Examen du 2 septembre 2009

A. Vrai/faux. (environ 10 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE, et justifier votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

1. Les seules parties de $\mathbb{Q}$ qui sont à la fois ouvertes et fermées (pour la topologie donnée par la distance usuelle) sont $\emptyset$ et $\mathbb{Q}$.

2. On note $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact. Alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses de $(C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ,\ \|\cdot\|_\infty)$ est dense dans $(C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ,\ \|\cdot\|_\infty)$.

3. L'ensemble de fonctions

$$F := \left\{ f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \text{ tel que } \|f'\|_\infty \leq 1 \text{ et } \int_0^1 |f(t)|dt \leq 1 \right\}.$$

est relativement compact dans l'espace métrique $\big(C^0([0,1],\mathbb{R})\ ,\ \|\cdot\|_\infty\big)$.

4. Pour toute suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note $\|u\|_2 := \big(\sum_n |u_n|^2\big)^{1/2}$. On considère l'espace vectoriel $\ell^2(\mathbb{R}) = \big\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \|u\|_2 < +\infty\big\}$, et son sous-espace vectoriel $\ell_c(\mathbb{R})$ constitué des suites qui sont nulles à partir d'un certain rang. Alors, pour tout $u \in \ell^2(\mathbb{R})$, il existe un unique $v \in \ell_c(\mathbb{R})$ tel que

$$\|u-v\|_2 = \inf_{w\in\ell_c(\mathbb{R})} \|u-w\|_2.$$

5. Il existe au moins une solution maximale $t \mapsto (x(t),y(t))$ du système différentiel

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) - y(t) - y^2(t) \\ y'(t) &= -x(t) - y(t) - x(t)y(t) \end{aligned}$$

qui part d'un point $(x(0),y(0)) \neq (0,0)$ en $t=0$, et qui converge vers le point $(0,0)$ quand t tend vers $+\infty$.

B. Divergence des séries de Fourier. (environ 7 points)

On note $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodiques. On munit cet espace vectoriel de la norme uniforme $\|\cdot\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n l'opérateur linéaire de $C_{2\pi}$ dans l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leq n$ qui associe à chaque fonction f sa série de Fourier d'ordre n :

$$S_n(f) : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt}.$$

1. Montrer que

$$|||S_n||| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt$$

où $|||S_n|||$ désigne la norme d'opérateur de S_n, et $D_n : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ est le noyau de Dirichlet d'ordre n.

2. En déduire que $|||S_n|||$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini.

3. En déduire qu'il existe un sous-ensemble dense D de $C_{2\pi}$ tel que, pour tout f dans D, la série de Fourier de f ne converge pas uniformément vers une fonction continue.

C. Théorème de représentation de Riesz. (environ 5 points)

Soit E l'espace préhilbertien des suites réelles qui sont nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

4. Montrer que l'application $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ est linéaire et continue.

5. Existe-t-il un élément a de E tel que, pour tout $u \in E$, on a $\phi(u) = \langle u, a \rangle$.

6. Que peut-on en déduire sur E ?