que l'on note \mathcal{D}_f .



Dans cette partie, on considèrera toujours des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , données la plupart du temps par une formule permettant de calculer $f(x)$. Dans ce cas, le domaine de définition est simplement l'ensemble des x de \mathbb{R} pour lesquels la formule a un sens. Par exemple on parlera de la fonction $f : x \mapsto 1/\sqrt{x}$, dont l'ensemble de définition est naturellement $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$. L'image du nombre réel 4 par cette fonction est $\frac{1}{2}$, et l'on dit aussi que 4 est un antécédent de $\frac{1}{2}$. Attention : un réel peut avoir plusieurs antécédents par f ; penser par exemple au cas d'une fonction périodique, comme $f : x \mapsto \sin x : 1$ a pour antécédent $\pi/2$, mais aussi $5\pi/2 \dots$

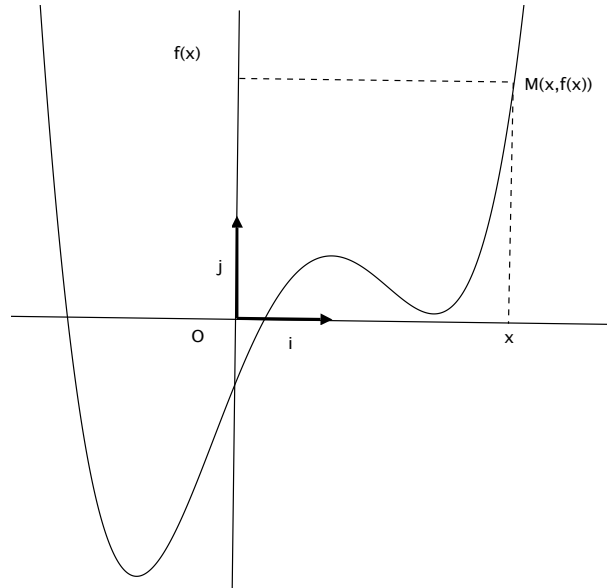
Lorsque I est une partie de \mathcal{D}_f , on note $f(I)$ l'ensemble constitué de l'image par f de chaque élément de I :

$$f(I) = \{f(x), x \in I\}.$$

Définition 1.1.2 On appelle graphe, ou courbe représentative, d'une fonction f , l'ensemble \mathcal{C}_f des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation $y = f(x)$:

$$\mathcal{C}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathcal{D}_f, y = f(x)\}.$$

On a supposé bien sûr implicitement que le plan est muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On notera que les droites verticales, d'équation $x = p$ avec $p \in \mathbb{R}$, ne peuvent couper \mathcal{C}_f qu'en un point au plus.

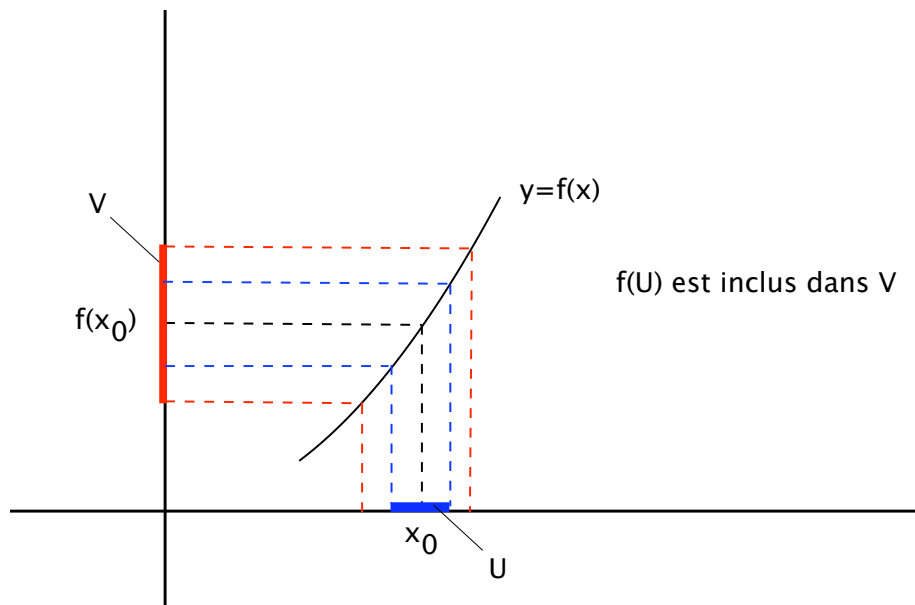


Définition 1.1.3 Soit x_0 un réel. Un voisinage de x_0 est un intervalle ouvert centré en x_0 , autrement dit un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ pour un $\alpha > 0$. Un voisinage pointé de x_0 est un voisinage de x_0 auquel on a oté le point x_0 , autrement dit un ensemble de la forme $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\} =]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[$.

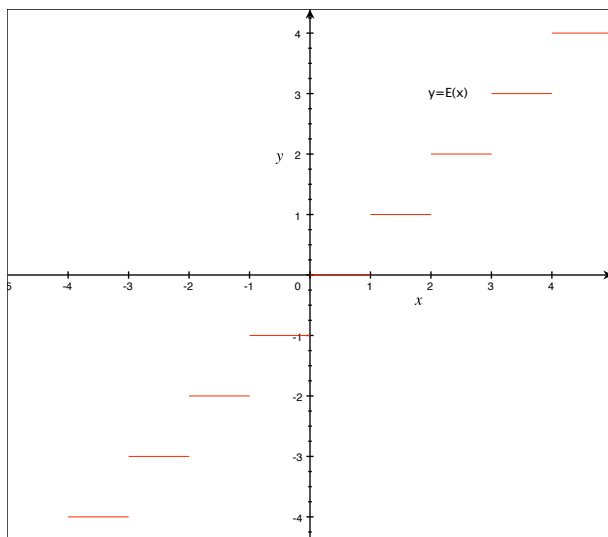
Il est commode d'employer la périphrase "cette propriété est vraie au voisinage de x_0 " pour dire "il existe un voisinage de x_0 pour tout élément duquel cette propriété est vraie". Par exemple $\sin x$ est strictement positif au voisinage de 3, puisque, en prenant par exemple pour α la moitié de la distance entre 3 et π : $\alpha = (\pi - 3)/2$, on a $\sin x > 0$ pour tout $x \in]3 - \alpha, 3 + \alpha[$.

1.2 Définitions

Définition 1.2.1 Soit f une fonction, que l'on suppose définie au voisinage de x_0 . On dit que f est continue en x_0 lorsque, pour tout voisinage V de $f(x_0)$, on peut trouver un voisinage U de x_0 tel que $f(U) \subset V$.



La fonction partie entière, définie par $E(x) = n$ si et seulement si $n \leq x < n + 1$, n'est pas continue en 0 : pour $V =]-1/2, 1/2[$ par exemple, on ne peut pas avoir $f(U) \subset V$ pour un voisinage U de $x_0 = 0$. En effet un tel voisinage U contient nécessairement des réels x tels que $-1 < x < 0$, dont l'image par la fonction partie entière est $-1 \notin V$.



La définition ci-dessus est souvent écrite sous la forme suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que : $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\implies f(x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$.

On pourra se convaincre qu'il s'agit de la même définition, en notant que la donnée d'un voisinage V de $f(x_0)$ équivaut à celle d'un $\varepsilon > 0$, et que celle d'un voisinage U de x_0 équivaut à celle d'un $\alpha > 0$.

De manière plus générale,

Définition 1.2.2 Soit f une fonction, définie dans un voisinage pointé de x_0 . On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 , où ℓ est un nombre réel, lorsque pour tout voisinage V de ℓ , il existe un voisinage pointé U de x_0 tel que $f(U) \subset V$. Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

On peut bien sûr écrire aussi cette définition avec des ε et des α :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que : $x \in]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[\implies f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Attention : dans la définition précédente, ℓ est un réel. Vous avez bien sûr déjà vu des fonctions qui tendent vers l'infini en un point x_0 . Voici la définition correspondante :

Définition 1.2.3 Soit f une fonction définie dans un voisinage pointé de x_0 . On dit que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand en x_0 lorsque, pour tout $A > 0$, il existe un voisinage pointé U de x_0 tel que $f(U) \subset]A, +\infty[$ (resp. $] - \infty, -A[$).

Avec le langage des limites, on retrouve la définition de la continuité vue en terminale :

Proposition 1.2.4 Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 . La fonction f est continue en x_0 si et seulement si

1. $f(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow x_0$,
2. cette limite est $f(x_0)$.

Attention : il n'est pas question de parler de la continuité de f en un point x_0 qui n'est pas dans son ensemble de définition, même si f peut avoir une limite en x_0 . Dans ce cas on parle de prolongement par continuité :

Définition 1.2.5 Soit f une fonction définie dans un voisinage pointé de x_0 , mais pas en x_0 . On suppose aussi que f admet une limite ℓ en x_0 . Alors la fonction \tilde{f} définie au voisinage de x_0 par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0, \\ \ell & \text{si } x = x_0, \end{cases}$$

est une fonction continue en x_0 . On dit que \tilde{f} est le prolongement par continuité de f en x_0 .

La notion suivante est particulièrement simple, mais permet de raccourcir beaucoup les énoncés.

Définition 1.2.6 On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle

1. *ouvert* $]a, b[$ lorsque f est continue en chacun des points de $]a, b[$.
2. *fermé* $[a, b]$ lorsqu'elle est continue en chaque point de $]a, b[$, continue à droite en a et à gauche en b .

1.3 Aspect pratique

Les définitions qui précèdent sont difficiles à mettre en oeuvre. Comment montrer la continuité d'une fonction ? En général on procède en deux temps :

1. On décompose la fonction en somme, produit, quotient ou composée de fonctions de référence, que l'on sait être continues sur un intervalle donné, et l'on utilise la Proposition 1.3.3 ci-dessous.
2. Pour les points x_0 qui restent (en général les extrémités d'intervalles repérés à la première étape), on calcule la limite de f en x_0 , et l'on compare avec $f(x_0)$.

On commence par la deuxième étape :

1.3.1 Comment calculer une limite ?

• Pour montrer qu'une fonction f tend vers un ℓ donné en x_0 , on essaye d'encadrer la quantité $f(x) - \ell$ par des fonctions dont on sait par avance qu'elles tendent vers 0 en x_0 . A partir des définitions ci-dessus on peut en effet établir le "théorème des gendarmes" :

Proposition 1.3.1 Soit f une fonction définie dans un voisinage pointé de x_0 . S'il existe deux fonction D et G , définies au voisinage de x_0 et telles que

1. $G(x) \leq f(x) \leq D(x)$ dans un voisinage pointé de x_0 ,
2. $G(x) \rightarrow \ell$ et $D(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow x_0$,

alors $f(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow x_0$.

Bien sûr l'utilisation de ce théorème suppose connues un certain nombre de fonctions de référence qui pourront jouer le rôle des gendarmes D et G . Pour éviter des redites, on donnera une liste de fonctions de références dans la Section 1.3.3 suivante. Il faut noter que ce théorème des gendarmes marche aussi pour les limites infinies : par exemple si l'on a $G(x) \leq f(x)$ dans un voisinage pointé de x_0 , et $G(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow x_0$, alors $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow x_0$.

• Pour calculer la limite d'une fonction f en un point, on utilise la plupart du temps les règles "limites et opérations" ci-dessous. Là encore, il s'agit de reconnaître dans l'expression $f(x)$ des sommes, des produits ou des quotients de fonctions de référence. Il faut retenir la

Proposition 1.3.2 Soit f_1 et f_2 deux fonctions définies dans un voisinage pointé de x_0 . On a alors les résultats suivants :

$\lim_{x_0} f_1$	$\lim_{x_0} f_2$	$\lim_{x_0}(f_1 + f_2)$	$\lim_{x_0}(f_1 f_2)$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 \in \mathbb{R}$	$l_1 + l_2$	$l_1 l_2$
$+\infty$	$l_2 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } l_2 > 0 \\ -\infty & \text{si } l_2 < 0 \\ ? & \text{si } l_2 = 0 \end{cases}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$?$	$-\infty$
$-\infty$	$l_2 \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } l_2 > 0 \\ +\infty & \text{si } l_2 < 0 \\ ? & \text{si } l_2 = 0 \end{cases}$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim_{x_0} f_1$	$\lim_{x_0} \frac{1}{f_1}$
$l \in \mathbb{R}, l \neq 0$	$1/l$
0	$?$
0 , et $f(x) > 0$ pour tout x	$+\infty$
0 , et $f(x) < 0$ pour tout x	$-\infty$
$+\infty$	0
$-\infty$	0

Attention : dans ces tableaux, la présence d'un $?$ signale qu'il n'y a pas de résultat général possible, et qu'il faut étudier chacune de ces formes indéterminées cas par cas. Pour "lever l'indétermination", on peut parfois se ramener à des limites connues, comme celles qui figurent dans le tableau de la Section 1.3.3 ci-dessous.

1.3.2 Comment montrer la continuité sur un intervalle ?

A partir de la Proposition 1.3.2 sur la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient, on obtient très facilement la

Proposition 1.3.3 Si f_1 et f_2 sont deux fonctions continues sur un intervalle I , alors leur somme $f_1 + f_2$ et leur produit $f_1 f_2$ sont continues sur I . Si f_2 ne s'annule pas sur I , alors leur quotient f_1/f_2 est également une fonction continue sur I .

Lorsqu'elle est bien définie, la composée de deux fonctions continues est continue. Plus précisément

Proposition 1.3.4 Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 , et g une fonction définie au voisinage de $f(x_0)$. Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

1.3.3 Limites à connaître. Fonctions continues de référence

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln x = 0 \ (a > 0)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b e^{-x} = 0 \ (b \in \mathbb{R})$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^c} = 0 \ (c \in \mathbb{R})$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^d} = +\infty \ (d \in \mathbb{R})$

fonction	domaine de définition	domaine de continuité
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
exp	\mathbb{R}	\mathbb{R}
$\sqrt{\quad}$	$[0, +\infty[$	$[0, +\infty[$
ln	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
	\mathbb{R}	\mathbb{R}
sin, cos	\mathbb{R}	\mathbb{R}
tan	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

On retiendra que dans tous les cas ci-dessus, les fonctions proposées sont continues sur leur ensemble de définition.

1.4 Théorème des valeurs intermédiaires

On se pose la question suivante : pour une fonction f , définie sur un intervalle I disons, et y un réel donné, l'équation $f(x) = y$ a-t-elle des solutions ou non ? Pour les fonctions continues, on dispose d'un critère simple, le Théorème des Valeurs Intermédiaires (T.V.I.) :

Proposition 1.4.1 T.V.I. première version. Soit f un fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Le lecteur doit se convaincre sur les dessins suivants que le fait que f est continue sur $[a, b]$ est crucial.

On notera qu'il suffit d'appliquer ce résultat à la fonction $g : x \mapsto f(x) - y$ pour répondre à la question ci-dessus dans le cas où $y \neq 0$. On peut énoncer le résultat correspondant :

Proposition 1.4.2 T.V.I. deuxième version. Soit f un fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$. Si le réel y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Il existe une autre formulation de ce Théorème des Valeurs Intermédiaires, que l'on ne peut comprendre qu'à condition d'avoir en tête une définition correcte de ce qu'est un intervalle : dire qu'une partie I de \mathbb{R} est un intervalle d'extrémités a et b , c'est dire que tout nombre compris entre a et b appartient aussi à I .

Proposition 1.4.3 T.V.I. troisième version. Soit f un fonction définie et continue sur un intervalle I d'extrémités a et b . L'image $f(I)$ de I par f est un intervalle.

Attention : dans ce résultat, rien n'est dit sur la nature (ouvert, ou fermé, ou ...) de l'intervalle image $f(I)$.

1.5 Résolution approchée d'équation : la dichotomie

On vient de se poser la question de l'existence des solutions de l'équation $f(x) = 0$. Une fois celle-ci assurée, reste la question de calculer une valeur numérique approchée de cette solution (en général on ne peut pas espérer une valeur exacte... d'ailleurs qu'est-ce qu'une valeur exacte pour un réel qui n'est pas un rationnel?)

La méthode de la dichotomie est une façon simple (mais pas très performante) de répondre a cette question : on suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, ce que l'on peut écrire $f(a)f(b) < 0$. Le principe de cette méthode est très simple. Comme son nom l'indique il s'agit de couper en deux l'intervalle $[a, b]$: on calcule $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = f(x)$. Trois possibilités se présentent : ou bien y est nul (c'est assez rare!) auquel cas x est la valeur exacte de l'équation ; ou bien y et $f(b)$ sont de même signe et la solution de l'équation se trouve dans l'intervalle $[a, x]$; ou bien y et $f(a)$ sont de même signe et la solution de l'équation se trouve dans $[x, b]$. L'intérêt de cette idée est que l'on peut alors recommencer la même procédure avec l'intervalle $[a, x]$ ou $[x, b]$ suivant le cas. A chaque fois la largeur de l'intervalle contenant la solution diminue de moitié, et l'on obtient donc un encadrement de largeur *epsilon* aussi petite que l'on veut. Voici l'algorithme correspondant :

```
Lire f,a,b,epsilon
Tant que (b-a>epsilon ou Y<>0) faire
  U=f(a)
  V=f(b)
  X=(a+b)/2
  Y=f(X)
  Si U.Y=<0 alors b=X
  Si V.Y=<0 alors a=X
Fin tant que
Afficher X
Fin
```

Il faut noter que si l'intervalle $[a, b]$ contient plusieurs solutions de l'équation, cet algorithme ne donnera une valeur approchée que de l'une d'entre elles.

Une dernière remarque pour le lecteur curieux : cette méthode permet de démontrer le T.V.I. (première forme, mais les deux autres s'en déduisent facilement). En effet on construit avec cet algorithme, par récurrence, une suite (I_n) d'intervalles fermés, emboîtés strictement les uns dans les autres ($I_{n+1} \subset I_n$). Un théorème que vous avez peut-être rencontré dit qu'une telle suite converge vers un point unique (cf. les suites adjacentes), et il est simple de montrer (par l'absurde) que le point en question est solution de l'équation $f(x) = 0$.

Chapitre 2

Dérivabilité

2.1 Nombre dérivé et fonction dérivée

Nous nous intéressons maintenant aux notions liées à la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle. Nous insistons sur l'aspect géométrique (d'ailleurs élémentaire) de ces notions en considérant comme intuitive l'idée de tangente à une courbe en un point.

Soit f une fonction définie dans un voisinage $I =]a - \alpha, a + \alpha[$ du point a , avec $\alpha > 0$. On suppose le plan muni d'un repère et on note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans ce repère.

