Université Paris Nord – Licence 2 mention Physique-Chimie – Année 2013-2014
Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques

Feuille d'exercices n° 3

Fonctions de plusieurs variables I : représentations graphiques

---

Exercice 3.1.— Modélisation par des fonctions de deux variables
Donner une formule pour chacune des fonctions suivantes.

1. L'aire $A(\ell_1, \ell_2)$ d'un rectangle en fonction de la longueur des côtés.

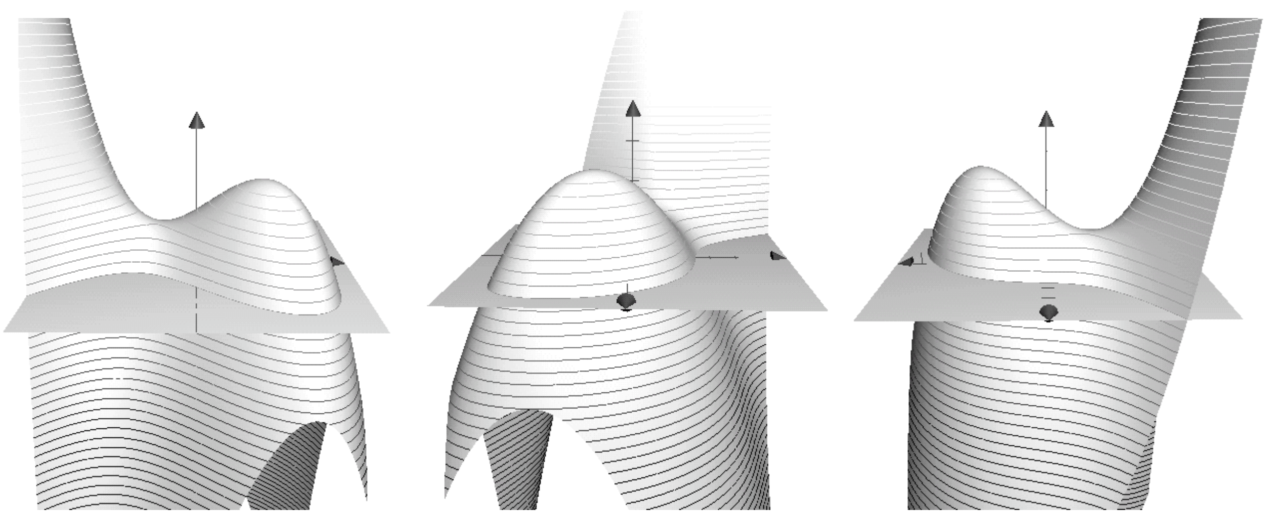
2. L'energie cinétique $E(m, v)$ d'un mobile en fonction de sa masse et de sa vitesse.

3. Le volume $V(r, h)$ d'un cylindre en fonction de son rayon r et de sa hauteur h.

4. La surface extérieure $S(x, y)$ d'un parallélépipède rectangle (un carton d'emballage !) de volume $1m^3$, en fonction de la largeur x et de la longueur y de sa base, exprimées en mètres.

5. L'énergie totale (cinétique et potentielle) d'un pendule simple de masse 1, de longueur 1 en fonction de l'angle θ avec la verticale et de $\theta'(t)$.

Exercice 3.2.— Un peu de géographie
Les trois dessins ci-dessous représentent des vues en relief d'une presqu'île, avec le plan du niveau de la mer. Dans ces trois vues, l'observateur regarde successivement vers le Nord, puis vers l'Ouest, puis vers le Sud. On a représenté les lignes de niveaux d'altitude 0m, 25m, 50m, *etc.* (le sommet est situé à une altitude d'environ 250m).



1. Lignes de niveau

a. Dessiner, en vue du dessus, l'allure de la ligne de niveau 0 (ensemble des points de la presqu'île situés à l'altitude 0). On utilisera le cadre fourni.

b. Même question pour la ligne de niveau 100m, puis pour la ligne de niveau 200m (sur le même dessin).

2. Profils du relief

a. Dessiner le profil du relief le long d'un itinéraire Sud-Nord passant par le sommet de la presqu'île.

b. Même question pour un itinéraire passant au dessus de l'axe Nord-Sud représenté sur les dessins. Même question pour un itinéraire passant par le col de la presqu'île.

c. (optionnelle) Sur un autre dessin, représenter le profil du relief le long d'un itinéraire Ouest-Est passant au dessus de l'axe Ouest-Est représenté.

> En fait, la surface dessinée à la page précédente est le graphe de la fonction de deux variables définie par
> $$f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}.$$
> Ceci signifie :
>
> - qu'on a muni l'espace d'un repère orthonormé $(Oxyz)$,
> - et qu'on a représenté *l'ensemble des points* (x,y,z) *de l'espace tels que* $z = f(x,y)$.

