Fiche de TD no 6 : Deux difféomorphismes de surfaces célèbres

Exercice 1 ("Le" difféomorphisme d'Anosov du tore $\mathbb{T}^2$) On note $\widetilde{A}$ l'automorphisme linéaire du plan $\mathbb{R}^2$, donné dans la base canonique par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\widetilde{A}$ induit un difféomorphisme du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. On note A ce difféomorphisme.

2) Montrer que les points périodiques de A sont denses dans le tore $\mathbb{T}^2$.

3) Montrer que le tore $\mathbb{T}^2$ est un ensemble hyperbolique pour le difféomorphisme A.

4) Montrer que la variété stable (resp. instable) de tout point périodique du difféomorphisme A est dense dans le tore $\mathbb{T}^2$.

5) Montrer que le difféomorphisme A est *topologiquement mélangeant*, c'est-à-dire : quels que soient les ouverts $U, V \subset \mathbb{T}^2$, il existe un entier $N(U,V)$ tel que, pour tout $n \geq N(U,V)$, l'intersection $A^n(U) \cap V$ est non-vide.

6) En déduire que le difféomorphisme A est *topologiquement transitif*, c'est-à-dire : il existe un point $x \in \mathbb{T}^2$ tel que l'orbite de x (pour le difféomorphisme A) est dense dans le tore $\mathbb{T}^2$.

7) On veut montrer que le difféomorphisme A est C^1-*structurellement stable*. Pour ce faire, on considère un difféomorphisme $B : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ de classe C^1 et on note $d = \|B - A\|_1$ (où $\|.\|$ désigne la norme C^1). On doit prouver que, si d est petit, alors B est topologiquement conjugué à A.

Pourvu que d soit assez petit, il existe un unique relevé $\widetilde{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de B tel que $\|\widetilde{B} - \widetilde{A}\|_1 = d$. On note alors $f = \widetilde{B} - \widetilde{A}$. Par définition, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une fonction de classe C^1 tel que $\|f\|_{C^1} = d$. De plus, dès que d est assez petit, la fonction f est invariante par translation à coordonnées entières.

On cherche un homéomorphisme $\widetilde{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, qui passe au quotient en un homéomorphisme $H : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, et tel que $\widetilde{H} \circ \widetilde{A} = \widetilde{B} \circ \widetilde{H}$.

a) La notation $\widetilde{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ invariantes par translations à coordonnées entières. Montrer que l'opérateur linéaire $L : \widetilde{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \to \widetilde{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ défini par $L(h) = A \circ h - h \circ A$ est inversible, et majorer la norme de l'opérateur L^{-1}.

b) On note $\Phi : \widetilde{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \to \widetilde{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ l'opérateur non-linéaire définit par

$$\Phi(h) = f \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} + h) - f$$

Montrer que la relation $\widetilde{H} \circ \widetilde{A} = \widetilde{B} \circ \widetilde{H}$ peut aussi s'écrire

$$h = L^{-1}(\Phi(h)) - L^{-1}(f) \quad \text{où} \quad h = H - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$$

Montrer que, dès que d est assez petit, l'équation $h = L^{-1}(\Phi(h)) - L^{-1}(f)$ admet une unique solution dans $\widetilde{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, et montrer que la norme C^0 de cette solution est petite quand d est petit.

c) Montrer que toute fonction continue $H : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, suffisamment proche de l'identité, et qui satisfait la relation $\widetilde{H} \circ \widetilde{A} = \widetilde{B} \circ \widetilde{H}$, est un homéomorphisme du tore $\mathbb{T}^2$.

Indication : pour montrer l'injectivité, on utilisera l'existence d'un réel $\epsilon > 0$ tel que deux orbites de A sont toujours à une distance supérieure à ϵ l'une de l'autre.

d) Conclure.

Commentaires. Soit M une variété compacte et $f : M \to M$ un difféomorphisme. Si la variété M est un ensemble hyperbolique pour le difféomorphisme f, alors on dit que f est un *difféomorphisme d'Anosov*, en hommage au mathématicien Russe D.V. Anosov qui a prouvé, dans les années 60, qu'un tel difféomorphisme est structurellement stable. On montre facilement que le tore $\mathbb{T}^2$ est la seule surface qui porte un difféomorphisme d'Anosov. De plus, tout difféomorphisme d'Anosov du tore $\mathbb{T}^2$ est topologiquement conjugué à un difféomorphisme induit par un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^2$. En dimension supérieure, la situation est plus complexe et encore mal comprise.

Exercice 2 (Le fer à cheval de Smale) On construit un difféomorphisme de la sphère S^2 de la manière suivante.

On considère le carré $C = [-1;1]^2$ et on désigne par D_1 et D_2 les demi-disques de rayon 1 et de centres $(0,1)$ et $(0,-1)$ au dessus et en dessous de C. On commence par envoyer C linéairement sur le rectangle $[\frac{-1}{4}; \frac{1}{4}] \times [-4;4]$, puis on plie ce rectangle pour que l'image de C soit un “fer à cheval”, comme indiqué sur la figure ci-dessous. On définit ainsi une application injective φ de $C \cup D_1 \cup D_2$ avec les propriétés suivantes :

- $C \cap \varphi(C)$ est l'union des deux rectangles : $Q_1 = [\frac{-3}{4}; \frac{-1}{4}] \times [-1;1]$ et $Q_2 = [\frac{1}{4}; \frac{3}{4}] \times [-1;1]$.
- Sur chacun des deux rectangles $R_1 = [-1;1] \times [\frac{-3}{4}; \frac{-1}{4}]$ et $R_2 = [-1;1] \times [\frac{1}{4}; \frac{3}{4}]$, φ est affine, préserve les horizontales et les verticales.
- On a $\varphi(R_i) = Q_i$ et $\varphi(D_i) \subset D_2$ pour $i = 1, 2$.
- Sur chacun des deux demi-disques D_1 et D_2, φ est une similitude.

a) Déterminer les points fixes de φ.

b) Montrer que $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(C)$ est le produit de deux ensembles de Cantor.

c) Montrer que la restriction de φ à Λ est topologiquement conjuguée à un shift bilatéral sur l'alphabet à deux symboles.

d) Montrer que les points périodiques de φ sont denses dans Λ et qu'il existe une orbite dense dans Λ.

e) Étudier les variétés stables et instables des points fixes de φ dans Λ.