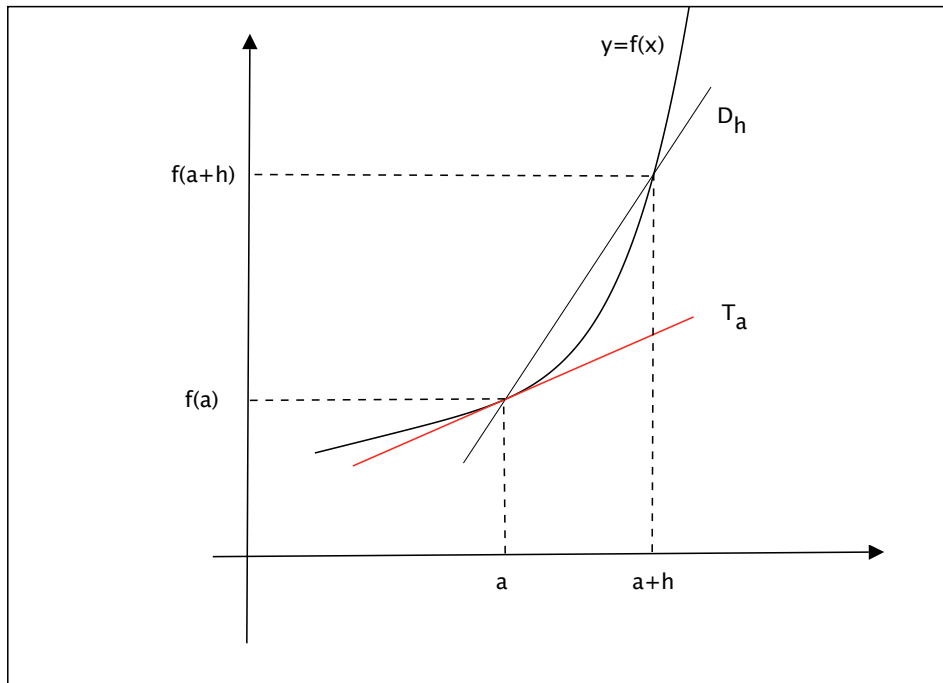
Définition 2.1.1 La fonction f est dérivable au point a si \mathcal{C}_f admet au point d'abscisse a une tangente non-verticale. Le nombre dérivé de f au point a est alors le coefficient directeur de cette droite; on le note $f'(a)$.

En traçant les sécantes à \mathcal{C}_f passant par le point d'abscisse a et les points d'abscisses $a + h$ ou $a - h$ avec $h > 0$ de plus en plus petit, comme sur la figure ci-dessous, on obtient immédiatement la

Proposition 2.1.2 La fonction f est dérivable au point a si et seulement si le *taux d'accroissement* de f en a , défini pour h dans un voisinage de 0 (pas en 0) par

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a une limite finie quand h tend vers 0, cette limite étant alors le nombre dérivé de f au point a .



Remarquons tout de suite que si f est dérivable au point a de nombre dérivée $f'(a)$, la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

La proposition suivante peut être considérée comme une définition plus facilement utilisable de la dérivabilité. Elle permet en effet de calculer rapidement des nombres dérivés. On peut y voir aussi un premier pas vers la théorie de l'approximation des fonctions :

Proposition 2.1.3 La fonction f est dérivable au point a si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon : I \mapsto \mathbb{R}$ et un réel A_1 tels que

1. $\forall h \in]-\alpha, \alpha[, f(a+h) = f(a) + A_1 h + h\varepsilon(h),$
2. $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$

Lorsque ces deux conditions sont vérifiées, on dit que f admet un Développement Limité (D.L.) à l'ordre 1 au point a . Le nombre dérivé de f en a est alors le nombre A_1 .

Preuve: Soit f une fonction dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)$ et τ_a son taux d'accroissement en ce point a . La fonction $\varepsilon(h) = \tau_a(h) - f'(a)$ et le réel $A_1 = f'(a)$ vérifient bien les deux propriétés ci-dessus. Réciproquement si ces propriétés sont vérifiées, on voit facilement que $\tau_a(h) = A_1 + \varepsilon(h)$ et donc que A_1 est bien la limite du taux d'accroissement. \square

Il est essentiel de bien comprendre les diverses interprétations de cette proposition. Elle dit en particulier que l'on peut trouver une valeur approchée de $f(x)$ en faisant comme si la fonction

f était la fonction affine $x \mapsto A(x - a) + f(a)$, et que l'erreur commise en calculant $f(x)$ de cette manière tend plus vite vers 0 que la distance entre x et a .

Exemple 2.1.4 La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en n'importe quel a de \mathbb{R} , et l'on a $f'(a) = 2a$. En utilisant la proposition 1 on voit que $\tau_a(h) = 2a + h$; avec la proposition 2 on écrit plutôt $f(a + h) = a^2 + 2ah + h^2$ et on pose $\phi(h) = h$.

Il découle tout de suite de la Proposition précédente que toute fonction dérivable au point a est nécessairement continue en ce point : le membre de droite de l'égalité (1) tend vers $f(a)$ quand $h \rightarrow 0$.

Exemple 2.1.5 Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en ce point.

Nous énonçons maintenant sans démonstration les règles usuelles de calcul de nombres dérivés. Le lecteur consciencieux utilisera plutôt la Proposition 2.2.3 ci-dessus pour prouver ces résultats.

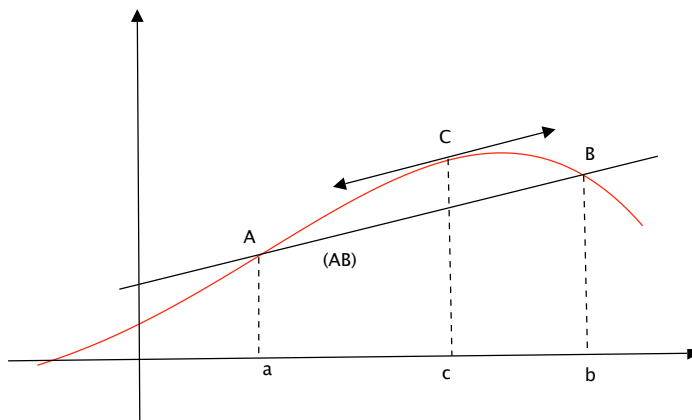
Proposition 2.1.6 Soit f et g deux fonctions dérivables au point a . Alors $f + g$, fg , f^n , $\frac{f}{g}$ (si $g(a) \neq 0$) sont dérivables au point a et l'on a

$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$	$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
$(f^n)'(a) = n f'(a) f^{n-1}(a)$	$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Définition 2.1.7 On dit que la fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ si elle est dérivable en chacun des points de I . On dit que f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$ lorsque f est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b .

Si f est dérivable sur un intervalle I on définit sur I une fonction f' appelée (*fonction*) *dérivée* de f qui associe à tout point de I le nombre dérivé de f en ce point. On dit que f est deux fois dérivable sur I si la fonction f' est dérivable sur I . On note alors f'' la dérivée de f' et l'on parle de la dérivée seconde de f ...

2.2 Les accroissements finis



Sur la figure ci-dessus, le lecteur pourra se convaincre qu'il existe un point sur la courbe \mathcal{C}_f entre A et B où la tangente à \mathcal{C}_f est parallèle à la droite (AB) . C'est un phénomène tout à fait général, qui porte le nom de Théorème des accroissements finis (T.A.F) :

Proposition 2.2.1 (Théorème des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (au moins !). Il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Voici un exemple d'utilisation de ce théorème dans une situation quotidienne : Si j'ai parcouru en voiture 50 km en une demi-heure, mon compteur a forcément indiqué à un instant donné que ma vitesse était de 100 km/h.

Remarque 2.2.2 Dans le cas où $f(a) = f(b)$, le théorème des accroissements finis dit qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ où la dérivée s'annule. Ce résultat est connu sous le nom de Théorème de Rolle.

De ce résultat découle très facilement l'inégalité des accroissements finis :

Proposition 2.2.3 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout x de $]a, b[$, $|f'(x)| \leq K$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|$$

2.3 Application à l'étude des fonctions

Voici d'abord une application de la dérivabilité à la recherche des extrema locaux d'une fonction. Rappelons qu'une fonction f admet un extremum (minimum ou maximum) local en un point x_0 s'il existe un voisinage de x_0 dans lequel $f(x_0)$ est la valeur extrémale (minimale ou maximale) atteinte par f .

Proposition 2.3.1 Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[$. Si f admet un extremum local en un point x_0 de I , alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve: Puisque f est dérivable en x_0 , on a pour tout h assez petit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\phi(h), \phi(h) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad h \rightarrow 0$$

Supposons que f admette un maximum local en x_0 . On a alors $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ pour tout h assez petit et donc $hf'(x_0) + h\phi(h) \leq 0$ ce qui pour h négatif donne $f'(x_0) + \phi(h) \leq 0$ et $f'(x_0) + \phi(h) \geq 0$ pour h positif. En passant à la limite dans ces deux inégalités on obtient bien $f'(x_0) = 0$. La démonstration est la même dans le cas d'un minimum. \square

Bien entendu la réciproque de cette proposition est fautive comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^3$, dont la dérivée s'annule en 0, sans qu'elle n'admette aucun extremum local sur \mathbb{R} .

Voici enfin une des multiples applications du théorème des accroissements finis, sous la forme d'un principe bien connu du lecteur reliant le signe de la dérivée d'une fonction à son sens de variation.

Proposition 2.3.2 Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $I =]a, b[$. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I , alors f est croissante sur I . De même si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I , alors f est décroissante sur I . De plus si la dérivée de f est strictement positive sur I alors f est strictement croissante sur I , et si la dérivée de f est strictement négative sur I alors f est strictement décroissante sur I .

Attention la réciproque de la deuxième partie de la proposition est fautive. Pensez par exemple à la fonction $x \mapsto x^3$ qui est strictement croissante sur \mathbb{R} bien que sa dérivée s'annule en 0.

Chapitre 3

Formule de Taylor et Développements Limités

On a vu que l'étude de la courbe représentative d'une fonction f au voisinage d'un point $M_0 = (x_0, f(x_0))$ pouvait être grandement simplifiée par l'utilisation de l'approximation affine de cette fonction, donnée essentiellement par le nombre dérivée de f en x_0 . De manière un peu imprécise, la courbe \mathcal{C}_f a, au voisinage de M_0 , la même allure que sa tangente, c'est-à-dire la courbe représentative de la fonction affine $T : x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Ce que l'on gagne ainsi, c'est que, en général, l'étude de la fonction T est bien plus simple que celle de la fonction f .

On se pose maintenant la question de savoir si l'on peut obtenir des renseignements plus précis sur \mathcal{C}_f en remplaçant f par une fonction peut-être plus compliquée que T , mais à peine plus : un polynôme de degré ≥ 1 .

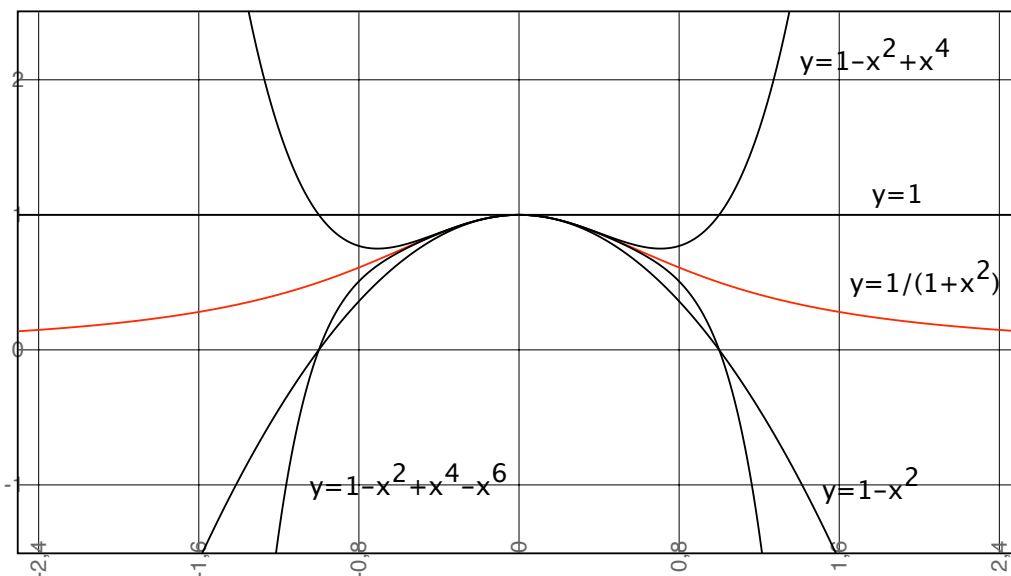
Voici un exemple instructif. En utilisant l'expression de la somme des premiers termes d'une suite géométrique, on trouve

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2n+1}}{1+x^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n} \varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. Sur la figure ci-dessous on a tracé la courbe représentative de f , et celles des polynômes $P_2(x) = 1 - x^2$, $P_4(x) = 1 - x^2 + x^4 \dots$



3.1 La formule de Taylor-Young

3.1.1 D.L. à l'ordre n

Définition 3.1.1 Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 . On dit que f admet un développement limité (D.L.) à l'ordre n en x_0 lorsqu'il existe des constantes $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction ε définie au voisinage de 0 tels que

1. $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$,
2. pour tout x dans un voisinage de x_0 on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

Le polynôme $P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$ s'appelle alors partie principale, ou partie principale du D.L.

Remarque 3.1.2 Si f admet un D.L. à l'ordre n en x_0 , celui-ci (i.e. les coefficients et la fonction ε) est unique. On peut le voir par exemple pour un D.L. à l'ordre 2 en 0...

On a déjà rencontré cette définition pour $n = 1$: On a vu que l'existence d'un D.L. à l'ordre 1 est équivalent au fait que la fonction est dérivable au point considéré. Ce n'est plus vrai pour les ordres supérieurs, comme le montre l'

Exemple 3.1.3 Soit f la fonction donnée par $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. D'abord f admet un D.L. à l'ordre 2 en 0, puisque l'on peut écrire

$$f(x) = 0 + 0.x + 0.x^2 + x^2 \varepsilon_2(x), \quad \varepsilon_2(x) = x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0.$$

Du coup f est dérivable en 0 car f admet automatiquement un D.L. à l'ordre 1 en 0 :

$$f(x) = 0 + 0.x + x\varepsilon_1(x), \quad \varepsilon_1(x) = 0.x + x\varepsilon_2(x).$$

La dérivée de f est la fonction f' définie par $f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f'(0) = 0$, et f' n'est pas dérivable en 0 : le taux d'accroissement de f' en 0 est

$$\tau(x) = 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

donc n'a pas de limite quand $x \rightarrow 0$. Au total f admet un D.L. à l'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en ce point.

3.1.2 Le théorème de Taylor-Young

Nous allons voir que la situation n'est pas si désespérée que l'exemple précédent peut le laisser croire.

Définition 3.1.4 Soit f une fonction n fois dérivable dans un voisinage de x_0 . On appelle polynôme de Taylor d'ordre n en x_0 la fonction $T_{x_0,n}$ définie par

$$T_{x_0,n}(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

Proposition 3.1.5 Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^n dans un voisinage de x_0 , alors f admet un D.L. à l'ordre n en x_0 . Sa partie principale est le polynôme de Taylor de f en x_0 à l'ordre n . Autrement dit, il existe une fonction ε qui tend vers 0 en 0 et telle que

$$f(x) = T_{x_0,n}(x) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0).$$

En TD, on se limitera la plupart du temps à des D.L. d'ordre 2. Dans ce cadre le théorème de Taylor-Young dit que, lorsque f est de classe \mathcal{C}^2 , on peut écrire

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + (x-x_0)^2 \varepsilon(x-x_0),$$

où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

3.2 Calcul de D.L.

3.2.1 D.L. de référence en 0

Voici une liste de D.L. en $x_0 = 0$, que l'on peut établir à l'aide du théorème de Taylor-Young, et qu'il est indispensable de connaître sur le bout des doigts...

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + a(a-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + a(a-1)\cdots(a-n+1)\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

3.2.2 Opérations et D.L.

Le calcul des dérivées successives d'une fonction peut-être assez pénible. Heureusement, ce n'est en général pas à partir du théorème de Taylor-Young que l'on obtient des D.L., mais plutôt à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 3.2.1 Si f_1 et f_2 sont deux fonctions qui admettent un D.L. à l'ordre n en $x_0 = 0$, de partie principale $P_1(x)$ et $P_2(x)$ respectivement, alors

1. La fonction $f_1 + f_2$ admet un D.L. à l'ordre n en 0, dont la partie principale s'obtient en ajoutant les polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$
2. La fonction $f_1 f_2$ admet un D.L. à l'ordre n en 0, dont la partie principale s'obtient en calculant le polynôme produit $Q(x) = P_1(x)P_2(x)$ et en ne gardant que les termes d'ordre $\leq n$ du polynôme $Q(x)$.

Attention! Si f_1 admet un D.L. à l'ordre 5, et f_2 un D.L. à l'ordre 3, les règles ci-dessus ne donnent rien de mieux qu'un D.L. de la somme $f_1 + f_2$ et du produit $f_1 f_2$ à l'ordre 3. Si vous écrivez des termes d'ordre 4 ou 5, l'égalité que vous donnez a de grandes chances d'être fausse.

Exemple 3.2.2 Calculer le D.L. en 0 à l'ordre 3 des fonctions $e^x + \sin x$ et $e^x \sin x$.

Voici maintenant une règle qui donne le D.L. de la composée de deux fonctions. Comme d'habitude, les hypothèses et la formule sont un peu plus difficiles pour cette opération là.

Proposition 3.2.3 Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction qui admet un D. L. en $x_0 = 0$ à l'ordre n , de partie principale $P(x)$, et $u \mapsto g(u)$ une fonction qui admet un D.L. en $f(x_0) = 0$ à l'ordre n , de partie principale $Q(u)$. Alors $x \mapsto g \circ f(x)$ admet un D.L. à l'ordre n en x_0 , dont la partie principale s'obtient en calculant $R(x) = Q(P(x))$ et en ne conservant que les termes d'ordre $\leq n$ du polynôme $R(x)$.

Exemple 3.2.4 Calculer le D.L. en 0 à l'ordre 3 de la fonction $e^{\sin x}$.

Il est utile de noter que si f ne s'annule pas en $x_0 = 0$, on peut calculer le D.L. de $1/f$ en x_0 à l'aide de cette règle de composition et du D.L. de la fonction $g : u \mapsto \frac{1}{1-u}$ vu plus haut.