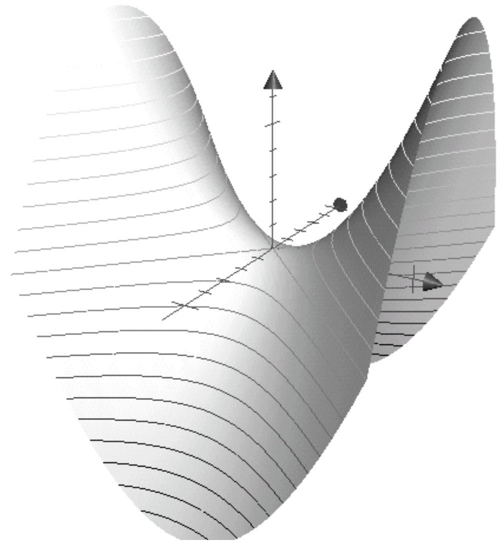
3. **a.** Étiqueter les axes ('x', 'y' ou 'z') sur les trois dessins de l'énoncé. **b.** Tracer les axes sur les deux dessins des questions 1 et 2, et les étiqueter.

4. **a.** Sachant que x, y et z sont exprimés en centaines de mètres, donner l'altitude du point de la presqu'île d'abscisse $x = 0$ et d'ordonnée $y = 0$. **b.** Positionner ce point sur chacun des dessins précédents. **c.** (optionnelle) Mêmes questions pour le point correspondant à $x = 0$ et $y = 1$.

5. **a.** La ligne de niveau 0 dessinée à la question **1.a** est un ensemble de points dans le plan des variables x et y. Quelle est l'équation de cet ensemble ? **b.** Exprimez cette équation à l'aide de la fonction f. **c.** Mêmes questions pour la ligne de niveau 100m.

6. **a.** Le profil du relief au-dessus de l'axe Nord-Sud, dessiné à la question **2.b**, est un ensemble de points dans le plan des variables y et z. Quelle est l'équation de cet ensemble ? **b.** Exprimez cette équation à l'aide de la fonction f. **c.** En déduire l'altitude du point culminant de cet itinéraire. Vérifier graphiquement.

Exercice 3.3.— Encore un peu



Le dessin ci-contre montre le graphe de la fonction définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$. On a représenté les lignes de niveau d'altitudes entières $(0, 1, 2, ...)$.

1. Lignes de niveau

a. Indiquer sur le dessin les trois courbes correspondant respectivement aux niveaux -1, 0, 1.

b. Donner l'équation de la ligne de niveau 1. En s'aidant du dessin fourni, représenter cette ligne de niveau (dans le plan des variables x et y).

c. Mêmes questions pour la ligne de niveau 0. En exprimant x en fonction de y, montrer par le calcul que cette ligne est la réunion de deux droites.

2. Fonctions partielles

a. Donner l'expression de la fonction partielle $\varphi : x \mapsto f(x, 0)$. Dessiner son graphe (dans le plan des variables x et z). Représenter la courbe correspondante sur le dessin en trois dimensions.

b. Mêmes questions pour la fonction partielle $\psi : y \mapsto f(-1, y)$.

Exercice 3.4.— Ensembles de définition

Pour chacune des formules suivantes, déterminer l'ensemble de définition, et dessiner cet ensemble dans le plan des variables x et y.

$$f(x,y) = \ln(2x - y) \quad , \quad g(x,y) = \sqrt{x+y+1} \quad , \quad h(x,y) = \ln\left(\sin(x) - y\right)$$

$$i(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{y} \quad , \quad j(x,y) = \sqrt{x+y+1} \times \ln(2x-y) \quad , \quad k(x,y) = \frac{1}{\sin(x+y)}$$

$$\ell(x,y) = \frac{1}{\sin(x^2+y^2)} \quad , \quad m(x,y) = \frac{1}{\sin(x)\sin(y)} \quad , \quad n(x,y) = \ln(\sin(x^2+y^2))$$

Exercice 3.5.— Lignes de niveaux

Pour chacune des fonctions ci-dessous, tracer l'allure de quelques (deux ou trois) lignes de niveaux. Vous jusitifirez l'allure de vos dessins, par exemple en démontrant que les lignes de niveaux sont des droites parallèles à l'axe des abscisses, ou des cercles centré à l'origine, etc.

$$f(x,y) = (x-2y)^4 \quad , \quad g(x,y) = \exp(xy) \quad , \quad h(x,y) = \sin(x)\sin(y)$$

$$i(x,y) = \exp(x^2+y^2) \quad , \quad j(x,y) = \exp(xy) \quad , \quad k(x,y) = \sin(x^2+y^2)$$

Exercice 3.6.— Graphes

Pour chacune des fonctions ci-dessous, tracer quelques lignes de niveaux, les graphes de quelques fonctions partielles, et essayer d'en déduire l'allure du graphe de la fonction.

$$f(x,y) = x^2 + y^4 \quad , \quad g(x,y) = x^2 + y \quad , \quad h(x,y) = \sin(x^2+y^2) \quad , \quad i(x,y) = \sin(x)\sin(y)$$

1.a et b

Nord

Ouest

Est

Sud

2.a et b

Haut

Sud

Nord

Bas