Fiche de TD no 3. Mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$. Fonctions de répartitions

Définitions et résultats fondamentaux

• On peut munir $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ (et les autres espaces topologiques) de σ-algèbres liées à la topologie usuelle : par définition les *tribus boréliennes* de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ sont les σ-algèbres engendrées par les ouverts des topologies usuelles. On notera ces tribus $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Notons que ces σ-algèbres sont très fines mais ne contiennent pas toutes les parties de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$.

• Les mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ont une propriétés très pratique : elles sont naturellement caractérisées par une fonction numérique.

Définition *Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $\mathbb{R}^n$ alors la fonction de répartition de $\mathbb{P}$ est la focntion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $F(x_1, x_2, ..., x_n)) = \mathbb{P}(]-\infty, x_1]\times]-\infty, x_2] \times ...\times]-\infty, x_n])$.*

Si $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, on vérifie que sa fonction de répartition F est croissante au sens large, a des limites à gauche et à droite en tout point et est continue à droite en tout point. De plus, les limites de F en $-\infty$ et $+\infty$ de F valent 0 et 1.

Réciproquement, le théorème de Carathéodory affirme qu'une fonction F qui vérifie les propriétés ci-dessus est la fonction caractéristique d'une unique mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ muni de la tribue borélienne.

• On s'intéresse alors plus particulièrement à deux types de probabilités plus simples que les autres : celles dont la fonction de répartition est constante par morceaux, celles dont la fonction de répartition s'écrit $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (où dt est la mesure de Lebesgue).

Les premières sont dites *discrètes* car toute la probabilité est "portée" par une l'ensemble des points de discontinuité de F qui est nécessairement discret (fini ou dénombrable). Si D est cet ensemble de points de discontinuité alors pour tout ensemble A, on a $\mathbb{P}(A) = \sum_{x\in D\cap A} \mathbb{P}(\{x\}) = \sum_{x\in D\cap A} F(x) - F(x^-)$.

Les secondes sont dites *absolument continues* (par rapport à la mesure de Lebesgue) et la fonction f correspondante est appelé *densité* d'une telle mesure. On écrit souvent $\mathbb{P} = fdt$ et on a $\mathbb{P}(A) = \int_A f(t)dt$.

• L'étude des mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ est en fait fondamentale puisqu'on se ramènera toujours à ce cas en considérant des mesures numériques des résultats des expériences, c'est à dire des variables ou des vecteurs aléatoires.

Exercices

Exercice 1 Soit Ω un espace topologique. La tribu borélienne $\mathcal{B}_\Omega$ de Ω est la σ-algèbre engendrée par les ouverts de Ω. Montrer que $\mathcal{B}_\Omega$ est aussi la σ-algèbre engendrée par les fermés de Ω.

On suppose maintenant que $\Omega = \mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ est engendrée par les boules dont le centre a des coordonnées rationelles et dont le rayon est rationel. Montrer de même que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ est engendrée par les cubes ouverts dont les sommets ont des coordonnées rationelles.

On suppose enfin que $\Omega = \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est engendrée par les intervalles du type $]-\infty, a]$ pour a parcourant $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et F sa fonction de répartition (c'est à dire $F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]))$. Montrer que F est croissante, a une limite à gauche et une limite à droite en tout point. Montrer que F est continue à droite. Montrer que $lim_{-\infty} F = 0$ et que $lim_{+\infty} F = 1$.

Le théorème de Carathéodory montre qu'une fonction F vérifiant les propriétés ci-dessus est toujours la fonction de répartition d'une probabilité $\mathbb{P}$. Exprimer la probabilité $\mathbb{P}(I)$ de tout intervalle I à partir de F.

Montrer que $\mathbb{P}$ est, par ailleurs, nécessairement unique : toute probabilité sur $\mathbb{R}$ est entièrement déterminée par sa fonction de répartition.

Exercice 3 Soit F la fonction de répartition d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est continue en un point a si et seulement si $\mathbb{P}(\{a\})$ est nul.

Pour tout point a tel que $\mathbb{P}(\{a\}) \neq 0$, on dit que a est un atome ponctuel. Montrer que l'ensemble des atomes ponctuels d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.

Exercice 4 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < -1 \\ F(x) = \frac{1}{4}(x+1) & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ F(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ F(x) = \frac{7}{8} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ F(x) = 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Montrer que F vérifie les propriétés d'une fonction de répartition. Ecrire $\mathbb{P}$ comme la somme d'une mesure de probabilité discrète et d'une mesure de probabilité absolument continue (dont on donnera la densité).

Soit $f = sin$ et $g = \delta_{-1} + \delta_1$. Calculer les intégrales de f et g par rapport à la mesure $\mathbb{P}$.

Exercice 5 Soit F une fonction de répartition continue sur $\mathbb{R}$ et soit $h > 0$. Montrer que F_h définie par $F_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)dt$ est une fonction de répartition.

Exercice 6 Soit F une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$. On pose $F^{-1}(t) = \inf\{x \text{ tels que } F(x) \geq t\}$. Montrer que $F(F^{-1}(t)) \geq t$, que $F^{-1}(F(x)) \leq x$ et examiner les cas d'égalité.

Exercice 7 Rappelons qu'une probabilité sur $\mathbb{R}$ est sans atome si et seulement si sa fonction de répartition est continue (voir exercice 3).

Soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la projection sur la première coordonnée (c'est à dire simplement $\pi((x,y)) = x$). On considère la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}^2$ définie pour tout borélien A par $\mathbb{P}(A) = \mu(\pi(A \cap ([0,1] \times \{0\})))$.

Montrer que $\mathbb{P}$ n'a pas d'atome mais que la fonction de répartition de $\mathbb{P}$ n'est pas continue.

Exercice 8 Montrer que les sous-ensembles suivants sont dans la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$:

1 - $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sup u_n > a\}$

2 - $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\limsup u_n > a\}$

3 - $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ admettant une limite finie$\}$

4 - $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim u_n > a\}$

5 - $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum |u_n| > a\}$