Devoir n°1

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Dans tout le devoir, on considère un intervalle compact $[a,b]$, et une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

1. Existence et unicité du polynôme d'interpolation

Montrer que, quels que soient les points deux à deux distincts $x_0,\dots,x_n$ de $[a,b]$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur à n tel que

$$P(x_j)=f(x_j) \text{ pour tout } j\in\{0,\dots,n\}$$

On dit que P est le *polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0,\dots,x_n$.*

2. Formule d'erreur

Dans cette question, on fixe des points deux à deux distincts $x_0,\dots,x_n$ dans $[a,b]$, et on note P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0,\dots,x_n$. Le but est de majorer la distance entre f et P (pour la norme uniforme). Pour ce faire, on suppose que f est $n+1$ fois dérivable.

a) Montrer le lemme suivant : si g est une fonction p fois dérivable sur $[a,b]$ qui s'annule en $p+1$ points $c_0<c_1<\dots<c_p$ de $[a,b]$, alors il existe $\xi\in]c_0,c_p[$ tel que $g^{(p)}(\xi)=0$.

b) Montrer que, pour tout $x\in[a,b]$, il existe un point $\xi_x\in]\min\{x,x_0,\dots,x_n\},max\{x,x_0,\dots,x_n\}[$ tel que

$$f(x)-P(x)=\frac{1}{(n+1)!}.\pi(x).f^{(n+1)}(\xi_x) \quad \text{où} \quad \pi(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

c) Dans le cas particulier où les points x_j sont équidistants (c'est-à-dire $x_j=a+j\frac{b-a}{n}$ pour tout j), montrer que, pour tout $x\in[a,b]$, on a

$$|f(x)-P(x)|\le\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}.\frac{1}{n+1}.\sup_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|$$

Dorénavant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0,\dots,x_n$ avec $x_j=a+j\frac{b-a}{n}$ pour tout j. Dans les questions 3 et 4 ci-dessous, on étudie la convergence de la suite de polynôme $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Condition suffisante pour la convergence uniforme des polynômes d'interpolation

Dans cette question, on suppose que f est analytique, donnée par une série entière de rayon de convergence R centrée en $\frac{a+b}{2}$. Le but de la question est de montrer que, si R est assez grand, alors les polynômes P_n tendent uniformément vers f sur l'intervalle $[a,b]$.

a) On note a_k le k^{eme} coefficient du développement en série entière de f centré en $\frac{a+b}{2}$. Pour $r < R$, justifier l'existence d'une constante $C(r)$ telle que

$$|a_k| \leq \frac{C(r)}{r^k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

b) Montrer que, pour $r < R$, on a

$$\frac{1}{n!} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \leq \frac{rC(r)}{\left(r - \frac{b-a}{2}\right)^{n+1}}$$

c) Montrer que les polynômes convergent uniformément vers f dès que $R > \frac{3}{2}(b-a)$.

4. **Phénomène de Runge**

Hélas, en général, la suite des polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. Les problèmes de convergence arrivent principalement près des bords de l'intervalle $[a,b]$ (en effet, la question précédente implique que, si f est analytique, alors les polynômes P_n convergent uniformément vers f sur un sous-intervalle de $[a,b]$ centré en $\frac{a+b}{2}$). Ce défaut de convergence au voisinage des bords de l'intervalle $[a,b]$ est connu sous le nom de *phénoème de Runge*.

Pour mettre ce phénomène en évidence, on considère le cas particulier où $[a,b] = [-1,1]$ et où f est définie sur $[-1,1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$$

pour un certain $\alpha > 0$.

Remarque. Le but de la question est de d'arriver au résultat énoncé à la sous-question d) ; les sous-questions b) et c) ne sont que des suggestions d'étapes intermédiaires pour y arriver. Si vous trouvez d'autres majorations qui permettent de montrer le résultat énoncé en d), c'est tout aussi bien.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$f(x) - P_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+\alpha^2} \frac{\pi_n(x)}{\pi_n(i\alpha)} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{x}{i\alpha(x^2+\alpha^2)} \frac{\pi_n(x)}{\pi_n(i\alpha)} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

où $\pi_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$.

b) Soit $\eta_1 > 0$. Montrer que, si α est assez petit, alors il existe une constante C_1 telle que, pour tout n assez grand, on a

$$|\pi_n(i\alpha)| \leq C_1 \left(\frac{1}{2} + \eta_1\right)^{\frac{n}{2}}$$

c) (pas facile) Soit $\eta_2 > 0$. Montrer qu'il existe une constante C_2 telle que, pour tout $x \in]-1,1[$ assez proche des extrémités de $]-1,1[$, il existe une infinité de valeurs de n, telles que

$$|\pi_n(x)| \geq C_2 \left(\frac{4 - \eta_2}{e^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

d) En déduire que, si α est assez petit, alors pour tout $x \in]-1,1[$ assez proche des extrémités de $]-1,1[$, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.