Perturbation d'un système linéaire

Les ordinateurs stockent les nombres réels sous forme décimale, en ne conservant qu'un certain nombre de chiffres après la virgule. Quand un ordinateur résoud un système linéaire, il fait donc, à chaque étape de la résolution, de petites erreurs d'arrondis. *A priori*, ça n'est pas très gênant, puisque les erreurs concernent le huitème ou le dixième chiffre après la virgule. Esayons. On considère le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 2x & + & \frac{1}{7}y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & \frac{2}{7}y & - & 3z & = & 1 \\ x & & & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

On demande à un ordinateur de résoudre le système en arrondissant, tout au long de la résolution, les nombres à deux chiffres après la virgule ; on obtient la solution

$$(x, y, z) = (15, -100, 5)$$

Puisqu'on trouve des solutions entière, aucun doute que le fait d'arrondir au deuxième chiffre après la virgule n'a induit d'erreur, et que ce sont les vraies solutions du système, n'est-ce pas ?... On demande alors au même ordinateur de résoudre le système en arrondissant les nombres à quatre chiffres après la virgule ; on obtient

$$(x, y, z) = (-1428, 10000, -476)$$

A nouveau des solutions entières.... dommage qu'elles n'est rien à voir avec les précédentes. Essayons en arrondissant au dixième chiffre après la virgule ; on obtient

$$(x, y, z) = (-1428571428, 10000000000, -476190476)$$

Ça ressemble de moins en moins à une solution plausible... bien qu'on utilise des arrondis de plus en plus précis ; ca diminue la confiance qu'on a en sa calculatrice, n'est-ce pas ? En tout cas, l'exemple ci-dessus montre que les erreurs d'arrondis lors de la résolution d'un système linéaire ne sont pas si anodines que cela. Pour essayer de comprendre d'où provient ce phénomène, on doit s'intéresser à la question suivante :

Comment changent les solutions d'un système linéaire lorsqu'on change "un peu" les coefficients du système ? (par exemple, lorsqu'on arrondit les coefficients à dix chiffres après la virgule)

Dans cette feuille, on s'intéresse plus précisément à la sous-question suivante :

Comment varie le nombre de solutions d'un système linéaire lorsqu'on change "un peu" les coefficients du système ?

I. Perturbation d'une famille de vecteurs en une famille libre

Avant de s'intéresser aux solutions des systèmes linéaires, il faut nous intéresser aux sous-espaces vectoriels engendrés par des familles de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. On veut comprendre *comment change la dimension du sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs $u_1, \dots, u_k$ de $\mathbb{R}^n$ lorsqu'on change un peu ces vecteurs ?* Plus précisément, on veut montrer que, *quels que soient les vecteurs $u_1, \dots, u_k$ de $\mathbb{R}^n$, avec $k \leq n$, on peut changer "un peu" les vecteurs $u_1, \dots, u_k$ pour qu'ils forment une famille libre.*

Pour preciser ce que veut dire "un peu", on définit une distance entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$: si $v = (a_1, ..., a_n)$ et $u = (b_1, ..., b_n)$, on définit la distance entre v et u par

$$distance(v, u) = max\{|a_i - b_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

Par exemple, si e_1 et e_2 sont des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, que vaut $distance(e_1, e_2)$? Un autre exemple : si $v_1 = (a_1, ., a_i, .., a_n)$ et $v_2 = (a_1, \dots, a_i + \epsilon, \dots, a_n)$ (c'est-à-dire que v_2 est obtenu en ajoutant ϵ à la i^{eme} coordonnée de v_1), que vaut $distance(v_1, v_2)$?

Question 1. Question préliminaire.

Soit $(u_1, \dots, u_{k-1})$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et u_k un vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Que peut-on dire de la position du vecteur u_k par rapport au sous-espace vectoriel $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})$ lorsque la famille $(u_1, \dots, u_k)$ n'est pas libre ? et lorsque la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est libre ?

