Licence Math. Fond. 2004-05
Calcul Intégral

Feuille 1

Exercice 1. On définit l'intégrale des fonctions continues comme l'unique application qui à deux réels a, b et une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ associe un réel $\int\limits_a^b f(x)dx$ avec les trois propriétés suivantes :

i) si a, b, c sont tels que $a < b < c$, et si f est continue sur $[a,b]$, alors $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

ii) si f, g sont continues sur $[a,b]$, et si $f \leq g$, alors $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$;

iii) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\int\limits_a^b \lambda dx = \lambda(b-a)$.

a) Montrer que, si F est une primitive de f, alors $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$;

b) Montrer que $x \mapsto \int\limits_a^x f(t)dt$ est une primitive de f ;

c) Montrer que $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$

Exercice 2. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 3. Déterminer un équivalent simple quand $\varepsilon \to 0+$ de

$$F(\varepsilon) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1+\varepsilon} n}.$$

Exercice 4. On considère la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, où $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
a) Rappeler pourquoi la série est convergente ;
b) Montrer qu'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que les sommes partielles de la série "réarrangée" $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)}$ n'aient pas de limite ;
c) Trouver une bijection $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que la somme de la série réarrangée $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)}$ soit $+\infty$;
d) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série réelle **semi-convergente**, c'est-á-dire une série qui converge, mais n'est pas absolument convergente.Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)} = a$.

Exercice 5. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide et majoré. Montrer que

$$M = \sup A \iff M \text{ majorant de } A \text{ et } \exists \text{ une suite } (x_n) \subset A \text{ telle que } x_n \to M.$$

Exercice 6. A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$;
a) Montrer que $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$;
b) Déterminer $\sup(A + B)$. Que peut-on dire de $\sup(A \cap B)$?
c) Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de réels. Comparer $\sup\{a_i + b_i, i \in I\}$ et $\sup\{a_i, i \in I\} + \sup\{b_j, j \in I\}$;
d) Soit $(a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ une famille de réels. Montrer que pour toutes parties I, J de $\mathbb{N}$, on a $\sup_{i \in I}\{\sup_{j \in J}\{a_{i,j}\}\} = \sup_{j \in J}\{\sup_{i \in I}\{a_{i,j}\}\}$.

Exercice 7. Pour chacune des suites suivantes déterminer $\sup_{n \geq 0} u_n$, $\inf_{n \geq 0} u_n$ ainsi que leur limite éventuelle,

$$u_n = (-1)^n \quad ; \quad v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \quad ; \quad w_n = \ln(1/n) \cdot \sin n.$$

Exercice 8. Soit (x_n) une suite réelle. On dit que $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ est une valeur d'adhérence (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de la suite (x_n) si et seulement s'il existe une sous suite

$(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers α dans $\overline{\mathbb{R}}$;
a) Donner des exemples de suite ayant une, deux, trois, une infinité de valeurs d'adhérence.
b) Montrer que si α est une valeur d'adhérence de (x_n) alors tout ouvert contenant α contient une infinité de points de la suite ;
c) Montrer que $\limsup x_n$ et $\liminf x_n$ sont des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) ;
d) En déduire que de toute suite on peut extraire une sous suite qui converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ ainsi que le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}$;
e) Montrer que $\limsup x_n$ et $\liminf x_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de (x_n) ;
f) Montrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes : (i) la suite (x_n) converge dans $\overline{\mathbb{R}}$; (ii) $\liminf x_n = \limsup x_n$; (iii) la suite (x_n) n'a qu'une seule valeur d'adhérence ; (iv) toute suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) contient une suite extraite convergente vers une limite indépendante de $(\varphi(n))$

Exercice 9. Soit $u_n = (-1)^n + n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$. Déterminer $\liminf_{n\to\infty} u_n$ et $\limsup_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 10. Soit (a_n) une suite réelle qui converge dans $\mathbb{R}$ et soit (b_n) une suite réelle. Montrer que $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$. Ce résultat reste-t-il valable si on suppose que (a_n) converge dans $\overline{\mathbb{R}}$?

Exercice 11. Soit (x_n) une suite réelle positive telle que $x_{m+n} \leq x_n + x_m$ pour tout n, $m \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout entier p strictement positif on a $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \inf_{p\geq 1} \frac{x_p}{p}$.

Exercice 12. Trouver une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 13. Soit $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ non vide. On suppose que pour tous x, $y \in I$ tels que $x < y$, l'intervalle $]x, y[$ est inclus dans I. Montrer que I est d'une des formes suivantes : $[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ avec a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 14. Un nombre réel est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des nombres algébrique est dénombrable.

Exercice 15.
a) Montrer que dans le plan toute famille de disques deux à deux disjoints est au plus dénombrable. On donnera si possible deux méthodes ;
b) Montrer que dans le plan toute famille de "huit" deux à deux disjoints est au plus dénombrable (un "huit" étant défini par exemple comme l'union de deux cercles cotangents tels qu'aucun des deux ne soit inclus dans le disque délimité par l'autre).

Exercice 16. Montrer que, si E est un ensemble, E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas en bijection.

Exercice 17.
a) Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. (Considérer par exemple une liste dénombrable d'éléments de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et construire une suite qui ne peut pas appartenir à cette liste) ;
b) En déduire que [0,1] puis que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. (Penser au développement dans une base des réels.)