Exemple 3.2.5 On veut calculer le D.L. à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On calcule d'abord le D.L. de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 3 en 0, et l'on utilisera ensuite la règle du produit.

Bien entendu $\cos(x)$ ne s'annule pas en 0, et on a $\cos(0) = 1$. On pose alors $f(x) = 1 - \cos x$, et l'on écrit

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - f(x)} = g \circ f(x),$$

avec $g : u \mapsto \frac{1}{1-u}$. La partie principale du D.L. de $f(x)$ à l'ordre 3 en 0 est $P(x) = \frac{x^2}{2}$, et celle de $g(u)$ à l'ordre 3 en $f(0) = 0$ est $Q(u) = 1 + u + u^2 + u^3$. Donc la partie principale du D.L. de $\frac{1}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 3 est

$$\{R(x)\}_3 = \left\{1 + \left(\frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^3\right\}_3 = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

(la notation $\{ \}_3$ signifie que l'on tronque le polynôme entre les $\{ \}$ à l'ordre 3.)

La partie principale du D.L. à l'ordre 3 en 0 de la fonction \sin est $S(x) = x - \frac{x^3}{6}$, donc, finalement, la partie principale du D.L. à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est

$$\left\{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\right\}_3 = x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} = x + \frac{x^3}{3}.$$

Finalement, on a

$$\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

3.2.3 Comment calculer un D.L. en $x_0 \neq 0$?

On peut bien sûr appliquer le théorème de Taylor-Young, et calculer les dérivées successives de la fonction en x_0 , ou encore faire la remarque suivante : trouver un développement limité en x_0 pour la fonction f , revient à trouver un D.L. en 0 pour la fonction $h \mapsto f(h + x_0)$. On est donc conduit à poser $x = x_0 + h$ (c'est un changement de variable!), et à chercher un D.L. en 0 de la fonction $f(h + x_0)$.

Exemple 3.2.6 On veut calculer le D.L. à l'ordre 3 en $x_0 = \pi/2$ de la fonction \sin . On pose $x = \pi/2 + h$, et on écrit

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + h^3 \varepsilon(h) = 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2} + (x - \frac{\pi}{2})^3 \varepsilon(x - \frac{\pi}{2}),$$

où ϵ est une fonction qui tend vers 0 en 0.

Attention ! Il est inutile, et même désastreux, de développer les puissances de $(x - x_0)$ dans le D.L. obtenu, puisque l'on veut connaître le comportement de $f(x)$ pour x proche de x_0 .

3.3 Application à l'étude des fonctions

3.3.1 Calcul de limites

On mentionne simplement que l'utilisation de D.L. peut être très utile pour calculer des limites dans le cas de formes indéterminées.

3.3.2 Position par rapport à la tangente

On suppose ici que f est une fonction de classe \mathcal{C}^n , avec $n \geq 2$. Grâce au théorème de Taylor-Young, on sait que f admet un D.L. à l'ordre n en x_0 , qui s'écrit

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x - x_0).$$

On sait aussi que la tangente à \mathcal{C}_f a pour équation $y = T(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$, puisque $f(x)$ s'écrit

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon_1(x - x_0),$$

avec

$$\epsilon_1(x - x_0) = a_2(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^{n-1} + (x - x_0)^{n-1}\epsilon(x - x_0).$$

Du coup, au voisinage de x_0 , on peut très facilement connaître la position de \mathcal{C}_f par rapport à sa tangente en x_0 , qui est donnée par le signe de la différence $f(x) - T(x)$. Il suffit de connaître le signe de

$$f(x) - T(x) = a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x - x_0).$$

Voici deux exemples :

- Supposons que $a_2 > 0$. On peut écrire

$$f(x) - T(x) = a_2(x - x_0)^2(1 + g(x - x_0)),$$

où $g(x - x_0)$ tend vers 0 quand $x \rightarrow x_0$. Pour x assez proche de x_0 , la quantité $(1 + g(x - x_0))$ reste proche de 1, et en particulier est positive, tout comme $(x - x_0)^2$ et a_2 : la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de sa tangente en x_0 .

- Dans le cas où $a_2 < 0$, on conclut exactement de la même manière que \mathcal{C}_f est en-dessous de sa tangente en x_0 . Il reste à considérer le cas où $a_2 = 0$.

De manière générale, notons p le plus petit entier ≥ 2 tel que $a_p \neq 0$. Si p est paire, tout se passe comme dans le cas $p = 2$. Si p est impaire, on a

$$f(x) - T(x) = a_p(x - x_0)^p(1 + g(x - x_0)),$$

avec par exemple $a_p > 0$. La quantité $(1 + g(x - x_0))$ reste proche de 1, et en particulier est positive, tout comme a_p . Par contre cette fois $(x - x_0)^p$ est positif pour $x > x_0$ et négatif pour $x < x_0$: la courbe \mathcal{C}_f est en-dessous de sa tangente en x_0 pour $x < x_0$, et au-dessus pour $x > x_0$.

Remarque 3.3.1 Pour étudier les positions relatives des courbes représentatives de deux fonctions f et g au voisinage d'un point d'abscisse x_0 donné, on peut procéder exactement comme pour f et T , c'est-à-dire calculer le D.L. en x_0 de la différence $f(x) - g(x)$, puis étudier son signe comme ci-dessus.

3.3.3 Asymptotes

Définition 3.3.2 On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ lorsque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

Pour savoir si la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$, on peut calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

et, si cette limite existe, en la notant a , on calcule ensuite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax.$$

Si cette limite b existe aussi, alors la droite $D : y = ax + b$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

On peut aussi utiliser des D.L. : on commence en posant $u = \frac{1}{x}$, et on calcule le D.L. en $u_0 = 0$ de la fonction $g(u) = \frac{f(x)}{x} = uf\left(\frac{1}{u}\right)$. Si ce D.L. commence par

$$g(u) = a + bu + u\varepsilon(u),$$

alors $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, et $D : y = ax + b$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$. D'ailleurs, pourvu qu'on ait un D.L. à un ordre suffisant, on peut étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote exactement comme ci-dessus pour la courbe et sa tangente en un point.

Chapitre 4

Fonctions réciproques

4.1 Bijection

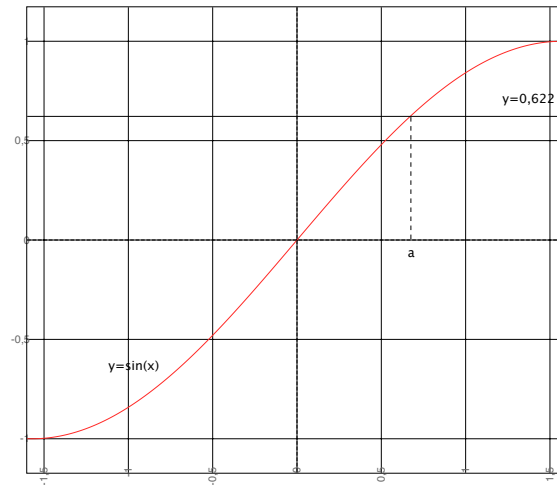
4.1.1 Définition

Définition 4.1.1 Soient A et B deux ensembles, et $f : A \rightarrow B$ une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = A$. On dit que f est une bijection lorsque pour tout élément b de l'ensemble d'arrivée B , il existe un unique élément a dans l'ensemble de départ A tel que $f(a) = b$.

Exemple 4.1.2 La fonction affine $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = mx + p$ est une bijection lorsque $m \neq 0$. En effet pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'équation $f(a) = b$ admet une unique solution $a = \frac{b-p}{m}$.

Exemple 4.1.3 La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ donnée par $f(x) = e^x$ est une bijection. On peut s'en convaincre en examinant sa courbe représentative : pour tout $b \geq 0$, la droite $y = b$ coupe cette courbe en exactement un point (a, b) . Il faut noter que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = e^x$ n'est pas une bijection : si $b < 0$, il n'existe pas de $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = b$.

Exemple 4.1.4 La fonction $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ donnée par $f(x) = \sin x$ est une bijection. Là encore, on peut s'en convaincre en examinant sa courbe représentative : pour tout $b \in [-1, 1]$, la droite $y = b$ coupe cette courbe en exactement un point (a, b) avec $a \in [-\pi/2, \pi/2]$. On doit aussi noter que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ donnée par $g(x) = \sin x$ n'est pas une bijection : pour tout $b \in [-1, 1]$, la droite $y = b$ coupe la courbe représentative de g en plus d'un point !



Nous donnerons plus loin un énoncé précis permettant de reconnaître une bijection : il va de soi que l'observation de la courbe représentative ne suffit pas...

4.1.2 Bijection réciproque

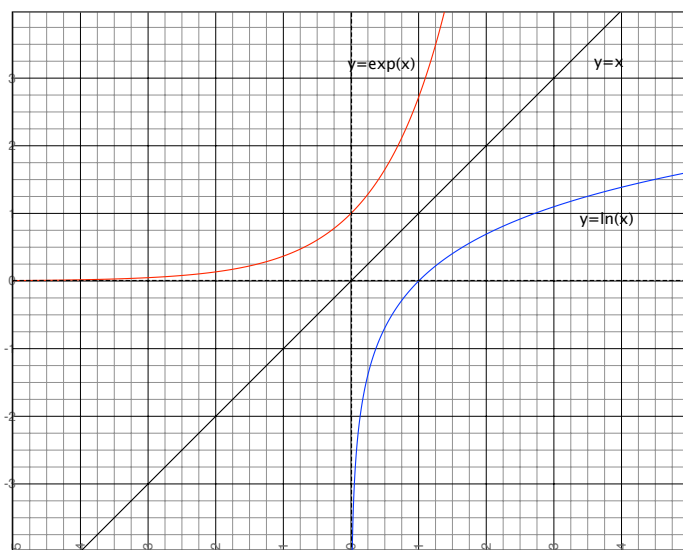
Définition 4.1.5 Soient A et B deux ensembles, et $f : A \rightarrow B$ une bijection. On appelle bijection réciproque de f la fonction qui à b dans B associe l'unique a de A tel que $f(a) = b$. Cette fonction est notée $f^{-1} : B \rightarrow A$. C'est aussi une bijection.

Exemple 4.1.6 On a vu (plutôt : on a admis) que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ donnée par $f(x) = e^x$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction qui à $b \in]0, +\infty[$ associe l'unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $e^a = b$. C'est donc la fonction $f^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f^{-1}(b) = \ln b$.

4.1.3 Courbes représentatives

On suppose maintenant que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection, dont \mathcal{C}_f est la courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Proposition 4.1.7 La courbe représentative de la bijection réciproque f^{-1} est la courbe symétrique de \mathcal{C}_f par rapport à la droite $D : y = x$ (la première bissectrice).



4.2 Cas des fonctions régulières

4.2.1 Fonctions continues

Rappelons que, d'après le T.V.I, l'image d'un intervalle I par une fonction continue sur I est un intervalle J . De ce fait, on a immédiatement la première partie de la

Proposition 4.2.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} . On note J l'intervalle $f(I)$. Si f est strictement monotone, alors $f : I \rightarrow J$ est une bijection. De plus la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est aussi continue et strictement monotone, de même monotonie que f .

Ce résultat permet de justifier les affirmations des exemples précédents! La continuité de la bijection réciproque est plus difficile à démontrer, et nous l'admettrons.

4.2.2 Fonctions dérivables

On suppose maintenant que f est une fonction continue et dérivable sur I , et que f est strictement monotone sur I . On a vu qu'il suffit pour cela que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, mais que ce n'est pas nécessaire ($f(x) = x^3 \dots$). D'après la proposition précédente $f : I \rightarrow J$ est une bijection, et f^{-1} est continue. On a mieux :

Proposition 4.2.2 Si f est une fonction continue, dérivable et f strictement monotone sur I . Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et son nombre dérivé en y_0 est donnée par

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

On peut comprendre (et même démontrer) cette formule en examinant simultanément la courbe représentative de f et celle de f^{-1} : si $m \neq 0$ est le coefficient directeur de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C}_f en x_0 , le coefficient directeur de la droite symétrique de \mathcal{T} par rapport à Δ est $1/m$.

4.3 Fonctions racine n -ième

4.3.1 Cas des entiers $n \geq 1$ impairs

Lorsque n est un entier positif impair, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^n$ est continue, dérivable et strictement croissante. Attention : il ne suffit pas pour le démontrer de calculer $f'(x) = nx^{n-1}$, puisque $f'(0) = 0$. Par contre, la dérivée étant strictement positive sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$ ($n-1$ est un entier pair), on sait que f est strictement croissante sur chacun de ces deux intervalles. Enfin puisque $f(x) < 0$ pour $x < 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) > 0$ pour $x > 0$, on voit que f est effectivement strictement croissante sur \mathbb{R} .

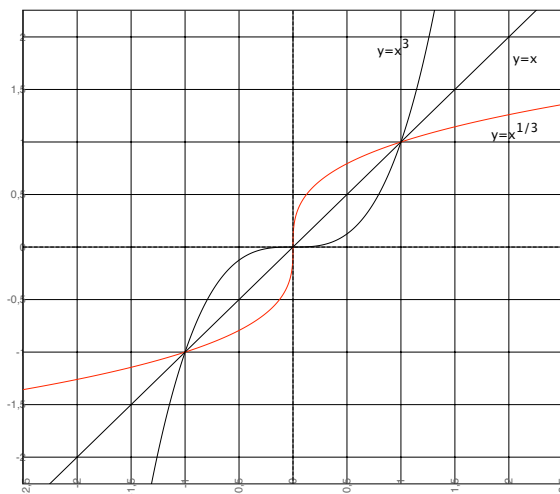
Remarque 4.3.1 La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^* =]0, +\infty[\cup] -\infty, 0[$.

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donc une bijection, et on note $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{1/n}$ sa bijection réciproque. Cette fonction est strictement croissante, et dérivable en chaque point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Son nombre dérivé en $x \neq 0$ est

$$g'(x) = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{(1-n)/n} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}.$$

Au passage on a utilisé la notation, pour p, q deux entiers naturels avec $q \neq 0$,

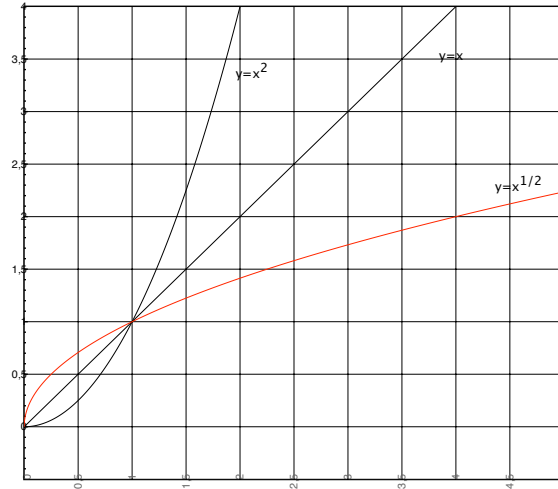
$$x^{p/q} = (x^p)^{1/q} = (x^{1/q})^p.$$



4.3.2 Cas des entiers $n \geq 1$ pairs

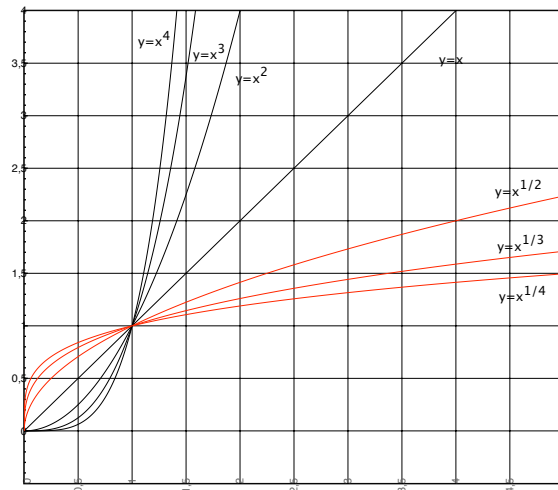
Lorsque p est pair, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^p$ n'est pas une bijection, puisqu'elle est paire. Cependant la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ donnée par $f(x) = x^p$ est continue, dérivable et strictement croissante : c'est une bijection strictement croissante. On note $g : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, $g(x) = x^{1/n}$ sa bijection réciproque. Celle-ci est dérivable sur $]0, +\infty[$, mais pas à droite en 0, et l'on a encore

$$g'(x) = \frac{1}{n} x^{1/n-1}.$$



Remarque 4.3.2 On note aussi $\sqrt[n]{x}$ le nombre $x^{1/n}$. Lorsque n est pair, cette expression n'a de sens que pour $x \geq 0$.

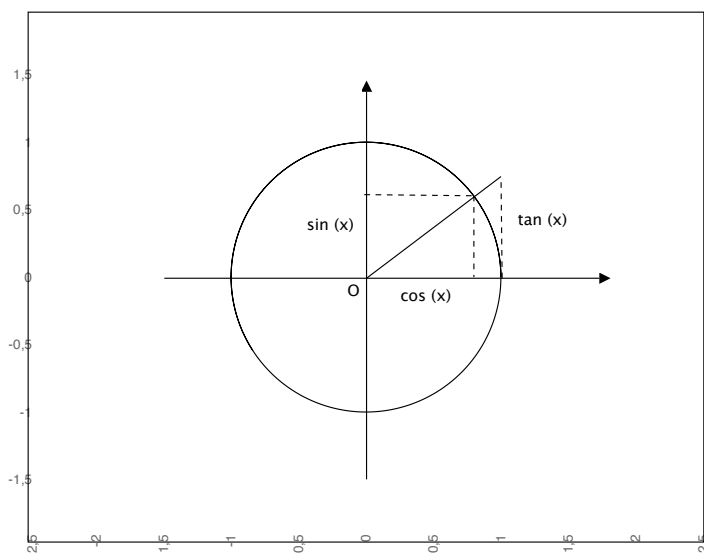
Attention à l'ordre des puissances de x pour $x \in [0, 1]$!



4.4 Fonctions circulaires réciproques

4.4.1 Les fonctions sin et cos

On commence par quelques rappels. La fonction \sin associe à un angle x exprimé en radians, l'ordonnée du point M du cercle de centre O et de rayon 1, obtenu comme intersection avec le cercle de la demi-droite d'origine O et d'angle x avec l'axe des abscisses. Le nombre $\cos x$ est l'abscisse de ce point M .



Puisque la distance OM est égale à 1, on a la relation

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

On en déduit en particulier que $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, par exemple.

On doit se souvenir des relations d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

dont découlent les formules

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

On trouvera un peu plus loin un tableau de valeurs à connaître pour ces deux fonctions.