Question 2. Perturbation d'une famille en une famille libre

Une famille de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ne forme pas nécessairement une famille libre. Pourtant, on va montrer que, si $k \leq n$, on peut obtenir une famille libre en changeant "un peu" ces vecteurs.

a. Commençons par un exemple. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la famille (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 3)$ et $v_3 = (1, 3, 6)$. Vérifier que la famille (v_1, v_2) est libre, mais que la famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas libre. Montrer alors que, pour tout $\epsilon \neq 0$, la famille $(v_1, v_2, v_3 + \epsilon e_3)$ est libre (où $e_3 = (0, 0, 1)$ est le troisième vecteur de la base canonique).

b. Généralisons. Considérons k vecteurs $v_1, \dots, v_k$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $k \leq n$. Supposons que la famille $(v_1, \dots, v_{k-1})$ est libre, mais que la famille $(v_1, \dots, v_k)$ n'est pas libre. Montrer qu'il existe un vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, tel que la suite $(v_1, \dots, v_{k-1}, e_i)$ est libre. Puis, montrez que la famille $(v_1, \dots, v_{k-1}, v_k + \epsilon e_i)$ est également libre, quel que soit $\epsilon \neq 0$.

c. Passons au résultat qu'on veut montrer. Soit $(v_1, ..., v_k)$ une famille des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec $k \leq n$. Montrez que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des vecteurs $(u_1, ..., u_k)$ tels que $(u_1, ..., u_k)$ est une famille libre et tels que

$$distance(u_i, v_i) \leq \epsilon$$

pour tout $i = 1, ..., k$. *(Vous pouvez utiliser ce qui précède et raisonner par récurrence.)*

II. Perturbation d'un système linéaire en un système à solution unique

Question 1. Pertubation d'un système en un système à solution unique

Considérons le système linéaire de n equations à n inconnues

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & c_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & c_n \end{array}\right.$$

Il est possible que ce système n'admette pas de solution, ou admette une infinité de solutions (tout dépend des coefficients $a_{i,j}$ et c_i). Montrer cependant qu'on peu changer "un peu" les coefficients $a_{i,j}$ du système (S) pour obtenir un système (S') qui admet une unique solution. Plus précisément, montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un système linéaire de n equations à n inconnues

$$(S')\left\{\begin{array}{ccccccc} b_{1,1}x_1 & + & \dots & + & b_{1,n}x_n & = & c_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1}x_1 & + & \dots & + & b_{n,n}x_n & = & c_n \end{array}\right.$$

tel que (S') admet une unique solution, et tel que, pour tout i et tout j, on a $|a_{i,j} - b_{i,j}| \leq \epsilon$.

Indication. Utiliser la partie I.

Question 2. Exemple.

Donner un exemple de système linéaire (S) à deux équations et deux inconnues qui n'admet pas de solutions ou admet une infinité de solutions, puis trouver un système (S') obtenu en changeant les coefficients de (S) de moins de 0.00001 et tel que (S') admet une unique solution.

Question 3. Application géométrique

Soient P, Q deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par leurs equations cartésiennes. On suppose que $P \cap P'$ est une droite vectorielle. Montrer que en changeant "un peu" les coefficients des équations cartésiennes de P et P', on peut obtenir deux plans vectoriels P', Q' tels que $P' \cap Q' = \{\mathbf{0}\}$.

III. Le nombre de solution d'un système homogène ne peut pas diminuer par petite pertubation

On a montré à la question précédente qu'on peut toujours changer "un peu" les coefficients d'un système linéaire (S) pour obtenir un système qui admet une unique solution. En partculier, si (S) est homogène, ceci montre qu'on peut toujours faire diminuer la dimension de l'ensemble des solutions d'un système linéaire en modifiant "un peu" les coefficients de ce système (on rappelle qu'un système linéaire homogène admet toujours au moins une solution, la solution nulle). On va maintenant montrer qu'il n'est pas possible de faire augmenter la dimension de l'ensemble des solutions.

Considérons d'abord un exemple. La seule solution dans $\mathbb{R}^2$ du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}\right.$$

est le point $\mathbf{0}$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que le système

$$\begin{cases} (2+a)x + (2+b)y = 0 \\ (2+c)x + (3+d)y = 0 \end{cases}$$

n'a pas d'autre solution que $\mathbf{0}$ si a, b, c et d sont plus petit que ϵ en valeur absolue.

Essayez de généraliser l'exemple ci-dessus (d'abord dans $\mathbb{R}^2$, puis si possible en dimension plus grande...).