Université Paris Sud, Master Math. Fonda. et Appliquées, année 2006-07
Unité de valeur "Analyse et Mathématiques Fondamentales II"

Examen d'Analyse du 5 septembre 2007

Exercice 1 - Une description des compacts en dimension infinie

On considère un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. Pour toute partie A de l'espace E, on note $f_A : E \to [0, +\infty[$ la fonction "distance à A" définie par

$$f_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

On fixe une partie K de E.

1. *Condition nécessaire.* On suppose K compacte. Montrer qu'il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties compactes non vides de E telle que

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset K$,

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, K_n est contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de E,

(c) la suite de fonctions $(f_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 en restriction à K.

Vérifier que les conditions (a) et (c) impliquent que la suite de fonctions $(f_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f_K (sur E tout entier).

2. *Condition suffisante.* On suppose que E est complet, que K est fermée, et qu'il existe une suite de parties compactes non vides $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfont les conditions (a), (b) et (c) de la question précédente. Montrer que K est compacte.

3. *Exemple : le cube de Hilbert.* On suppose que $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$ (définie par $\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$). On fixe une suite réelle positive $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $a_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$. On suppose que K est la partie de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ définie par

$$K = \{u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ telles que } |u_k| \leq a_k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}\}.$$

Exhiber une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties compactes non-vides de $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ qui vérifient les conditions (a), (b) et (c) de la question 1. En déduire que K est une partie compacte de E.

Exercice 2 - Étude d'un système autonome (compétition entre deux espèces).

Soient $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1, telles que $\phi(0) = \psi(0) = 0$, et strictement positives sur $]0, +\infty[$. Soient a, b deux réels tels que $a > b > 0$. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= \phi(x)(a - x - y) \\ y' &= \psi(y)(b - x - y) \end{cases}$$

On note $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$ le quart de plan supérieur-droit.

1. Déterminer les solutions constantes du système. Montrer que les axes des abscisses et des ordonnées sont réunions d'images de solutions du système. En déduire que l'image d'une solution

est entièrement contenue dans P, dès lors que la condition initiale de cette solution est dans P. Diviser P en régions en fonction du sens de variation des solutions.

Dans la suite, on considère une solution (x, y) du système, définie sur un intervalle $]T_*, T^*[$, de condition initiale $(x(t_0), y(t_0)) \in P$.

2. Montrer qu'on a $x(t)+y(t) \leq \max(a, x(t_0)+y(t_0))$ pour tout $t \geq t_0$. En déduire que $T^* = +\infty$.

3. On suppose que $b \leq x(t_0) + y(t_0) \leq a$. Montrer que $b \leq x(t) + y(t) \leq a$ pour tout $t \geq t_0$. En déduire que $(x(t), y(t))$ converge vers un point de P que l'on déterminera lorsque $t \to +\infty$.

4. On suppose que $x(t_0) + y(t_0) < b$. Montrer qu'il existe $t_1 > t_0$ tel que $x(t_1) + y(t_1) = b$. En déduire que $(x(t), y(t))$ converge vers un point de P que l'on déterminera lorsque $t \to +\infty$.

5. Enfin, dans le cas où $x(t_0) + y(t_0) > a$, montrer que $(x(t), y(t))$ converge vers un point de P que l'on déterminera lorsque $t \to +\infty$.

6. Répresenter grossièrement le comportement des solutions dans P sur un schéma.