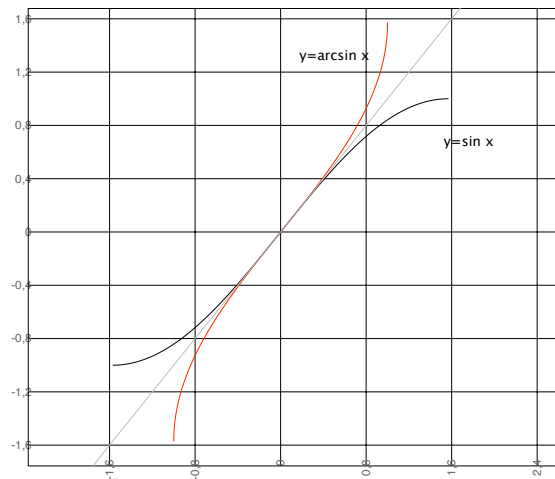
Les fonctions \sin et \cos sont \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

4.4.2 Les fonctions arcsin et arccos

La fonction \sin est strictement croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Puisqu'elle est continue sur cet intervalle, $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est une bijection, et l'on note

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

sa bijection réciproque, qui est une fonction continue, strictement croissante. On peut aussi montrer qu'elle est impaire puisque la fonction \sin l'est.



Résumons : $y = \arcsin x$ si et seulement si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin y = x$. En particulier, on a, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

mais attention,

$$\arcsin(\sin x) = x \iff x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Puisque la fonction \sin est dérivable, et que $\sin'(x) = 0$ si et seulement si $x = \pm\frac{\pi}{2}$, la fonction \arcsin est dérivable sur $] - 1, 1[= [-1, 1] \setminus \{\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})\}$. Sa dérivée est

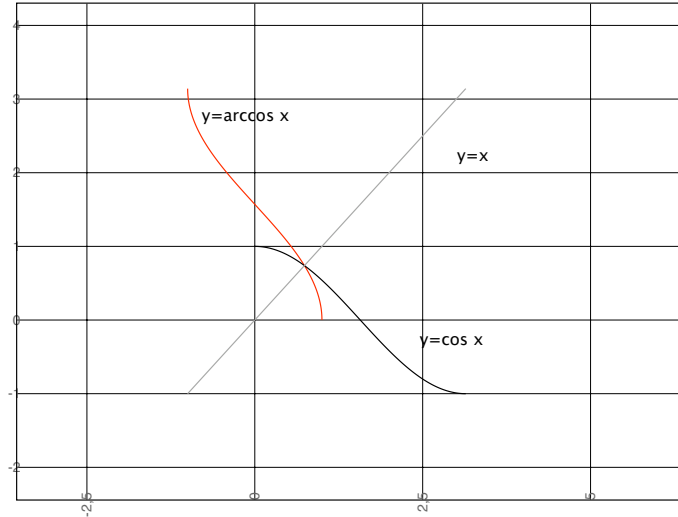
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Pour finir, voici un tableau de valeurs pour la fonction \arcsin , qui n'est rien d'autre qu'un tableau de valeurs pour la fonction \sin !

y	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\sin x$
$\arcsin y$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	x

On peut définir de la même manière la bijection réciproque de $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, qui est bien une fonction continue strictement décroissante. On la note

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$



C'est une fonction continue, strictement décroissante. Elle est dérivable sur $] - 1, 1[$ (pas à droite en -1 ni à gauche en 1), et sa dérivée est

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Puisque c'est l'opposé de la dérivée de la fonction \arcsin , on voit que la fonction $x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$ est constante sur $] - 1, 1[$, et, par continuité, sur $[-1, 1]$. On peut évaluer cette constante en prenant $x = 0$:

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

4.4.3 La fonction arctan

La fonction tangente est donnée par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Son domaine de définition est

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

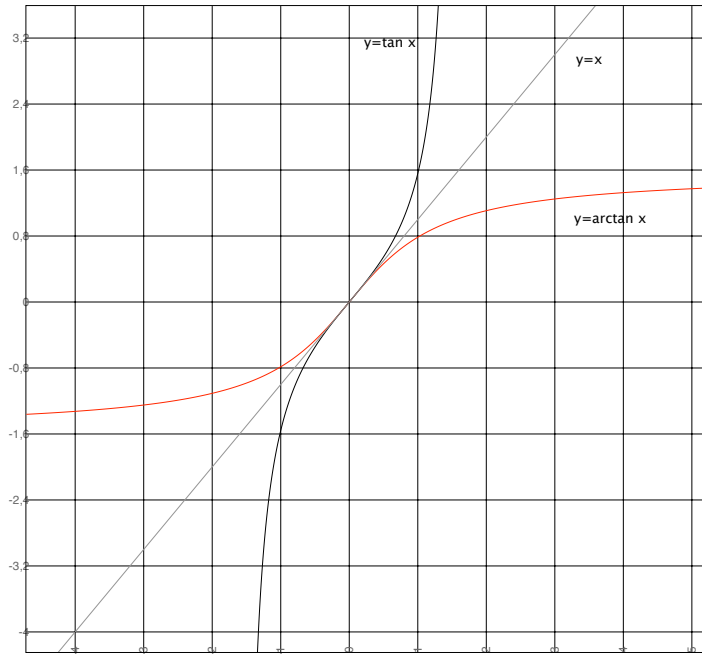
Elle est dérivable sur son ensemble de définition, et sa dérivée est

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

La fonction $\tan :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue (elle est même \mathcal{C}^∞), strictement croissante. C'est une bijection, et l'on note

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

sa bijection réciproque. C'est une fonction continue et strictement croissante.



Encore une fois, on a $y = \arctan x$ si et seulement si $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan x = y$. Du coup $\tan(\arctan x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais $\arctan(\tan x) = x$ si et seulement si $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction \arctan est dérivable sur \mathbb{R} (la dérivée de la fonction \tan ne s'annule jamais), et sa dérivée est

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Chapitre 5

Courbes paramétrées du plan

On veut maintenant être capable de décrire des courbes du plan qui ne sont pas le graphe d'une fonction. On doit avoir à l'esprit la courbe décrite par un objet (disons une bille) qui se déplace au cours du temps t sur un plan en raison des forces qui agissent sur lui : il est par exemple possible que cet objet passe plusieurs fois au même point, ce qui interdit de décrire sa trajectoire sous la forme $y = f(x)$. Plutôt qu'une bille sur un plan, ce qui peut paraître une situation abstraite, on peut avoir en tête le mouvement des planètes du système solaire autour du soleil, gouverné par les trois Lois de Kepler.

5.1 Généralités

5.1.1 Courbes paramétrées et courbes géométriques

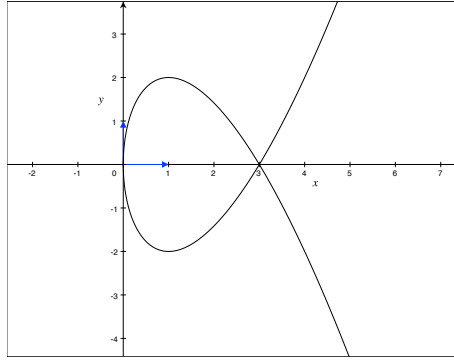
Définition 5.1.1 On appelle courbe paramétrée du plan une fonction $M : t \mapsto M(t)$ d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans le plan \mathbb{R}^2 . Lorsque $t \mapsto M(t)$ est une telle courbe paramétrée, l'ensemble \mathcal{C} des points du plan défini par

$$\mathcal{C} = \{M(t), t \in I\}$$

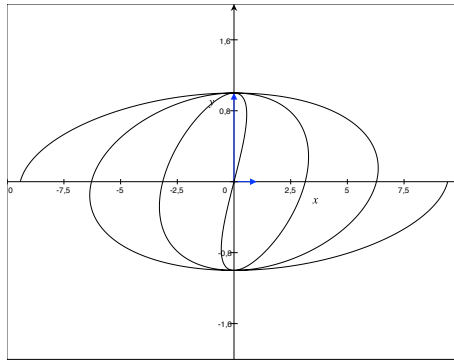
est la courbe (on dit aussi courbe géométrique) associée.

La première loi de Kepler dit que la courbe géométrique tracée dans le plan de l'ecliptique par la terre est une ellipse, mais elle ne dit pas comment cette trajectoire est décrite. Les deux autres lois permettent de retrouver la paramétrisation de cette ellipse correspondant au mouvement de la terre.

Exemple 5.1.2 Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère du plan. La fonction $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui à t associe le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ données par $x(t) = t^2$ et $y(t) = t^3 - 3t$ est une courbe paramétrée, et sa courbe (géométrique) associée est la suivante :



Exemple 5.1.3 Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère du plan. La fonction $M :] - 3\pi, 3\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ qui à $\theta \in] - 3\pi, 3\pi[$ associe le point $M(\theta)$ de coordonnées $(\theta \cos \theta, \sin \theta)$ est une courbe paramétrée du plan. La courbe associée est



Les courbes des exemples précédents ne sont pas le graphe d'une fonction. Par contre on peut toujours écrire le graphe d'une fonction f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) comme la courbe paramétrée $t \mapsto (t, f(t))$.

Remarque 5.1.4 Dans ce qui suit, les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} rencontrées seront toujours supposées régulières, c'est-à-dire de classe C^n avec n aussi grand que nécessaire.

5.1.2 Equation cartésienne d'une courbe géométrique

Exemple 5.1.5 La droite (AB) a pour équation cartésienne

$$(y_B - y_A)(x - x_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0.$$

C'est aussi la courbe géométrique associée à la courbe paramétrée

$$M(t) = (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)),$$

ou encore, s'il ne s'agit pas d'une droite verticale, à $N(s) = (s, ms + p)$, avec $m = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}$.

Soit M une courbe paramétrée donnée par $M(t) = (x(t), y(t))$. Il peut arriver que l'on puisse éliminer le paramètre t dans une expression algébrique construite à partir de $x(t)$ et $y(t)$. Par exemple si $M(t) = (a \cos t, b \sin t)$, avec $a, b > 0$, on voit que, pour tout t ,

$$\frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} = 1.$$

Autrement dit, la courbe géométrique correspondante est incluse dans

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

Réciproquement, on peut se convaincre (...) que si la courbe paramétrée est définie sur un intervalle de longueur 2π , tous les points de \mathcal{E} s'écrivent $(x(t), y(t))$ pour une certaine valeur de t . La courbe géométrique correspondant à la courbe paramétrée M est donc entièrement déterminée par son équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

mais on a vu sur l'exemple précédent qu'une équation cartésienne peut correspondre à de nombreuses courbes paramétrées.

5.1.3 Courbes paramétrées en polaires

Rappelons que les coordonnées polaires d'un point M du plan, de coordonnées (x, y) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) sont les nombres $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, où ρ est la distance entre O et M , et $\theta \in [0, 2\pi[$ est l'angle entre la demi-droite $[O, x)$ et la demi-droite $[O, M)$. Autrement dit on a les relations

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

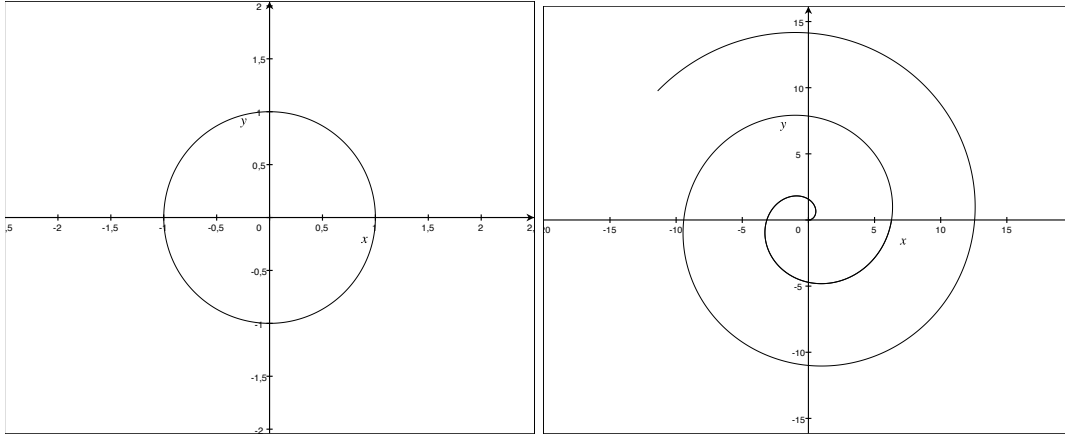
Attention : le point O origine du repère n'admet pas de coordonnées polaires.

Il est parfois commode de décrire une courbe du plan en coordonnées polaires, par une relation du type $\rho = f(\theta)$. Il s'agit alors de la courbe paramétrée par

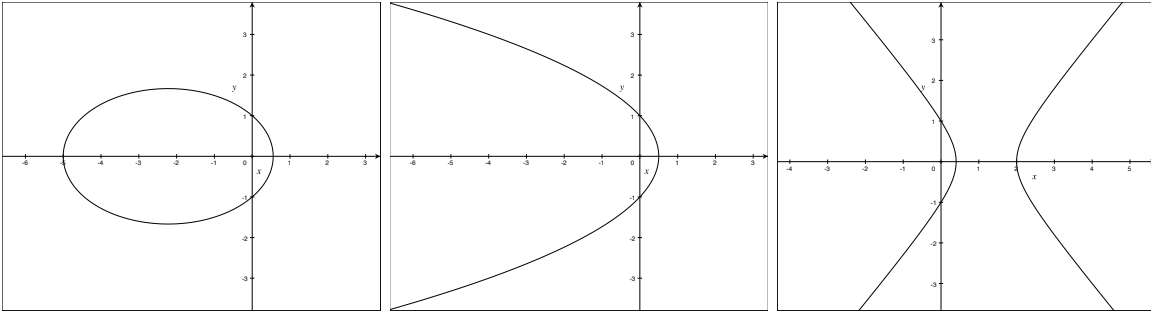
$$\begin{cases} x(\theta) = f(\theta) \cos \theta, \\ y(\theta) = f(\theta) \sin \theta. \end{cases}$$

On prendra garde à ne pas confondre cette écriture $\rho = f(\theta)$ avec l'écriture habituelle $y = f(x)$ du graphe d'une fonction f . Dans le plan (O, x, y) , la courbe $\rho = f(\theta)$ n'est en général pas le graphe d'une fonction.

Exemple 5.1.6 *La courbe paramétrée définie en polaire par $\rho = 1$ (autrement dit $\rho = f(\theta)$ où f est la fonction constante 1), est le cercle de centre O et de rayon 1. Celle définie par $\rho = \theta$ est une spirale*



Exemple 5.1.7 La courbe paramétrée définie en polaire par $\rho = \frac{1}{1 + a \cos \theta}$ est une ellipse pour $0 \leq a < 1$, une parabole pour $a = 1$ et une hyperbole pour $a > 1$.



5.2 Vitesse et longueur

5.2.1 Vecteur vitesse

On reprend l'analogie avec le déplacement d'un mobile sur un plan. On suppose que le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Définition 5.2.1 Soit $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, où $M(t)$ est le point de coordonnées $(x(t), y(t))$. On appelle vecteur vitesse (instantanée) à l'instant $t \in I$ le vecteur $\vec{v}(t)$ de coordonnées $(x'(t), y'(t))$. On le note parfois

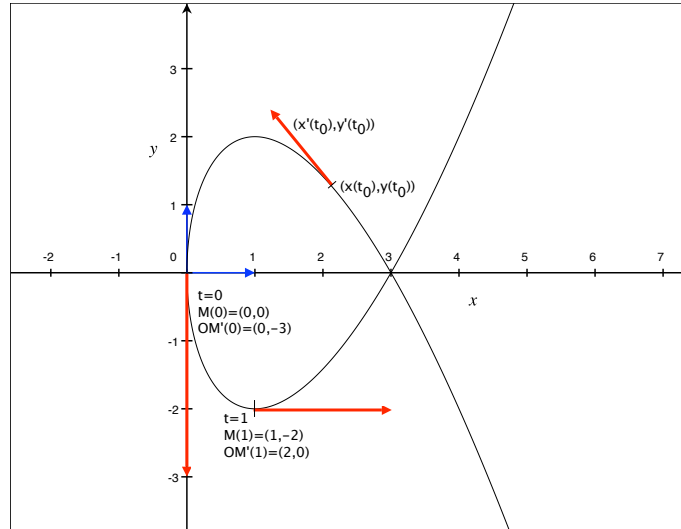
$$\vec{v}(t) = \overrightarrow{OM}'(t) = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}(t).$$

La norme du vecteur $\vec{v}(t)$ est appelée vitesse instantanée au point t : c'est le réel $v(t)$ donné par

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Exemple 5.2.2 On reprend la courbe paramétrée de l'Exemple 5.1.2 : $M(t) = (t^2, t^3 - 3t)$. le vecteur vitesse à l'instant t est $\vec{v}(t) = (2t, 3t^2 - 3)$. La vitesse à l'instant t est donc

$$v(t) = \sqrt{(2t)^2 + (t^3 - 3t)^2}.$$



5.2.2 Tangente

Définition 5.2.3 Soit $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée. On suppose que $M(t) = (x(t), y(t))$ avec des fonctions x et y de classe \mathcal{C}^1 . Si $\overrightarrow{OM}'(t_0) \neq \vec{0}$, la tangente au point $M(t_0)$ de paramètre t_0 est la courbe paramétrée $s \mapsto M(t_0) + s \cdot \overrightarrow{OM}'(t_0)$. La courbe géométrique correspondante est la droite passant par $M(t_0)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{OM}'(t_0)$.

Si $M(t) = (x(t), y(t))$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la tangente au point $M(t_0)$ est la courbe paramétrée $T : s \mapsto T(s) = (X(s), Y(s))$ avec

$$\begin{cases} X(s) = x(t_0) + sx'(t_0), \\ Y(s) = y(t_0) + sy'(t_0). \end{cases}$$

Comme pour les graphes de fonction, la tangente fournit une approximation de la courbe :

Proposition 5.2.4 Soit $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, et $T_0 : s \mapsto T_0(s)$ sa tangente au point $M_0 = M(t_0)$. Il existe une fonction $\vec{\epsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\epsilon}(s) = (\epsilon_1(s), \epsilon_2(s))$, telle que

1. $\epsilon_1(s) \rightarrow 0$ et $\epsilon_2(s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$,
2. $M(t) = M(t_0) + (t - t_0)\overrightarrow{OM}'(t_0) + (t - t_0)\vec{\epsilon}(t - t_0) = T_0(t - t_0) + (t - t_0)\vec{\epsilon}(t - t_0)$.

