

---

**Fiche de TD no 1 : Homéomorphismes d'un intervalle**


---

Dans toute la suite, on considère un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  (les remarques préliminaires ci-dessous montrent qu'il suffit de penser au cas où  $I = [0, 1]$ ). Nous allons étudier le comportement des orbites des points de  $I$  sous l'action d'un homéomorphisme de  $I$  ; on en déduira une classification des homéomorphismes de  $I$  à conjugaison près.

**Remarques préliminaires** Soit  $\bar{I}$  l'adhérence de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On vérifie immédiatement que tout homéomorphisme de  $I$  se prolonge de manière unique en un homéomorphisme de  $\bar{I}$ . Ainsi, l'étude des homéomorphismes de l'intervalle  $I$  se ramène à l'étude des homéomorphismes de l'intervalle compact  $\bar{I}$ .

Fixons alors un homéomorphisme  $f$  de  $\bar{I}$  sur  $[0, 1]$ . Si  $h$  est un homéomorphisme de  $\bar{I}$ , alors  $f \circ h \circ f^{-1}$  est un homéomorphisme de  $[0, 1]$ , qui est conjugué à  $h$  par définition. Ceci ramène l'étude des homéomorphismes de l'intervalle  $\bar{I}$  à l'étude des homéomorphismes de l'intervalle  $[0, 1]$ , pour autant que les propriétés que l'on étudie soient invariantes par conjugaison.

**Exercice 1** Commençons par remarquer que tout homéomorphisme de l'intervalle  $I$  est strictement croissant s'il préserve l'orientation de  $I$ , et strictement décroissant sinon.

1) Soit  $h$  un homéomorphisme de l'intervalle  $I$ , préservant l'orientation.

Quelles sont les plus petites périodes possibles pour un point de  $I$  qui est périodique sous l'action  $h$  ? Quel est le comportement asymptotique des orbites positive et négative d'un point de  $I$  qui n'est pas périodique sous l'action de  $h$  ?

2) On dit qu'un homéomorphisme  $h$  de l'intervalle  $I$ , préservant l'orientation, est *au-dessus de la diagonale* si  $h(x) > x$  pour tout point  $x$  dans l'intérieur de  $I$ .

Montrer deux homéomorphismes de  $I$  qui sont au-dessus de la diagonale sont conjugués.

De même, on dit qu'un homéomorphisme  $h$  de l'intervalle  $I$ , préservant l'orientation, est *en-dessous de la diagonale* si  $h(x) < x$  pour tout point  $x$  dans l'intérieur de  $I$ , et on montre que tels homéomorphismes sont conjugués.

3) Soit  $h$  un homéomorphisme de  $I$  préservant l'orientation. En utilisant la question précédente, trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un homéomorphisme de  $I$  soit conjugué à  $h$ . En déduire une classification, à conjugaison près, des homéomorphismes de l'intervalle  $I$  qui préservent l'orientation.

4) Étudier le cas des homéomorphismes de l'intervalle  $I$  qui renversent l'orientation.

**Commentaires** Comme le montre l'exercice 1, la dynamique d'un homéomorphisme d'un intervalle  $I$  est extrêmement simple, et on connaît les classes de conjugaison des homéomorphismes de  $I$  aussi bien que l'on connaît les fermés de  $I$ . Remarquons alors que deux propriétés jouent un rôle absolument fondamental dans l'exercice 1 :

- (i) les points de l'intervalle  $I$  sont totalement ordonnés,
- (ii) tout homéomorphisme de  $I$  préserve (ou inverse) l'ordre des points de  $I$ .

Les propriétés (i) et (ii) sont propres aux homéomorphismes des intervalles de  $\mathbb{R}$  (ou  $\overline{\mathbb{R}}$ ). En l'absence de l'une de ces deux propriétés, la situation devient immédiatement beaucoup plus complexe ; voici trois exemples :

— si on remplace l'intervalle  $I$  par un cercle  $C$ , alors on remplace l'ordre total des points de  $I$  par l'ordre cyclique total des points de  $C$  ; nous verrons que les dynamiques des homéomorphismes d'un cercle sont déjà nettement plus intéressantes que celles des homéomorphismes d'un intervalle ;

— si, au lieu de considérer les homéomorphismes de l'intervalle  $I$ , on s'intéresse aux applications continues non-nécessairement injectives de  $I$ , alors on perd la propriété (ii) ; la complexité de la situation est alors impressionnante ; ainsi, on est loin de savoir classer les applications continues d'un intervalle dans lui-même à conjugaison topologique près ;

— enfin, si on remplace l'intervalle  $I$  par une variété de dimension supérieure ou égale à 2, alors on n'a plus d'analogue à la propriété (i) ; l'étude de la dynamique d'un homéomorphisme de surface est en général inextricable.

Il est par ailleurs intéressant de noter que, si la dynamique de chaque homéomorphisme d'un intervalle, considérée individuellement, est très simple, il existe des groupes d'homéomorphismes de l'intervalle  $[0, 1]$  dont l'action sur  $[0, 1]$  est loin d'être triviale.