Licence de Mathématiques - Probabilités et statistiques

Fiche de TD no 1. Cadre général : événements, σ-algèbres.

——————————— Définitions et résultats fondamentaux ———————————

• Le cadre général dans lequel on se place est le suivant : on veut considérer les résultats d'une expérience et on se place donc dans un ensemble $\mathcal{E}$ qui représente l'ensemble des résultats possibles de l'expérience. Réaliser l'expérience consiste à choisir un élément de $\mathcal{E}$.

Les *événements* possibles relatifs au résultat de l'expérience sont identifiés à des parties de $\mathcal{E}$ de la manière suivante : l'événement $A \subset \mathcal{E}$ est réalisé si le résultat $x \in \mathcal{E}$ de l'expérience est un élément de A (c'est à dire si $x \in \mathcal{A}$).

• A travers ce dictionnaire, l'événement A n'est pas réalisé si le résultat x n'est pas dans A, c'est à dire si $x \in A^c \equiv \mathcal{E} \setminus A$. De même, l'événement A ou l'événement B est réalisé si $x \in A \cup B$, l'événement A et l'événement B sont réalisés si $x \in A \cap B$.

• On exige donc que l'ensemble des événement possibles soit une *σ-algèbre* (ou *tribu*) selon la définition suivante:

Définition *Un ensemble $\mathcal{F}$ de sous-parties de $\mathcal{E}$ est une σ-algèbre (on dit aussi une tribu) sur $\mathcal{E}$ si :* — *l'ensemble $\mathcal{E}$ lui-même est un élément de $\mathcal{F}$,*
— *le complémentaire A^c de A appartient à $\mathcal{F}$ dès que A lui-même appartient à $\mathcal{F}$,*
— *toute union dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.*

Remarquons que les deux dernières conditions entraînent que toute intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.

• On peut ne vouloir considérer que des "combinaisons" d'un certain nombres d'événements : si $\mathcal{A}$ est un ensemble de parties de $\mathcal{E}$, la *σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$* est la plus petite σ-algèbre sur $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$; on la note généralement $\sigma(\mathcal{A})$. La propriété suivante de $\sigma(\mathcal{A})$ est triviale ; c'est néanmoins presque toujours la seule que l'on utilise :

Propriété *Si $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre sur $\mathcal{E}$ et si $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{A}$ alors $\mathcal{F}$ contient $\sigma(\mathcal{A})$.*

• Il est parfois pratique de manipuler non pas les événements mais leurs *fonction indicatrices*. Par définition, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ d'un sous-ensemble A de $\mathcal{E}$ est la fonction de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$, qui vaut 1 en tout point de A et 0 en tout point de $\mathcal{E} \setminus A$. Les données d'un événement ou de sa fonction indicatrice sont bien sûr équivalentes.

On vérifie facilement que
$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A^c}(x) &= 1 - \mathbf{1}_A(x)\\ \mathbf{1}_{A\cap B}(x) &= \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)\\ \mathbf{1}_{A\cup B}(x) &= \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)\end{aligned}$$

Alors que la fonction indicatrice d'une intersection d'événements est simplement le produit des fonctions indicatrices des événements, l'expression de la fonction indicatrice d'une union d'événements devient vite compliquée. C'est pourquoi on se ramenera autant que possible à des intersections par passage au complémentaire.

———————————————— Exercices ————————————————

Exercice 1 Soient A, B et C trois événements. Exprimer les événements suivants (comme combinaisons d'union et d'intersections de A, B, C et leurs complémentaires) et donner leurs fonctions indicatrices (comme combinaisons des fonctions indicatrices de A, B et C) :

1 - A se produit seul ;

2 - A et B se produisent, mais pas C ;
3 - les trois événements se produisent ;
4 - aucun événement ne se produit ;
5 - un (au moins) des trois événements se produit ;
6 - un seul des trois événements se produit ;
7 - deux événements ou plus se produisent ;
8 - deux événements et deux seulement se produisent ;
9 - pas plus de deux événements ne se produisent.

Soient maintenant $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Exprimer les événements suivants :
1 - Une infinité de A_n se produit (cet événement est communément noté "$\limsup A_n$") ;
2 - Tous les événements A_n se produisent à partir d'un certain rang (cet événement est communément noté "$\liminf A_n$").

Exercice 2 Trouver des expressions plus simples des événements suivants :
1 - $(A\cap B)\cup(A\cap B^c)$
2 - $(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$
3 - $(A\cap B)\cup(B\cap C)$

Exercice 3 Soit $\mathcal{F}$ une σ-algèbre de parties d'un ensemble Ω. Soit E une partie de Ω (n'appartenant pas nécessairement à $\mathcal{F}$). Soit $\mathcal{F}_E$ la famille de parties de E obtenues par intersection avec E des éléments de $\mathcal{F}$ (c'est à dire $\mathcal{F}_E = \{A\cap E$ quand A décrit $\mathcal{F}\}$). Montrer que $\mathcal{F}_E$ est une σ-algèbre.

Soit maintenant $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux σ-algèbres de parties d'un même ensemble Ω. Soit $\mathcal{F}$ l'intersection de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ (c'est à dire $(A\in\mathcal{F})\Leftrightarrow(A\in\mathcal{F}_1$ et $A\in\mathcal{F}_2)$). Montrer que $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre.

Exercice 4 Soit f une fonction de Ω_1 dans Ω_2. Soient A et B deux parties de Ω_2. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de Ω_2. Montrer que :
1 - $f^{-1}(A\setminus B) = f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$
2 - $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$
3 - $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

Soit maintenant $\mathcal{A}$ une famille de parties de Ω_2. Montrer que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$.