Comme dans le cas des fonctions, on dit que l'expression ci-dessus est un Développement Limité de la courbe à l'ordre 1 au point $M(t_0)$... ce qui peut vous amener à imaginer un D.L. à un ordre plus élevé pour une courbe. Nous n'évoquerons pas cet aspect ici.

5.2.3 Longueur d'une courbe paramétrée

Définition 5.2.5 La longueur d'une courbe paramétrée $M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est le réel (positif)

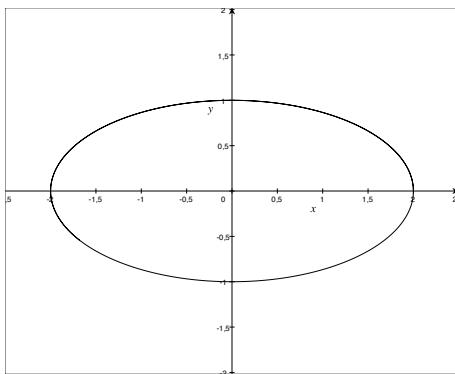
$$L = \int_a^b \|\overrightarrow{OM}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

On peut comprendre cette définition en lisant l'intégrale du membre de droite comme une somme de longueur de déplacements très petits sur des segments tangents à la courbe.

Exemple 5.2.6 La courbe géométrique associée à la courbe paramétrée $M(t) = (a \cos t, b \sin t)$ avec $a, b > 0$, est une ellipse. On la décrit entièrement en prenant $t \in [0, 2\pi[$. Sa longueur est donc

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt,$$

ce qu'il n'est pas facile de calculer ! Dans le cas où $a = b$, on a affaire à un cercle de rayon a , et l'intégrale ci-dessus donne bien $L = 2\pi a$.



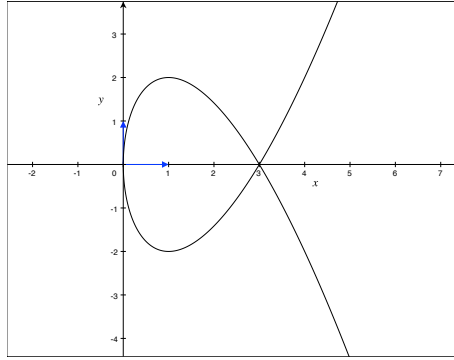
Il serait penible que la longueur d'une courbe géométrique dépende de la façon dont on la paramètre. On va voir dans la section suivante que ce n'est pas le cas.

5.3 Changement de paramètre

5.3.1 Plusieurs paramétrisations pour une courbe géométrique

La distinction entre courbe paramétrée et courbe est réellement utile, puisqu'une courbe donnée peut correspondre à de nombreuses courbes paramétrées : on peut facilement imaginer des mobiles qui décrivent la même trajectoire mais en se déplaçant avec des vitesses différentes.

Exemple 5.3.1 La fonction $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui à s associe le point $N(s)$ de coordonnées $(x(s), y(s))$ données par $x(s) = s^6 + 2s^3 + 1$ et $y(s) = s^9 + 3s^6 - 2$ est une courbe paramétrée, et sa courbe associée est la même que celle de l'Exemple 5.1.2 ci-dessus.



On comprend que si l'on n'est intéressé que par la courbe géométrique, on choisira une paramétrisation la plus simple possible. Voici comment passer d'une paramétrisation à une autre :

Proposition 5.3.2 Soit $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée, et $t : J \rightarrow I$ une bijection. Si N est la courbe paramétrée $N : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par changement de paramètre $N(s) = M(t(s))$, les courbes géométriques correspondant à M et N sont identiques.

Exemple 5.3.3 On obtient la courbe paramétrée de l'Exemple 5.3.1 en effectuant le changement de paramètre $t(s) = (s^3 + 1)$ dans celle de l'Exemple 5.1.2.

5.3.2 Changement de paramètre et vitesse

Pour une courbe géométrique donnée, la notion de vecteur vitesse instantané n'a pas de sens : encore une fois, il faut penser à deux mobiles qui se déplacent sur la même trajectoire avec des vitesses différentes. Pourtant pour une courbe géométrique "régulière" on peut certainement parler de droite tangente en chacun de ses points : autrement dit la direction du vecteur vitesse, elle, ne doit pas dépendre de la paramétrisation choisie.

C'est en effet le cas : si $N(s) = (a(s), b(s))$ et $N(s) = M(t(s))$ avec $M(t) = (x(t), y(t))$, alors $a'(s) = x'(t(s)).t'(s)$ et $b'(s) = y'(t(s)).t'(s)$, donc

$$\overrightarrow{ON}'(s) = t'(s). \overrightarrow{OM}'(t(s)),$$

ce qui montre que les vecteurs vitesses instantanés calculés dans chacune des paramétrisations sont colinéaires.

On vient de voir que la norme du vecteur vitesse instantané dépend de la paramétrisation choisie. Une façon de simplifier l'étude d'une courbe géométrique est de trouver, si c'est possible, une paramétrisation pour laquelle la norme de ce vecteur est constante, et tant qu'à faire, égale à 1.

Définition 5.3.4 On dit que la courbe paramétrée $s \mapsto N(s)$ est paramétrée par son abscisse curviligne lorsque, pour tout s , on a $\|\overrightarrow{ON}'(s)\| = 1$.

Il faut noter que si une courbe $N : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est paramétrée par son abscisse curviligne, sa longueur est tout simplement

$$L = \int_a^b \|\overrightarrow{ON}'(s)\| ds = b - a.$$

Reste une question : si $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par $t \mapsto M(t)$, peut-on trouver une telle paramétrisation ? La réponse est positive si, pour tout $t \in I$, on a $\overrightarrow{OM}'(t) \neq \vec{0}$: Soit en effet s une fonction définie sur I telle que

$$s'(t) = \|\overrightarrow{OM}'(t)\|.$$

Puisque $s'(t) > 0$, la fonction s est une bijection strictement croissante de I sur un intervalle J . Soit alors $N : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par $N(s) = M(t)$, où $s = s(t)$. On a

$$\overrightarrow{OM}'(t) = s'(t)\overrightarrow{ON}'(s) = \|\overrightarrow{OM}'(t)\| \overrightarrow{ON}'(s),$$

donc $\|\overrightarrow{ON}'(s)\| = 1$.

5.3.3 Changement de paramètre et longueur

Voilà maintenant une réponse satisfaisante à une question naturelle : la longueur d'une courbe paramétrée ne dépend pas du choix de la paramétrisation. Ce résultat repose sur la formule suivante, dite du changement de variable dans les intégrales :

Proposition 5.3.5 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et $u : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ une bijection croissante de classe \mathcal{C}^1 . On a

$$\int_a^b f(u) du = \int_\alpha^\beta f(u(x))u'(x)dx.$$

Appliquons ce résultat pour calculer la longueur d'une courbe $M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si $t : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ est une bijection strictement croissante et de classe \mathcal{C}^1 , et $N : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par $N(s) = M(t)$, on a par définition,

$$L = \int_\alpha^\beta \|\overrightarrow{ON}'(s)\| ds.$$

Mais on a vu que $\overrightarrow{ON}'(s) = t'(s).\overrightarrow{OM}'(t(s))$, donc

$$L = \int_\alpha^\beta \|\overrightarrow{OM}'(t(s))\|t'(s)ds,$$

Grâce à la formule de changement de variable, on a donc aussi

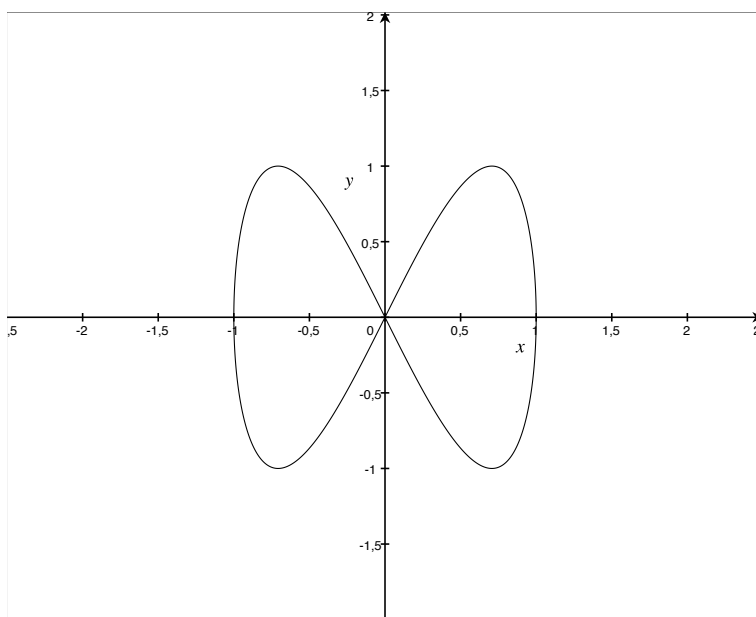
$$L = \int_a^b \|\overrightarrow{OM}'(t)\|dt.$$

5.4 Comment étudier une courbe paramétrée ?

On veut maintenant être capable d'obtenir les tracés présentés jusque là sans recours à un outil informatique.

5.4.1 Un exemple

Etude de la courbe $M(t) = (\sin t, \sin 2t)$.

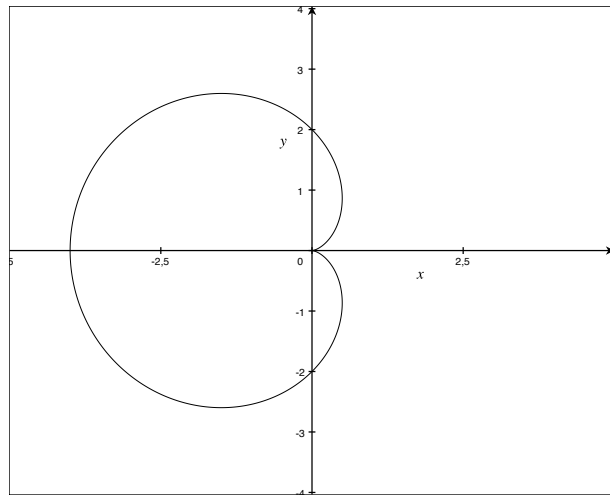


5.4.2 Plan d'étude

1. Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité...
2. Réduction de l'intervalle d'étude (périodicité, parité,...)
3. Tableau de variation conjoint, y compris limite si nécessaire.
4. Tracé de quelques points remarquables, et de la tangente à la courbe en ces points.
5. Tracé de la courbe.

5.4.3 Un exemple en polaires

Etude de la courbe $\rho = 2(1 - \cos \theta)$.



Deuxième partie

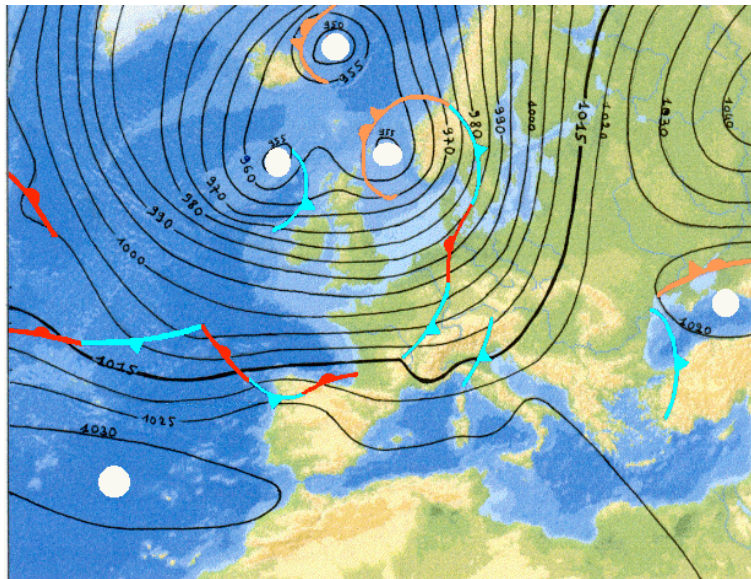
Fonctions de deux variables

Chapitre 6

Généralités

6.1 Introduction

6.1.1 Un exemple : la météo



Les fonctions sont utilisées pour modéliser certains phénomènes naturels ; mais pour cela les fonctions d'une variable ne suffisent pas, on a souvent besoin de fonctions de plusieurs variables.

Si vous voulez faire décrire le temps qu'il fait, à un moment donnée, en Europe, vous allez modéliser la pression et la température par des fonctions de deux variables : grandeur $P(x, y)$ ou $T(x, y)$ qui varie en fonction du point (x, y) (par exemple, x représente longitude et y la latitude).

Bien sûr, si vous voulez être plus précis, il faudra introduire la variable altitude ; si vous voulez décrire l'évolution de P et T au cours du temps, vous aurez besoin d'une quatrième variable,

et P et T seront des fonctions de (x, y, z, t) . On va commencer par étudier les fonctions qui dépendent juste de deux variables.

6.1.2 Questions

Par rapport aux fonctions d'une variable, qu'est-ce qui change, qu'est-ce qui reste pareil ?

- domaine de définition ;
- représentation graphique ;
- Continuité, limite ;
- fonction dérivée ? Sens, tableau de variation ??
- calcul différentiel (notion de *dérivée partielle*) ;
- tangente ??
- DLs...

6.2 Ensemble de définition, graphe

Notation : \mathbb{R}^2 , ensemble des couples de réels. L'ordre a de l'importance : $(x, y) \neq (y, x)$. Géométriquement, on représente \mathbb{R}^2 par un plan muni d'un repère (O, i, j) .

De même, \mathbb{R}^3 est l'ensemble des triplets de réels, on le représente par l'espace (à trois dimension) muni d'un repère (O, i, j, k) .

On dira indifféremment "Soit M le point du plan de coordonnées (x, y) " ou bien "Soit $M = (x, y)$ ".

Définition 6.2.1 (fonction) *Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 . Une fonction définie sur E et à valeurs dans \mathbb{R} fait correspondre, à tout élément (x, y) de E , un unique élément $f(x, y)$ dans \mathbb{R} . L'ensemble E est appelé ensemble de définition de f .*

Comme en une variable, une fonction est souvent donnée par une formule.

Exemple :

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ est une fonction définie sur \mathbb{R}^2 tout entier.
2. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ est une fonction définie pour $x \neq 0$, c-à-d en dehors d'une droite.

Définition 6.2.2 (graphe) *Soit f une fonction de deux variables, \mathcal{D}_f son ensemble de définition. On appelle graphe de f , ou surface représentative de f , l'ensemble des points (x, y, z) de l'espace \mathbb{R}^3 qui vérifient la relation $z = f(x, y)$.*

– Se rappeler comment on faisait en une variable (pour chaque x sur son axe, on s'élève d'une hauteur $y = f(x)$). Remarquer que l'axe des 'x' est la droite d'équation $y = 0$.

– En deux variables : pour chaque point (x, y) sur le plan des variables, on s'élève d'une hauteur $z = f(x, y)$.

Exemple de graphes (I) : fonctions affines

Comme en une variable, les fonctions de deux variables les plus simples sont les *fonctions affines*

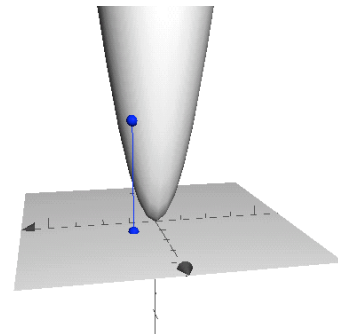
$$(x, y) \mapsto ax + by + c$$

où a, b, c sont des constantes. Leur graphes sont des plans. Réciproquement, tout plan (non vertical) est le graphe d'une fonction affine. Ci-dessous, les graphes des fonctions $f_1(x, y) = x + y$ et $f_2(x, y) = -2x + y + 2$.



Exemple de graphe (II) : $x^2 + y^2$

La figure ci-contre montre une portion du graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ (“paraboloïde à une nappe”). Sur la figure, on a dessiné le plan (Oxy) (“plan des variables”); au dessus de chaque point (x, y) dans ce plan, on place le point de hauteur $z = f(x, y)$. Autrement dit, si on imagine que le graphe est le dessin d'un relief, la fonction f est la fonction altitude (x, y étant latitude et longitude). Le plan (Oxy) est le plan d'altitude $z = 0$, graphe de la fonction $(x, y) \mapsto 0$; pour une carte du relief, il correspond au niveau de la mer.

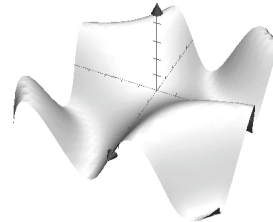
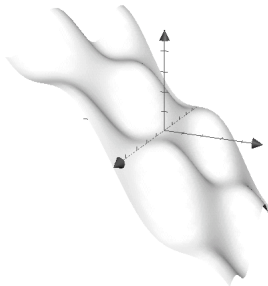
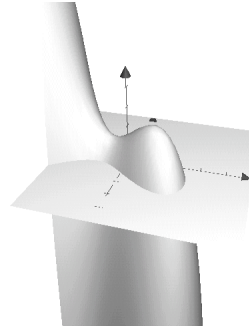
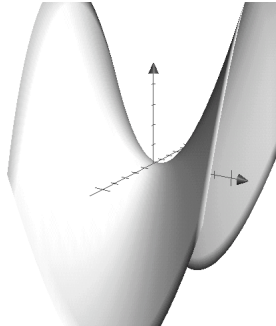


Exemple de graphes (III)

Les figures ci-dessous représente successivement

- la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ (selle de cheval, ou col de montagne ou hyperboloïde à une nappe);
- la fonction $f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$ (une presque ile avec une montagne, et la mer d'équation $z = 0$);

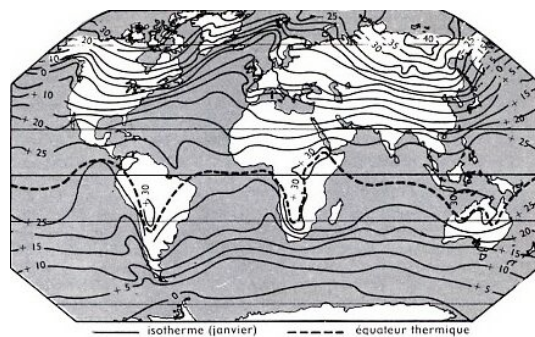
- la fonction $f(x, y) = \sin(x) \sin(y) - y$ (un champ de bosse) ;
- la fonction $f(x, y) = \sin(xy)$.



6.3 Lignes de niveau

Le graphe est beaucoup plus difficile à tracer que pour les fonctions d'une variable : difficulté du dessin, et surtout, pas de notion équivalente au tableau de variation des fonctions d'une variable. C'est pourquoi on utilise souvent d'autres modes de représentation graphique. Par exemple, la carte de la première page offre une représentation graphique d'une fonction pression $P(x, y)$; on a dessiné des *isobares* : un isobare est une courbe sur laquelle f est constante.

