Master Math. Fonda. et appliquées — Orsay 2007–2008
U4 : Analyse 1er semestre

Examen du 2 septembre 2008

Vous trouverez ci-dessous 16 affirmations concernant les divers thèmes abordés dans le cours. Pour chacune de ces affirmations, dites si elle est vraie ou fausse, et justifiez votre réponse[1]. Chaque réponse correcte (et correctement justifiée) vaut 1,5 point.

Convolution et régularisation.

1. La suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des noyaux de Dirichlet est une approximation de l'unité[2].

2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale, alors $f * g$ est une fonction polynomiale (où $f * g$ désigne le produit de convolution de f avec g).

3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie $f_\alpha(x) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)e^{\alpha x}$. Pour tout couple (α, β), le produit de convolution $f_\alpha * f_\beta$ est bien défini, et on a $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

Autour de la densité des fonctions polynomiales.

4. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. Pour toute fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales telle que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x) - f_n'(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions analytiques sur I qui converge uniformément vers une fonction f, alors f est analytique.

---

[1] En général, il s'agit simplement d'appliquer un résultat du cours, ou de donner un contre-exemple évident.

[2] On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}$, le noyau de Dirichlet d'ordre n est défini par $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

Séries de Fourier.

7. La suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{1+n^2}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier d'une fonction de classe C^2.

8. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues (2π)-périodiques. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $S_n(f)(x) \leq S_n(g)(x)$ (où les notations $S_n(f)$ et $S_n(g)$ désignent, comme d'habitude, les sommes de Fourier d'ordre n de f et g). Alors on a $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et (2π)-périodique. On suppose que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Alors

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

10. On désigne par $C^\infty_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions (2π)-périodiques de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Il existe une fonction dans $f \in C^\infty_{2\pi}$ telle que $f * g = g$ pour tout $g \in C^\infty_{2\pi}$.

Séries entières, fonctions analytiques et fonctions holomorphes.

11. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n}$. Il existe une fonction analytique F, définie sur $\mathbb{R}$, qui prolonge f.

12. Soit f la fonction définie sur le disque unité ouvert $D(0,1)$ par $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n+1}$. Il existe une fonction holomorphe F, définie sur $\mathbb{C}$, qui prolonge f.

13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction analytique non-constante. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^{(n)}(x) \neq 0$ (où $f^{(n)}$ désigne la n^{ieme} dérivée de f).

14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction analytique non-constante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in \mathbb{R}$, tel que $f^{(n)}(x) \neq 0$ (où $f^{(n)}$ désigne la n^{ieme} dérivée de f).

15. Il existe une fonction analytique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{1+n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

16. Il existe une fonction analytique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(n) = \dfrac{(-1)^n}{1+n^2}$ pour tout $n \geq 1$.