
Examen partiel du 29 octobre 2008

Les calculatrices et tous les documents sont interdits.

Exercice 1.— Étude d'une courbe paramétrée (10 points)

On considère la courbe paramétrée définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$M(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(t) = t - 2 \sin(t) \\ y(t) = 4 \sin^2(t) \end{cases}$$

1. Quelle transformation géométrique envoie le point $M(t)$ sur le point $M(t + 2\pi)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$? Quelle transformation géométrique envoie le point $M(t)$ sur le point $M(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$?
2. Dresser le tableau de variation conjoint de $x(t)$ et $y(t)$ lorsque t parcourt l'intervalle $[0, \pi]$ (on pourra tracer le graphe de $t \mapsto \cos(t)$ pour trouver le signe de la dérivée de $x(t)$).
3. Tracer la courbe (on tracera au moins la portion de courbe correspondant à $t \in [-3\pi, 3\pi]$).

Exercice 2.— Développements limités et calculs de limites (6 points)

Soit a un nombre réel.

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 + x + x^2}$.
2. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction $g : x \mapsto \exp(ax)$ (les termes de ce développement limité dépendent bien sûr de a).
3. En déduire pour quelles valeurs de a la fonction $h : x \mapsto \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - \exp(ax)}{x^2}$ a une limite finie en $x = 0$. Précisez alors la valeur de cette limite.

Exercice 3.— Calcul d'une tangente à une courbe paramétrée (3,5 points)

Donner un vecteur directeur de la tangente au point $M(0)$ de la courbe paramétrée définie par $M(t) = \left(\cos(t), t - \frac{1}{1-t} \right)$. Donner une équation cartésienne de cette tangente.

Exercice 4.— Un calcul d'intégrale (3,5 points)

À l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_1^e \frac{1}{t + t(\ln t)^2} dt$.