Ce type de représentation est très utilisé ; par exemple, pour la température, on trace les isothermes, courbes sur lesquelles la température est constante. Pour les cartes géographiques représentant le relief, à la place d'une carte en trois dimensions (pas pratique à plier), on trace les courbes d'altitude constante.



Définition 6.3.1 (Lignes de niveau) Soit f une fonction de deux variables, et h un nombre réel. On appelle ligne de niveau de f de hauteur h l'ensemble des points (x, y) du plan (Oxy) en lesquels f prend la valeur h :

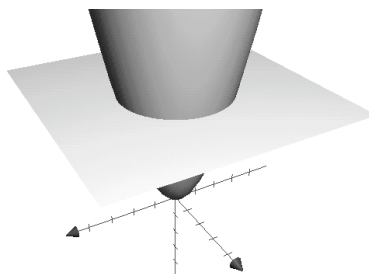
$$L_h = \{(x, y) \text{ tels que } f(x, y) = h\}.$$

Exemple Quelles sont les lignes de niveau de la fonction $x^2 + y^2$? Analytiquement, c'est facile... Ligne de niveau de hauteur 1? 2? 0?...

Lien avec le graphe Le plan horizontal d'altitude h est le plan d'équation $z = h$; la ligne de niveau de hauteur h est donc la trace du graphe de f sur ce plan [projetée dans le plan (Oxy)].

Soit h une hauteur donnée. Dans le plan horizontal d'équation $z = h$, muni des coordonnées (x, y) , la ligne de niveau de hauteur h est la trace du graphe de f .

Ci-dessous, le parabolôïde et le plan $z = 5$.



6.4 Fonctions partielles

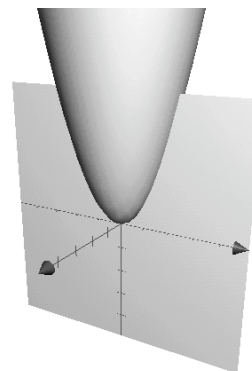
Beaucoup de problèmes concernant les fonctions de plusieurs variables peuvent se ramener à des problèmes concernant les fonctions d'une seule variable. pour cela, on utilise les *fonctions partielles*, qui sont obtenues en fixant la valeur de l'une des variables.

Soit f une fonction de deux variables, et (x_0, y_0) un point du domaine de définition de f .

Définition 6.4.1 (Fonctions partielles) On appelle fonctions partielles au point (x_0, y_0) les deux fonctions

$$f_1 : x \mapsto f(x, y_0) \quad \text{et} \quad f_2 : y \mapsto f(x_0, y)$$

Exemple Si l'on reprend notre fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$, qu'on se place au point $(0, 0)$, la première fonction partielle est $x \mapsto f(x, 0) = x^2$ (on a fixé $y = 0$) : son graphe est une parabole, d'équation $z = x^2$ dans le plan (Oxz) . Où voit-on cette parabole sur le dessin représentant le graphe de f ? Fixer $y = 0$ revient à se placer dans le plan vertical (Oxz) (plan d'équation $y = 0$, justement).



Dans le plan vertical d'équation $y = 0$, muni des coordonnées (x, z) , le graphe de la fonction partielle $z = f(x, 0)$ est la trace du graphe de f .

Test Donner les fonctions partielles de $f(x, y) = x^2 + y^2$ au point $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Un danger

Attention, bien savoir dans quel cadre on se situe :

- le dessin du graphe de f est un dessin dans l'espace (dimension 3) muni des coordonnées (x, y, z) ;
- le dessin des lignes de niveau se situe dans le plan horizontal muni des coordonnées (x, y) ;
- le dessin du graphe d'une fonction partielle est un dessin dans un plan vertical (x, z) ou (y, z) .

Pour chacun des objets graphiques qu'on va introduire, ne pas se tromper de cadre !

6.5 Continuité

D'un point de vue pratique, rien de vraiment nouveau par rapport aux fonctions d'une variable.

Définition

Pour définir la continuité, on s'inspire de ce qu'on a fait en une variable : une fonction est continue en un point M_0 si, à condition de choisir M assez proche de M_0 , le nombre $f(M)$ est proche de $f(M_0)$. Pour écrire ça proprement, il faut utiliser la distance euclidienne dans le plan.

Définition 6.5.1 (distance euclidienne) Soient M et M' deux points du plan, de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') . La distance euclidienne de M à M' est alors donnée par la formule

$$d(M, M') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

La norme d'un vecteur (x, y) est par définition la distance euclidienne de (x, y) à 0 :

$$\|(x, y)\| = d((x, y), 0) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On peut maintenant préciser notre définition :

Définition 6.5.2 (continuité) Soit f une fonction de deux variables, et $M_0 = (x_0, y_0)$ un point du domaine de définition D_f . On dira que f est continue au point M_0 si pour toute

précision $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point M , si $d(M, M_0) < \delta$, le nombre $f(M)$ est dans l'intervalle $]f(M_0 - \varepsilon), f(M_0 + \varepsilon)[$.

Opérations

Théoreme 6.5.3 *La somme, le produit de deux fonctions continues sont des fonctions continues ; le quotient d'une fonction continue par une fonction continue qui ne s'annule pas est une fonction continue. La composée de deux fonctions continues est continue.*

En particulier : les fonctions polynômes, les fonctions fractions rationnelles en deux variables sont continues sur leur ensemble de définition. Comme d'habitude, la composition pose problème (compatibilité des ensembles de départ et d'arrivée).

Intermède : un peu de géométrie dans le plan et l'espace

Géométrie dans \mathbb{R}^2

Si on se donne deux vecteurs $\vec{u}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2)$ dans le plan, on peut définir leur *produit scalaire* par la formule très simple

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

La *longueur* d'un vecteur (on dit aussi sa *norme*) est alors définie par la formule

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Il y a aussi une autre formule pour le produit scalaire : on a

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\| \cos \alpha$$

où α est l'angle entre les deux vecteurs. Un des intérêts de cette formule est qu'elle permet de voir quand le produit scalaire s'annule : on a (si aucun des deux vecteurs n'est nul)

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 &\Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ (modulo } \pi) \\ &\Leftrightarrow \text{les deux vecteurs sont orthogonaux.} \end{aligned}$$

Bilan : la première formule permet de calculer très facilement le produit scalaire de deux vecteurs quand on a leurs coordonnées ; la deuxième permet de dire que si le produit scalaire est nul, alors les vecteurs sont orthogonaux.

Pour le mathématicien, ce qui précède n'a pas de sens : on n'a pas défini clairement ce qu'était l'angle α , ni ce que ça voulait dire que deux vecteurs sont orthogonaux. Pour s'en sortir, il suffit de procéder en sens inverse : l'angle α est *défini* par la deuxième formule ; de même, on peut *définir* l'orthogonalité en disant que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Le physicien, lui, sait bien que les architectes n'ont pas attendu l'invention du produit scalaire pour savoir mesurer des angles et tracer des perpendiculaires.

Équation d'une droite

Soit maintenant $M_0 = (x_0, y_0)$ un point du plan, et $\vec{n} = (a, b)$ un vecteur du plan. Quelle est l'équation de la droite (D) passant par M_0 et orthogonale à \vec{n} ? Le point clé est d'arriver à caractériser les points de (D) en terme de produit scalaire : soit $M = (x, y)$ un point quelconque ; on a

$$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{M_0M} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux}$$

ce qu'on peut traduire par un produit scalaire nul, ce qui donne l'équation de la droite en utilisant les coordonnées.

Test : écrire l'équation de la droite (D) .

Vous pouvez vérifier votre formule sur l'exemple suivant : l'équation de la droite passant par le point $M_0 = (1, 2)$ et orthogonal au vecteur $\vec{v} = (3, 4)$ est

$$3(x - 1) + 4(y - 2) = 0.$$

Attention : dans cet exemple, le vecteur $\vec{v} = (3, 4)$ se dessine à partir du point $M_0 = (1, 2)$: on dessine donc une flèche qui part de M_0 et qui aboutit au point $(4, 6)$ (et non pas au point $(3, 4)$).

Géométrie dans \mathbb{R}^3

Tout le paragraphe précédent se généralise sans problème dans l'espace \mathbb{R}^3 , en rajoutant une coordonnée partout. Par exemple, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ est défini par

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Équation d'un plan

Donnons-nous un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de \mathbb{R}^3 , et $\vec{n} = (a, b, c)$ un vecteur. Dans ce cadre, l'ensemble des points M tels que le vecteur $\vec{M_0M}$ est orthogonal au vecteur \vec{n} est un plan. La technique vue dans \mathbb{R}^2 conduit donc à l'équation d'un plan.

Test : écrire l'équation de ce plan.

Vous pouvez vérifier votre formule sur l'exemple suivant : l'équation du plan passant par le point $M_0 = (1, 2, 3)$ et orthogonal au vecteur $\vec{v} = (4, 5, 6)$ est

$$4(x - 1) + 5(y - 2) + 6(z - 3) = 0.$$

Réciproquement, on peut montrer que toute équation du type $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ est l'équation d'un plan, qui est orthogonal au vecteur (α, β, γ) . On retrouve bien le fait que les graphes des application affines $f(x, y) = ax + by + c$ sont des plans.

Points et vecteurs

Formellement, dans ce qui précède, rien ne distingue un point d'un vecteur : tous deux sont donnés par leurs coordonnées. Cependant, il faut penser qu'il y a une différence d'*utilisation* entre les deux. Un point représente un endroit du plan (ou de l'espace) ; un vecteur représente un déplacement entre deux points.

En particulier, ajouter deux vecteurs a un sens (la résultante de deux déplacements est un déplacement), alors qu'ajouter deux points n'a pas de sens (que serait $A + B$ quand A et B sont deux points du plan ?). Par contre, on peut ajouter un vecteur à un point : le point $B = A + \vec{u}$ est obtenu en partant du point A se déplaçant du vecteur \vec{u} (les coordonnées de B sont la somme de celles de A et de celles de \vec{u}).

Chapitre 7

Dérivées partielles

7.1 Le problème

Lorsqu'on veut des informations sur le comportement d'une fonction $f(x)$ dépendant d'**une seule variable** au voisinage d'un point, on peut calculer sa dérivée, qui nous donne une approximation de f par une fonction affine (DL à l'ordre 1). Graphiquement, cela revient à approcher le graphe de f par sa tangente.

Peut-on décrire une théorie similaire pour les fonctions de **deux variables**? La réponse est affirmative. On va encore pouvoir approcher $f(x, y)$, au voisinage d'un point, par une fonction affine; on obtiendra cette approximation affine en calculant les *dérivées partielles* de f au point considéré. Le graphe de l'approximation affine sera le plan tangent au graphe de f .

7.2 Dérivées partielles

Dans toute cette section, on considère une fonction f définie au voisinage du point (x_0, y_0) : cela signifie que son ensemble de définition contient un petit disque centré au point (x_0, y_0) .

Soit f une fonction de deux variables (x, y) , définie au voisinage de (x_0, y_0) . On considère les deux fonctions partielles

$$f_1 : x \mapsto f(x, y_0) \quad \text{et} \quad f_2 : y \mapsto f(x_0, y).$$

Définition 7.2.1 On appelle dérivées partielles de f au point (x_0, y_0) les nombres

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_1(x_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_2(y_0)$$

Exemple : les dérivées partielles de $f(x, y) = x^2y^3$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0y_0^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 3x_0^2y_0^2.$$

Attention au sens des différents symboles :

- x_0, y_0 sont des nombres, (x_0, y_0) est un point du plan ;
- 'x' est juste un symbole : $\frac{\partial}{\partial x}$ signifie qu'on dérive suivant la première variable, qui est souvent notée x (mais pas toujours).
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est un nombre ;
- Quel objet est $\frac{\partial f}{\partial x}$? Aide : on lui donne deux nombres x_0 et y_0 , et ça nous renvoie un nombre...

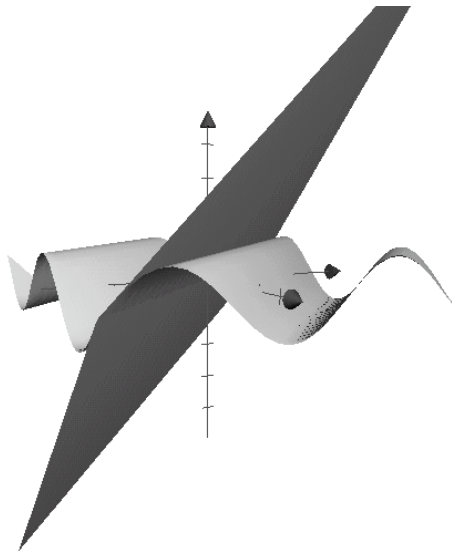
7.3 Développement limité à l'ordre 1

Exemple

Le DL1 (habituel, en une variable) de sinus en 0 conduit à un DL1 de $\sin(x + y)$. Le reste tend vers 0 plus vite que (x, y) . On constate graphiquement que le DL1 donne l'équation du plan tangent.

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= x + y + (x + y)\varepsilon_1(x + y) \\ &= x + y + \|(x, y)\| \left(\frac{x+y}{\|(x, y)\|} \varepsilon_1(x + y) \right) \\ &= x + y + \|(x, y)\| \varepsilon_2(x, y) \end{aligned}$$

On écrit $-\|(x, y)\| \leq x \leq \|(x, y)\|$, et pareil pour y , on utilise le théorème des gendarmes (version à deux variables) et on voit que $\varepsilon_2(x, y)$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$.



DL1, plan tangent

Définition 7.3.1 Soit f une fonction de deux variables définie au voisinage de (x_0, y_0) . On dit que f admet un DL à l'ordre 1 en (x_0, y_0) si il existe des nombres a, b, c , et une fonction ε , tels que

- $f(x, y) = a + b(x - x_0) + c(y - y_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\| \varepsilon(x - x_0, y - y_0)$
- $\varepsilon(x - x_0, y - y_0)$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers (x_0, y_0) .

Définition 7.3.2 Si f admet un DL1 comme ci-dessus,

- la fonction $T(x, y) = a + b(x - x_0) + c(y - y_0)$ est appelée approximation affine de f au voisinage du point (x_0, y_0) .
- le plan tangent au graphe de f en (x_0, y_0) est le graphe de T , il a donc pour équation $z = a + b(x - x_0) + c(y - y_0)$.

Par exemple, pour la surface d'équation $z = \sin(x + y)$, le plan tangent en $(0, 0)$ a pour équation $z = x + y$ (cf dessin).

Formule de Taylor -Young en deux variables

Définition 7.3.3 On dira qu'une fonction f est de classe C^1 si les fonctions dérivées partielles existent et sont continues.

Par exemple, les polynômes sont de classe C^1 , les fractions continues le sont sur leur ensemble de définition; une somme, ou un produit, ou un quotient (bien défini) de fonctions C^1 est encore une fonction C^1 .

Proposition 7.3.4 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 1, en deux variables) Soit f une fonction qui est de classe C^1 sur un voisinage d'un point (x_0, y_0) . Alors elle admet un DL1 en ce point, et le DL s'écrit

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\| \varepsilon(x - x_0, y - y_0).$$

En particulier, le graphe de f admet un plan tangent en ce point, d'équation $z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Remarques 7.3.5 - Attention au sens des différentes lettres de cette formule...

- Exemple : on retrouve le DL1 de $\sin(x + y)$.
- On peut aussi écrire la formule en faisant le changement de variable $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \|(h, k)\| \varepsilon(h, k)$$

(et $\varepsilon(h, k)$ tend vers $(0, 0)$ lorsque (h, k) tend vers $(0, 0)$). La partie de degré 1, $(h, k) \mapsto h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ s'appelle alors application différentielle ou application linéaire tangente de f en (x_0, y_0) .

- Si l'on fixe la variable y égale à y_0 , on retrouve le DL1 de la fonction partielle :

$$f(x, y_0) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + |x - x_0| \varepsilon(x - x_0, 0).$$

Ceci peut s'interpréter graphiquement : on dessine le graphe et son plan tangent en un point; l'intersection de ce dessin avec le plan vertical (Oxz) donne le graphe de la fonction partielle et sa tangente.

- Cette formule permet de dessiner le mouvement de la planche d'un surfeur sur des vagues d'équation $z = \sin(x + y)$ (voir petit film).

7.4 Dérivation composée

Il y a deux façons de composer une fonction : (1) à l'arrivée ou bien (2) au départ. Cela donne les schémas

$$(1) \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } (2) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

7.4.1 Composition à l'arrivée

Il suffit d'appliquer la formule de dérivation des fonctions d'une variable. Par exemple, prenons $f(x, y) = x^2y^3$, soit g une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , calculons les dérivées partielles de la fonction $g \circ f(x, y) = g(x^2y^3)$. Lorsque y est fixé égal à y_0 , on a la fonction partielle $x \mapsto g(x^2y_0^3)$, qui est une fonction d'une seule variable. D'après la formule de dérivation composée en une variable, on a

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0g'(x_0^2y_0^3).$$

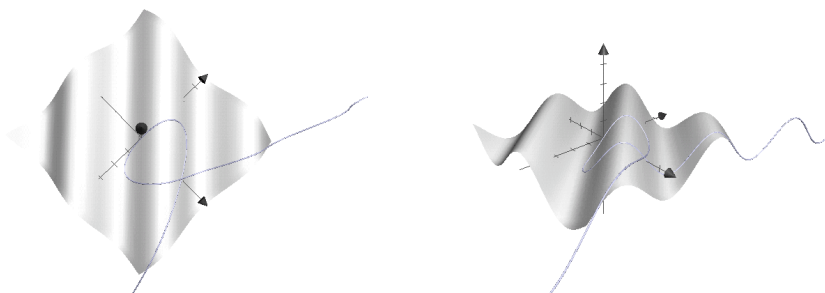
La formule générale est

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(f(x_0, y_0)) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

mais on n'a pas besoin de l'apprendre, puisque c'est juste une application de la formule de dérivation composée en une variable, comme on vient de le voir sur un exemple.

7.4.2 Composition au départ

Exemple Un surfeur se déplace sur les vagues dont la surface suit l'équation $z = f(x, y) = \sin(x + y)$. La position du surfeur en fonction du temps (longitude x et latitude y), est donnée par la courbe paramétrée $t \mapsto (x(t), y(t)) = (t^2, t^3 - 3t)$. L'altitude du surfeur en fonction du temps est alors donnée par la fonction composée $f(x(t), y(t))$.



