Fiche d'exercices no 5 : Variables aléatoires usuelles - Modélisation

Exercice 1 On tire sur une cible circulaire de rayon R suivant une loi uniforme supporté par l'ensemble de la cible. On suppose qu'on a un repère (O, x, y) où O est le centre de la cible. Quelle sont les lois des variable aléatoire suivantes :

— la distance D de l'impact au centre de la cible, l'angle θ fait par l'impact par rapport l'axe (O, x), le couple (D, θ),

— l'abscisse X et l'ordonnée Y de l'impact, le couple (X, Y).

Exercice 2 On tire sans remise n boules dans une urne, chaque tirage étant équiprobable. L'urne contient $N_1 = Np$ boules blanches et $N_2 = N(1-p)$ boules noires. Déterminer la loi du nombre B de boules blanches obtenues au bout de n tirages.

On fait tendre N vers l'infini n et p restant fixés. Quelle est la limite de la loi de B ? Interpréter.

Exercice 3 (Processus de Poisson) On considère le nombre d'occurence X d'un évènement pendant l'intervalle de temps [0,t[pour un processus qui vérifie :

(i) Les nombres d'évènements apparaissant dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants.

(ii) La probabilité pour que l'évènement apparaissent pendant un intervalle de temps est proportionnelle à la taille de cet intervalle (on notera λ ce coefficient de proportionalité).

(iii) Le probabilité pour que l'évènement apparaisse deux fois pendant un intervalle de temps de longueur $\Delta(t)$ est du type $\Delta(t)\varepsilon(\Delta(t))$ où $\varepsilon(\Delta(t)) \to 0$.

On dit ce processus *sans mémoire, homogène dans le temps et à évènements rares.* C'est une modélisation du nombre de passage à un péage (cas où il n'y a pas de queue au péage), du nombre de panne d'un appareil...

1) Déterminer la loi de X. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer son espérance et sa variance.

2) Quelle est la loi de la somme de deux lois de Poisson indépendantes ?

3) On modélise le nombre d'article vendus par un magasin par une loi de Poisson. Le stock est réapprovisonné chaque semaine. Quel doit être le stock pour que la probabilité de rupture de stock soit inférieure à 1 pourcent ?

Exercice 4 (Ruine du joueur) Un joueur gagne ou perd 1 francs avec probabilités p et $q = 1-p$ à chaque partie d'un jeu (disons un pile ou face biaisé). Les parties étant indépendantes.

On note S_n le gain (positif ou négatif) du joueur au bout de n parties.

1) Quelle est la loi du nombre de parties jouées avant que le joueur ne gagne 1 franc ?

2) On suppose que le jeu s'arrête quand le joueur a épuisé sa fortune initiale. Soit ν le nombre de parties jouées avant cet arrêt. A quelles conditions $E[\nu]$ et $E[S_\nu]$ sont-ils finis ? Dans ce cas, montrer que $E[S_\nu] = (2p-1)E(\nu)$ et $E[(\frac{q}{p})^{S_\nu}] = 1$.

3) On suppose maintenant que le jeu s'arrête quand le joueur a épuisé sa fortune a ou quand il a gagné b francs. Le jeu s'arrête-t-il ? Etudier la probabilité de ruine et le gain moyen a l'arrêt du jeu.