Soit f une fonction de deux variables, définie sur un sous-ensemble D_f du plan (Oxy) . Soit $M : t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée dans le plan (Oxy) , définie sur un intervalle I . Pour que la fonction composée $z(t) = f \circ M : t \mapsto f(x(t), y(t))$ soit définie sur l'intervalle I , on suppose que les points $M(t)$ sont tous dans D_f (pour toutes les valeurs de

$t \in I$). Contrairement au cas précédent (composition à l'arrivée), notre fonction $f \circ M$ est une fonction d'une seule variable.

Si de plus M est dérivable sur I , et f de classe C^1 sur D_f , alors $f \circ M$ est dérivable sur I . Et on peut calculer sa dérivée :

Proposition 7.4.1

$$(f \circ M)'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Remarques 7.4.2 1. Le cas particulier le plus simple est $(x(t), y(t)) = (t, 0)$. Alors $f \circ M(t) = f(t, 0) = f_1(t)$ est la première fonction partielle de f en $(0, 0)$, et on retrouve simplement la définition de la première dérivée partielle :

$$f'_1(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0).$$

2. Supposons maintenant que $y(t)$ est la fonction nulle ; on a alors $f \circ M(t) = f(x(t), 0) = f_1(x(t))$, qui est une fonction composée de deux fonctions d'une seule variable ; on retrouve alors la formule de dérivation en une variable,

$$(f \circ M)'(t) = (f_1 \circ x)'(t) = x'(t) \cdot f'_1(x(t)) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), 0).$$

3. En notation différentielle (de Leibniz, ou de physiciens), $dz = dx \frac{\partial z}{\partial x} + dy \frac{\partial z}{\partial y}$. La variation dz est la somme de deux termes : un terme dû à la variation de x est l'autre à la variation de y (lorsque $dy = 0$, on est dans le cas $y(t) = \text{cste}$ décrit juste avant).

Exemple On reprend le surfeur de tout à l'heure.

1. Quelle est l'altitude du surfeur en fonction du temps ?
2. Quel est le vecteur vitesse au temps t ?
3. Quel angle fait, au temps t , l'axe de sa planche avec l'horizontale ? (on admet que la planche est tangente aux vagues).

Application numérique à $t = 2$.

Réponses Puisque le surfeur se déplace sur les vagues, on a $z(t) = f(x(t), y(t)) = \sin(t^2 + t^3 - 3t)$. Le vecteur vitesse a trois composantes, $(x'(t), y'(t), z'(t))$, avec $x'(t) = 2t$, $y'(t) = 3t^2 - 3$ et $z'(t) = (2t + 3t^2 - 3) \cos(t^2 + t^3 - 3t)$ (on peut calculer $z'(t)$ directement, ou bien en appliquant la formule de dérivation composée que l'on vient de voir).

AN : pour $t = 2$, le point est en $(4, 2, \sin(6))$. le vecteur vitesse est $(4, 9, 13 \cos(6))$. L'angle est donné par $\arctan\left(\frac{z'(2)}{\sqrt{x'(2)^2 + y'(2)^2}}\right) \simeq \dots$ (pourquoi?...).

Démonstration de la proposition On va obtenir un DL1 de la fonction $(f \circ M)(t)$ à l'aide de DL1s des fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $f(x, y)$. Comme la $f \circ M$ est une brave fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on sait que si elle admet un DL1 en un t_0 , alors elle est dérivable, et le DL donne

la dérivée (c'est un des résultats du chapitre sur les dérivées des fonctions d'une variable). On l'écrit en $t = 0$. On calcule alors

$$\begin{aligned} f(x(t), y(t)) &= f(x(0) + \underbrace{tx'(0) + t\varepsilon_1(t)}_h, y(0) + \underbrace{ty'(0) + t\varepsilon_2(t)}_k) \\ &= f(x(0), y(0)) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0)) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0)) + \|(h, k)\| \varepsilon(h, k) \\ &= \dots (\text{remplacer } h \text{ et } k \text{ par leur expression ; puis regrouper les termes}) \\ &= f(x(0), y(0)) + t \left(x'(0) \frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0)) + y'(0) \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0)) \right) + \text{reste} \end{aligned}$$

et on vérifie que le reste est quelque chose de petit devant t : il s'écrit $t\varepsilon_3(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_3 = 0$. Conclusion de ce calcul : la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ admet un DL1 en $t = 0$, par conséquent elle est dérivable, et sa dérivée est le facteur de 't', c'est-à-dire ce qu'on voulait montrer.

Test Réécrire la preuve de la proposition dans le cas particulier d'une fonction $g(t) = f(e^t, \sqrt{1+t})$, où f est une fonction de deux variables (de classe C^1).

7.5 Application : gradient et lignes de niveau

La formule de dérivation composée, vue au paragraphe précédent, peut s'écrire comme un produit scalaire : en effet, $x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$ est le produit scalaire des deux vecteurs $(x'(t), y'(t))$ (vecteur vitesse de la courbe) et $(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)))$. Ce qui nous conduit à la définition du gradient.

Pour tout ce paragraphe, f est une fonction définie au voisinage d'un point (x_0, y_0) , et admettant des dérivées partielles en ce point.

Définition 7.5.1 (gradient) On appelle gradient de f en (x_0, y_0) le vecteur dont les coordonnées sont les dérivées partielles de f :

$$\tilde{\text{Grad}}_{(x_0, y_0)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

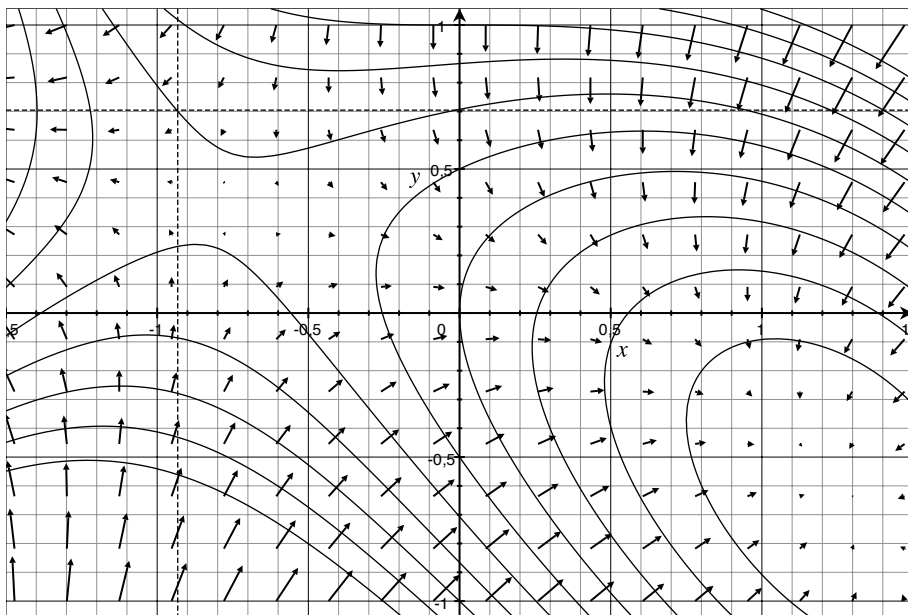
(le gradient est parfois noté $\nabla_{x_0, y_0} f$).

Proposition 7.5.2 La formule de la section précédente s'écrit

$$(f \circ M)'(t) = \tilde{\text{Grad}}_{M(t)} f \cdot O\vec{M}'(t).$$

On constate expérimentalement que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau : ci-dessous, on a tracé simultanément, dans le plan (Oxy) (plan des variables), des lignes de niveau et des vecteurs gradient de la fonction "montagne"

$$f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}.$$



Pour exprimer précisément ceci, il faut supposer que la ligne de niveau peut être décrite comme une courbe paramétrée.

Soit $M : t \mapsto M(t)$ une courbe paramétrée définie sur un intervalle I . On demande que le vecteur vitesse $O\vec{M}'(t)$ existe (c'est-à-dire que les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables).

Proposition 7.5.3 *Supposons que la courbe $M(t)$ est incluse dans une ligne de niveau ; alors le vecteur vitesse $O\vec{M}'(t)$ est orthogonal au gradient de f au point $M(t)$: autrement dit, le produit scalaire des deux vecteurs est nul,*

$$O\vec{M}'(t) \cdot \tilde{\text{Grad}}_{M(t)} f = 0$$

ou encore, en coordonnées,

$$x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = 0.$$

Dans le même goût, on peut montrer que le gradient indique la ligne de plus grande pente, c'est-à-dire la direction dans laquelle la fonction f augmente le plus vite. En effet, si \vec{v} est un vecteur de norme 1, alors le produit scalaire

$$\vec{v} \cdot \tilde{\text{Grad}}_{(x_0, y_0)} f = \|\tilde{\text{Grad}}_{(x_0, y_0)} f\| \cos \alpha$$

où α est l'angle entre les deux vecteurs, et la valeur de ceci est maximum lorsque $\cos \alpha = 1$, c'est-à-dire $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand \vec{v} est colinéaire au gradient, de même sens.

Exemple On reprend la montagne d'équation $f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$. En exemple, on avait calculé les dérivées partielles de f au point $(1, 1/2)$. On a donc $\tilde{\text{Grad}}_{(1, \frac{1}{2})} f = (-1/2, -2)$. La ligne de plus grande pente est donc vers le Sud-Sud-Ouest. Une bille posée en ce point roulerait vers le NNE.

Test : vérifier la cohérence avec le dessin des lignes de niveau de cette "montagne".

Démonstration de la proposition

1. Écrire la relation qui traduit l'hypothèse “ $M(t)$ est incluse dans une ligne de niveau de f ”.
2. Dériver cette relation en $t = 0$.
3. Conclure.

7.6 Courbes implicites

7.6.1 Introduction

Le paragraphe précédent soulève la question suivante : À quoi ressemble une ligne de niveau ? En particulier, dire que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau n'a de sens que lorsque les lignes de niveau peuvent être décrites par des courbes paramétrées. Plus précisément, on va essayer de décrire les lignes de niveau comme des graphes de fonctions d'une variable (qui sont des cas particuliers de courbes).

Questions

1. Est-ce qu'une ligne de niveau, que l'on dessine dans le plan des variables (Oxy) , est toujours le graphe d'une fonction $y = \varphi(x)$?
NON : cf $f(x, y) = x^2 + y^2$ (ou bien le dessin précédent), les lignes de niveau sont des cercles, les cercles ne sont pas des graphes de fonctions.
2. On peut alors demander : est-ce qu'une ligne de niveau est *localement* le graphe d'une fonction ?
Par exemple, le cercle $x^2 + y^2 = 1$ est la réunion de deux graphes de fonctions. En fait, si on a un point sur ce cercle, au voisinage de ce point (dans une petite boîte) la courbe est un graphe. Ceci est vrai presque partout, sauf en deux points. Ces deux points “exceptionnels” ont ceci de particulier que le vecteur gradient y est parallèle à l'axe des abscisses.

Cet exemple va se généraliser en un théorème qui donne une hypothèse précise sous laquelle la relation $f(x, y) = cste$ définit “implicitement” y comme fonction de x .

7.6.2 Énoncé

Soit f une fonction de deux variables, définie sur un voisinage du point (x_0, y_0) , et de classe C^1 sur ce voisinage. Soit $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Théorème 7.6.1 (Théorème des fonctions implicites à deux variables) 1. (*version géométrique*) Supposons que le gradient de f en (x_0, y_0) n'est pas parallèle à l'axe des abscisses. Alors la ligne de niveau de hauteur z_0 est localement le graphe d'une fonction $y = \varphi(x)$.

2. (version analytique) Supposons que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Alors il existe une fonction $\varphi : I \mapsto J$, définie sur un intervalle I voisinage de x , telle que pour tout point $(x, y) \in I \times J$,

$$f(x, y) = z_0 \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

De plus, la fonction φ est de classe C^1 sur I , et on peut calculer sa dérivée en x_0 .

(dans la petite boîte $I \times J$, la trace de la ligne de niveau coïncide avec le graphe).

Théorème admis.

Complément important : comment calculer $\varphi'(x_0)$? On utilise que le graphe de φ est inclus dans la ligne de niveau : autrement dit, pour tout point x de I , on a

$$f(x, \varphi(x)) = z_0.$$

Et il n'y a plus qu'à dériver cette relation, en utilisant la formule de dérivation composée, puisqu'un graphe est un cas particulier de courbe paramétrée¹ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0.$$

On en déduit $\varphi'(x_0)$ (et on retrouve même la condition d'existence).

Remarquons qu'en dérivant encore une fois la relation, on pourrait calculer la dérivée seconde de φ ... *Retenir la démarche qui consiste à dériver la relation $f(x, \varphi(x)) = z_0$, et non pas la formule donnant la dérivée.*

7.6.3 Exemples

On reprend la montagne d'équation $f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$. Trouver tous les mauvais points, ceux au voisinage desquels le théorème ne s'applique pas. Vérifier sur le dessin.

Réponses : les mauvais points sont ceux où $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, c'est-à-dire ici ceux de la droite $x + 2y = 0$. On vérifie sur le dessin que pour tous les autres points, les lignes de niveau tracées sont bien localement des graphes de y fonction de x ; pour les mauvais points, la ligne est localement une courbe avec deux valeurs de y pour chaque x , ou même est réduite à un unique point (points critiques, cf paragraphe suivant).

7.7 Extrema

On a les mêmes définitions qu'en une variable.

¹Il vaut peut-être mieux écrire $f(t, \varphi(t)) = z_0 = f(x(t), y(t))$ avec $x(t) = t$ et $y(t) = \varphi(t)$.

Définition 7.7.1 On dit que la fonction f atteint en un point (x_0, y_0) son maximum sur un ensemble D si

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

pour tout point (x, y) de D . On dit que f a un maximum local en (x_0, y_0) si l'inégalité précédente est valable pour tous les points (x, y) dans un voisinage du point (x_0, y_0) (et peut-être pas pour tous les points de D).

Exemples : comme une variable, $x^2(y^3 - 3y)$ a un max local, un min local, pas de max ou min absolu.

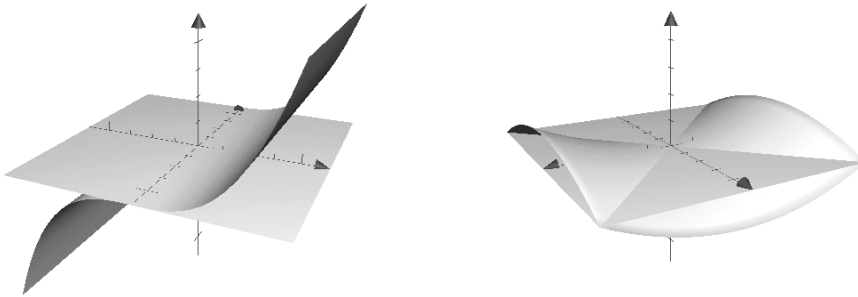
Définition 7.7.2 On dit que le point (x_0, y_0) est un point critique de la fonction f si le vecteur gradient en ce point est nul ; autrement dit, les deux dérivées partielles y sont nulles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Graphiquement, cela signifie que le plan tangent au graphe de f au point (x_0, y_0) est horizontal.

Théorème 7.7.3 Soit f une fonction de deux variables définie au voisinage d'un point (x_0, y_0) . Si (x_0, y_0) est un maximum local de f , alors c'est un point critique.

Bien sûr, même chose si c'est un minimum local. Un maximum global est aussi un maximum local, donc c'est encore vrai (*a fortiori*) pour un maximum global.



Exemples, contre-exemples

- on a les mêmes contre-exemples à la réciproque qu'en une variable ; par exemple pour $f(x, y) = x^3$, 0 est point critique mais pas un minimum ni un maximum (cf figure, graphe de gauche).
- on a aussi des contre-exemples plus intéressants : par exemple $f(x, y) = x^2 - y^2$. Ici, on a le point $(0, 0)$ est un point critique, 0 est un maximum pour la fonction partielle en x et un minimum pour la fonction partielle en y (cf figure, graphe de droite). Un tel point est appelé un *point selle*.
- Exercice : à partir du graphe, trouver les points critiques de $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$. Retrouver ceci par le calcul. Identifier les maxima, minima, les points critiques non extrema.

Exercice d'application

Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume fixé, trouver ceux dont la paroi a une surface minimale, et ceux qui ont la surface maximale.

Pour simplifier, on prend $V = 1$. La hauteur h s'exprime alors en fonction de la largeur ℓ et de la profondeur p , $h = \frac{1}{\ell p}$. La surface vaut alors $2(p\ell + \frac{1}{p} + \frac{1}{\ell})$.

Cela conduit à minimiser $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ pour $x, y > 0$. Le calcul donne que le seul point critique est obtenu pour $x = y = 1$; on a $f(1, 1) = 3$.

Est-ce un minimum, ou un maximum? Ca pourrait aussi être un point selle, ou juste un minimum ou maximum local mais pas global! Peut-être n'y a-t-il pas de minimum ni de maximum...

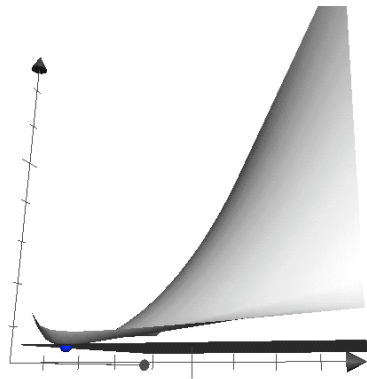
Le point trouvé correspond à un minimum de f "Preuve" :

1. Si $x < 1/3$, par exemple, on voit facilement que $f(x, y) > 3$. De même si $y < 1/3$. Et aussi pour $y \geq 1/3$ et $x > 9$; de même, pour $x \geq 1/3$ et $y > 9$. Ces cas couvrent tous les points (x, y) hors du carré

$$C = \{(x, y) \text{ tels que } \frac{1}{3} \leq x \leq 9 \text{ et } \frac{1}{3} \leq y \leq 9\}.$$

(Vérifier ceci en faisant un dessin). Autrement dit, il reste juste à montrer que $(1, 1)$ est un minimum dans ce carré C .

2. On vérifie graphiquement. Ci-dessous, le graphe de f pour x et y entre 0 et 9, ainsi que le point $(1, 1, 3)$ et le plan $z = 3$.



Si on veut un argument analytique et non pas graphique, il faut utiliser un raisonnement, et un "gros" théorème (existence d'un minimum pour une fonction continue sur un carré).

Remarquons que f n'a pas de maximum : il n'y a pas de boîte à surface maximale, parce qu'on peut produire une boîte de volume 1 avec une surface aussi grande qu'on veut...

(Autre argument : il n'y a qu'un point critique!).

Troisième partie

Intégrales

Chapitre 8

Intégrales simples

8.1 Aires et Intégrales

Comment définir (ou mesurer, ce qui revient au même) l'aire d'une surface quelconque du plan ? Après quelques instants de réflexion, le lecteur se persuadera que les seules surfaces dont il sait calculer l'aire sont celles qu'il peut découper en un certain nombre de rectangles (il y a également les disques, nous y reviendrons). C'est le cas par exemple des triangles que l'on coupe par une hauteur en deux triangles rectangles et dont l'aire est donnée par la somme de la moitié des aires des rectangles obtenus. Le lecteur admettra sans difficulté les règles suivantes, qu'il utilise quotidiennement (...) pour calculer des aires :

- **Règle 0** L'aire d'un point ou d'un segment est nulle.
- **Règle 1** L'aire d'un rectangle est $\mathcal{A} = L.\ell$, où L et ℓ sont les longueurs de de côtés consécutifs du rectangle.
- **Règle 2** Si S_1 et S_2 sont deux surfaces dont on peut mesurer l'aire telles que $S_1 \subset S_2$ alors $\mathcal{A}(S_1) \leq \mathcal{A}(S_2)$.
- **Règle 3** Si S_1 et S_2 sont deux surfaces disjointes dont on peut mesurer l'aire, on peut également mesurer l'aire de leur réunion $S_1 \cup S_2$. On a alors : $\mathcal{A}(S_1 \cup S_2) = \mathcal{A}(S_1) + \mathcal{A}(S_2)$.

Exercice 8.1.1 *Calculer l'aire d'un trapèze connaissant sa hauteur et les longueurs de ses deux côtés qui sont parallèles.*

Exercice 8.1.2 *Si S_1 et S_2 sont deux surfaces dont on peut mesurer l'aire, et si on peut mesurer celle de leur intersection on a : $\mathcal{A}(S_1 \cup S_2) = \mathcal{A}(S_1) + \mathcal{A}(S_2) - \mathcal{A}(S_1 \cap S_2)$.*

8.1.1 Cas des fonctions positives

Nous nous intéressons ici à des surfaces d'un type particulier, dont l'un des "bords" est la courbe représentative d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on supposera dans un premier temps à valeurs positives sur $[a, b]$. On veut mesurer (et donc définir) l'aire de la surface $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ (cf. figure ci-dessous).

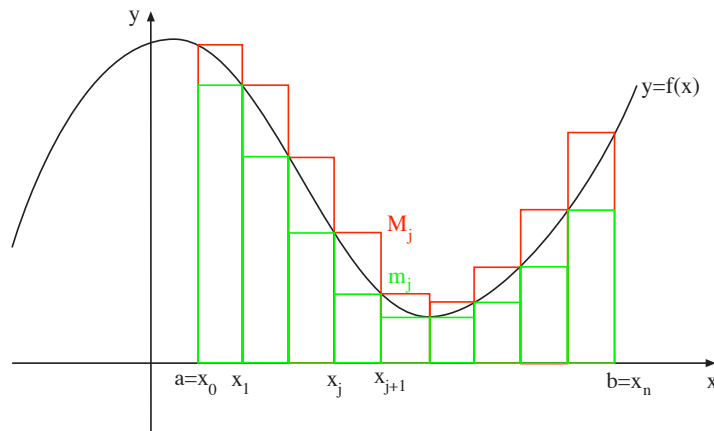
Pour ce faire on découpe la surface S en un certain nombre n de rectangles : on choisit d'abord une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et n sous-intervalles : le plus simple (mais ce n'est pas indispensable) et de considérer des sous-intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$. On pose donc

$$x_j = a + j \frac{b-a}{n}, \quad j = 0 \dots n,$$

(en particulier $x_0 = a$ et $x_n = b$), et l'on recherche sur le j -ième intervalle obtenu la borne supérieure M_j et la borne inférieure m_j de la fonction f . Les règles ci-dessus entraînent immédiatement que si l'on peut mesurer l'aire $\mathcal{A}(S)$ de la surface S , on doit avoir

$$\sigma_n = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) m_j \leq \mathcal{A}(S) \leq \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) M_j = \Sigma_n.$$

En effet le réel $(x_{j+1} - x_j) m_j$ est par exemple l'aire du rectangle dont l'un des côtés est le segment $[x_j, x_{j+1}]$ et dont la hauteur est m_j . Il est clair que l'encadrement ci-dessus est d'autant plus précis que le nombre n de rectangles est grand.



Voici donc la définition naturelle de l'aire de cette surface. On utilise les notations introduites jusque là :

Définition 8.1.3 Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a, b]$, à valeurs positives. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\sigma_n = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) m_j = \frac{(b-a)}{n} \sum_{j=0}^{n-1} m_j \quad \text{et} \quad \Sigma_n = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) M_j = \frac{(b-a)}{n} \sum_{j=0}^{n-1} M_j,$$

où

$$m_j = \inf\{f(x), x \in [x_j, x_{j+1}]\} \quad \text{et} \quad M_j = \sup\{f(x), x \in [x_j, x_{j+1}]\}.$$

On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$ lorsque les suites (σ_n) et (Σ_n) convergent vers une même limite \mathcal{A} . C'est ce nombre que l'on appelle aire de la surface S , et aussi intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. On le note

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(t) dt.$$

Exemple 8.1.4 Soit f la fonction constante égale à $k \geq 0$ sur l'intervalle $[a, b]$. La surface $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ n'est autre qu'un rectangle dont deux côtés consécutifs ont pour longueur $b - a$ et k . Cette fonction est donc intégrable sur $[a, b]$ et l'on a

$$\int_a^b f(t)dt = k(b - a)$$

Exemple 8.1.5 On considère maintenant la fonction $f : x \mapsto x$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On pose $x_0 = 0, x_1 = 1/n, x_2 = 2/n, \dots, x_k = k/n, \dots, x_n = 1$. Puisque f est croissante, on a $m_j = \sup\{f(x), x \in [x_j, x_{j+1}]\} = f(x_j) = x_j = j/n$ et $M_j = \sup\{f(x), x \in [x_j, x_{j+1}]\} = f(x_{j+1}) = (j + 1)/n$. On a donc

$$\sigma_n = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j)m_j = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{j}{n}$$

et $\Sigma_n = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j)M_j = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{j + 1}{n}$

Le lecteur montrera facilement que $\sigma_n = \frac{n(n-1)}{2n^2}$ et que $\Sigma_n = \frac{n(n+1)}{2n^2}$, et donc que f est intégrable sur cet intervalle avec

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Bien entendu, ce résultat ne doit pas vous surprendre : même si on l'a calculé de manière plutôt compliquée, il s'agit de déterminer l'aire d'un triangle !

Exercice 8.1.6 Il est encore plus amusant de calculer ainsi l'aire de la surface délimitée par la parabole $x \mapsto x^2$, pour $x \in [-1, 1]$ par exemple. Le lecteur pourra ainsi retrouver le résultat qu'a énoncé Archimède : cette aire vaut $4/3$ de l'aire du triangle inscrit. Il faut noter que la méthode d'Archimède consiste à découper la surface en triangles, plutôt qu'en rectangles, mais l'idée de Riemann est la même que celle d'Archimède !

8.1.2 Cas des fonctions de signe quelconque

Lorsque la fonction f est toujours négative sur l'intervalle $[a, b]$, on peut toujours définir les sommes σ_n et Σ_n comme dans la Définition ci-dessus. Par contre ces sommes sont alors négatives et si l'on note $\mathcal{A}(S)$ l'aire de la surface $S = \{a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$, on a l'encadrement :

$$\sigma \leq -\mathcal{A}(S) \leq \Sigma$$

On dira encore que f est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ lorsque (σ_n) et (Σ_n) convergent vers une même limite que l'on note encore

$$\int_a^b f(t)dt$$

Par contre l'aire de la surface S est alors définie comme étant le nombre positif

$$\mathcal{A}(S) = - \int_a^b f(t)dt$$

Par exemple si f est la fonction constante égale à $k < 0$ sur $[a, b]$, on a comme précédemment

$$\int_a^b f(t)dt = (b - a)k$$

Lorsque la fonction f change de signe sur l'intervalle $[a, b]$, on peut toujours définir les sommes de Darboux inférieure et supérieure bien que leur signification géométrique soit plus difficile à cerner. On dit dans ce cas encore que f est intégrable sur $[a, b]$ lorsque ces sommes de Darboux convergent vers une même limite. On peut aussi voir les choses de la manière suivante : on découpe l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles sur lesquels f garde un signe constant et on applique l'une des deux définitions ci-dessus suivant le signe de f sur chacun de ces sous-intervalles. On note alors $\int_a^b f(t)dt$ la somme des intégrales calculées sur chacun des sous-intervalles.

8.1.3 Fonctions intégrables

On voit aisément que les fonctions en escalier sont intégrables : on peut en effet choisir la subdivision de telle sorte que les sommes de Darboux soient constantes, égales à la somme des aires des rectangles dessinés par la courbe.

La proposition suivante, que nous admettrons, donne une autre classe bien plus importante de fonctions intégrables :

Proposition 8.1.7 *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$.*

Voici enfin une classe plus générale de fonctions intégrables qui regroupe les deux classes précédentes :

Définition 8.1.8 *Une fonction f est dite continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ s'il existe une subdivision finie $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ de cet intervalle, telle que f soit continue sur chaque sous-intervalle ouvert $]x_j, x_{j+1}[$ et admette une limite à gauche et à droite en chaque x_j pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$ respectivement.*

Proposition 8.1.9 *Toute fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$ y est intégrable. Son intégrale sur $[a, b]$ est alors égale à la somme des intégrales de f sur chaque sous-intervalle où elle est continue.*

8.2 Quelques propriétés

8.2.1 Relation de Chasles

Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a, c]$ et b un point de cet intervalle. Les propriétés qui suivent s'obtiennent facilement à partir des axiomes et de la définition précédentes

pour les fonctions à valeurs positives. On obtient également ces propriétés pour les autres fonctions en utilisant les définitions ci-dessus :

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$

Cette dernière égalité porte le nom de *relation de Chasles* pour les intégrales. Elles permettent au passage de définir $\int_b^a f(t)dt$ pour $a < b$. On doit en effet avoir

$$\int_b^a f(t)dt = - \int_a^b f(t)dt$$

ce que l'on pourra considérer comme une définition.

8.2.2 Linéarité de l'intégrale

Proposition 8.2.1 *Soit f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$ et λ un réel. Alors les fonctions $f + g$ et $\lambda.f$ sont intégrables sur $[a, b]$ et l'on a*

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g)(t)dt &= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \\ \int_a^b (\lambda.f)(t)dt &= \lambda \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

8.2.3 Intégrales et inégalités

Proposition 8.2.2 *Soit f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$ telles que, pour tout $x \in [a, b]$ on ait $f(x) \leq g(x)$. Alors on a*

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

Par exemple si m et M sont respectivement un minorant et un majorant de f sur l'intervalle $[a, b]$, on a

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b - a)$$

8.3 Primitives et intégrales

Nous donnons dans ce paragraphe une interprétation plus calculatoire de la notion d'intégrale. Le lecteur doit avoir à l'esprit que c'est essentiellement cet aspect des choses qui lui sera utile.

8.3.1 Définition

Définition 8.3.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit que la fonction dérivable F est une primitive de f sur I si, pour tout $x \in I$ on a $F'(x) = f(x)$.*

La notion de primitive est un peu délicate principalement parce qu'elle ne définit un objet unique : si une fonction admet une primitive sur un intervalle, elle en admet plusieurs. La proposition suivante montre cependant que ces primitives diffèrent entre elles d'une constante.

Proposition 8.3.2 *Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I alors il existe un réel C tel que pour tout x de I on ait $F(x) = G(x) + C$.*

Par exemple la fonction $x \mapsto \ln x$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto 1/x$, de même que la fonction $x \mapsto \ln(3x)$ puisque $\ln(3x) = \ln x + \ln 3$. Par contre $x \mapsto \ln x$ est la seule primitive de $x \mapsto 1/x$ $]0, +\infty[$ qui s'annule en $x = 1$.

8.3.2 Primitives d'une fonction continue

Proposition 8.3.3 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$. On définit sur I la fonction $A : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. Cette fonction A est continue, dérivable sur I et c'est une primitive de f sur cet intervalle; c'est la seule qui s'annule en a .*

Exercice 8.3.4 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer la **formule de la moyenne** : il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

La proposition précédente fournit également un moyen très simple de calcul de l'intégrale d'une fonction lorsqu'on en connaît une primitive. On a en effet la

Proposition 8.3.5 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Si F est une primitive quelconque de la f sur $[a, b]$, alors on a*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Preuve: La fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$; les fonctions F et G diffèrent donc d'une constante C . Or $G(a) = F(a) + C = 0$ donc $C = -F(a)$ et $G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$. \square

On utilise les notations $\int f(x)dx$ ou $\int^x f(t)dt$ (**Attention** : pas $\int^x f(x)dx$) pour désigner l'ensemble des primitives de la fonction f .

8.3.3 Primitives à connaître

Voici une liste de primitives qu'il faut absolument connaître. Le lecteur devra à chaque fois s'interroger sur l'intervalle où ces primitives existent. On donne toutes les primitives de la

fonction : le lecteur doit comprendre que le C des formules ci-dessous désigne un nombre réel quelconque.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ pour } n \neq -1$	$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln x+a + C$
$\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C, \text{ pour } \alpha \neq 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \arcsin x + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$	

8.4 Trois techniques de calcul

8.4.1 Intégration par parties

Il arrive que l'on ait à intégrer un produit de fonctions. Bien entendu le lecteur sait que le produit de primitives n'est pas une primitive du produit. Plus précisément, pour deux fonctions u et v dérivables, on a

$$(u.v)'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

On en déduit la formule d'intégration par parties :

Proposition 8.4.1 *Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. On a*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Cette formule est évidemment très utile lorsque l'une des deux intégrales est beaucoup plus simple à calculer que l'autre. Soit par exemple

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos x$. On a alors $u'(x) = 1$ et l'on peut prendre $v(x) = \sin x$ (un autre choix de primitive est tout à fait possible mais ne change pas le résultat du calcul). On obtient donc

$$I = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

8.4.2 Changement de variable

La proposition qui suit est connue sous le nom de formule du changement de variable. Le lecteur doit noter que l'égalité ci-dessous peut être lue dans les deux sens, et qu'elle sert autant dans l'un que dans l'autre.

Proposition 8.4.2 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Soit aussi u une fonction continument dérivable de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$ avec $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$. On a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$$

Cette formule très utile est facile à prouver : si F est une primitive de f sur $[a, b]$, on a, pour tout t de $[\alpha, \beta]$

$$(F \circ u)'(t) = F'(u(t)).u'(t) = f(u(t)).u'(t),$$

et il suffit d'intégrer :

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = [F \circ u(t)]_\alpha^\beta = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

ce qui prouve la proposition.

Avec les notations différentielles que l'on a déjà rencontrée, si $x = u(t)$, on peut écrire $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} = u'(t)$, ou, en poussant un peu le bouchon (hum),

$$du = u'(t)dt.$$

On peut donner un sens mathématique à ce petit calcul, mais pour l'instant on doit se contenter d'y voir un moyen de retenir cette formule, voir de la mettre en pratique. En effet, si l'on note u la variable notée x dans la formule ci-dessus (ce qui ne change rien), on lit

$$\int_a^b f(u)du = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt.$$

Voici des exemples où l'on applique la formule du changement de variable dans chacun des deux sens.

- On veut d'abord calculer

$$I = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$$

On va simplifier grandement le calcul en posant $u(t) = \sin t$. On a $du = u'(t)dt = \cos t dt$ et $u(\alpha) = 0$ pour $\alpha = 0$, $u(\beta) = 1$ pour $\beta = \frac{\pi}{2}$. La formule ci-dessus lue de gauche à droite donne alors

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt.$$

Or sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, donc

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

On vient de calculer la surface d'un quart de disque de rayon 1, donné par l'équation $y^2 = 1 - x^2$, avec $x \in [0, 1]$. Pour un disque de rayon R , on trouve de cette manière la valeur de son aire : πR^2 .

- Calculons maintenant l'intégrale

$$J = \int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t} dt$$

On reconnaît facilement dans la fonction à intégrer une expression de la forme $f(u(t))u'(t)$ avec $u(t) = \ln t$ (et donc $u'(t) = 1/t$) et $f(x) = x^2$. On a $u(1) = 0$, $u(e) = 1$ et, en lisant la formule de changement de variable de droite à gauche,

$$J = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$$

8.4.3 Primitives de fraction rationnelles

Lorsque f est une fraction rationnelle, il existe un procédé dit de décomposition en éléments simples qui permet de trouver ses primitives. Rappelons d'abord que ces primitives n'existent que sur chaque intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f . On donne maintenant une idée de ce procédé pour les fractions rationnelles du type

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}.$$

Il faut distinguer trois cas :

- Cas 1 : le dénominateur admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 . Dans ce cas on peut écrire

$$f(x) = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2},$$

où A et B sont deux réels.

- Cas 2 : le dénominateur admet une racine double x_0 . Dans ce cas il existe A et B dans \mathbb{R} tels que

$$f(x) = \frac{A}{(x - x_0)^2} + \frac{B}{x - x_0}$$

- Cas 3 : le dénominateur ne s'annule pas : on écrit

$$f(x) = A \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + B \frac{1}{(x + \frac{b}{2})^2 + \Delta^2}.$$

Le lecteur se persuadera qu'il connaît les primitives de chacun des termes qui apparaissent ci-dessus. La question qui reste est de savoir déterminer les coefficients A et B dans chacun des cas ci-dessus. La méthode la plus simple consiste à réduire les expressions ci-dessus au même dénominateur, et d'identifier les coefficients.

8.5 Une applications géométrique : longueur d'une courbe

Voilà maintenant une réponse satisfaisante à une question naturelle : la longueur d'une courbe paramétrée ne dépend pas du choix de la paramétrisation. Ce résultat repose sur la formule de changement de variable.

Appliquons cette formule pour calculer la longueur d'une courbe $M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si $t : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ est une bijection strictement croissante et de classe \mathcal{C}^1 , et $N : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par $N(s) = M(t)$, on a par définition,

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \|\overrightarrow{ON}'(s)\| ds.$$

Mais on a vu que $\overrightarrow{ON}'(s) = t'(s) \cdot \overrightarrow{OM}'(t(s))$, donc

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \|\overrightarrow{OM}'(t(s))\| t'(s) ds,$$

Grâce à la formule de changement de variable, on a donc aussi

$$L = \int_a^b \|\overrightarrow{OM}'(t)\| dt.$$