

Flots de Smale en dimension 3 : présentations finies de voisinages invariants d'ensembles selles

F. Béguin et C. Bonatti*

Abstract

Etant donné un champ de vecteurs X d'une variété compacte de dimension 3, et un ensemble hyperbolique selle K de ce champ, nous considérons tous les voisinages *filtrants* de K : toute sous-variété à bord, dont le bord est transverse à X , dont K est le maximal invariant et dont l'intersection avec toute orbite de X est connexe. De tels voisinages sont en nombre fini à équivalence topologique près. Nous montrons que la classe d'équivalence topologique d'un champ en restriction à un tel voisinage admet une présentation combinatoire finie. Ceci passe par la construction d'un unique modèle du germe de X le long de K ; ce modèle est, en quelque sorte, la variété à bord de dimension 3 et le champ de Smale les plus simples parmi ceux réalisant le germe de dynamique considéré. Nous donnons alors une description combinatoire des chirurgies permettant de reconstruire les voisinages filtrants initiaux à partir du modèle.

Abstract

Given a vector field X on a compact 3-manifold, and a hyperbolic saddle-like set K of that vector field, we consider all the *filtering* of K : by such, we mean any submanifold which boundary is transverse to X , the maximal invariant of which is equal to K and which intersection with every orbit of X is connected. Up to topological equivalence, there is only a finite number of such neighbourhoods. We give a finite combinatorial presentation of the global dynamics on any such neighbourhood. A key step is the construction of a unique model of the germ of X along K ; this model is, roughly speaking, the simplest 3-dimensional manifold and the simplest Smale flow exhibiting the germ considered above. Then, we give a combinatorial description of the surgeries leading back to the initial filtering neighbourhoods.

Introduction

Rappels sur la stabilité structurelle

Au début des années soixante (voir [24]), le but de S. Smale pour les systèmes dynamiques était de classer un sous-ensemble, qu'il espérait ouvert et dense, des champs de vecteurs de classe C^1 des variétés compactes, à l'aide d'un nombre fini d'invariants combinatoires, modulo une relation d'équivalence qui retienne la dynamique qualitative globale des champs.

Si X et Y sont deux champs de vecteurs de classe C^1 sur des variétés compactes \mathcal{M} et \mathcal{N} , les champs X et Y seront dits *topologiquement équivalents* s'il existe un homéomorphisme h entre \mathcal{M} et \mathcal{N} envoyant orbite orientée de X sur orbite orientée de Y ; les dynamiques globales de X et Y sont alors les mêmes au travers du changement de coordonnées h (seulement continu). Un champ X sur une variété \mathcal{M} est dit C^1 -*structurellement stable* si, pour tout champ Y sur \mathcal{M} , suffisamment C^1 -proche de X , X et Y sont topologiquement équivalents. Les champs structurellement stables sont bien sûr les candidats naturels à une classification.

*François Béguin, Christian Bonatti, Laboratoire de Topologie (UMR 5584 du CNRS), Univ. de Bourgogne, BP 47870, 21078 DIJON Cedex — frbeguin@u-bourgogne.fr, bonatti@u-bourgogne.fr

Depuis la construction d'un modèle géométrique de l'attracteur de Lorenz (voir [13]), on sait cependant que, dès la dimension 3, les champs structurellement stables ne sont pas denses parmi les champs C^1 .

La caractérisation des dynamiques structurellement stables a été une longue aventure achevée par J.W. Robbin([22]), C. Robinson ([23]), R. Mañé ([16]), S. Hayashi([14])... Les notions clés de cette théorie sont l'hyperbolicité et la transversalité :

Un compact K invariant par le flot d'un champ de vecteur X , et disjoint des singularités de X est dit *hyperbolique* s'il existe une décomposition du fibré tangent de la variété le long de K en somme directe de trois sous-fibrés continus, $TM|_K = \mathbb{R}X \oplus E^s \oplus E^u$, et que la différentielle du flot (pour un temps fixé suffisamment grand) dilate uniformément les vecteurs tangents à E^u et contracte uniformément ceux tangents à E^s .

Pour un point x de K , on définit alors la variété stable forte $W^{ss}(x)$ comme l'ensemble des points y tels que la distance $d(X^t(y), X^t(x))$ tend vers zéro quand le temps t tend vers $+\infty$. Dans [15], les auteurs montrent que $W^{ss}(x)$ est une variété injectivement immergée dans la variété ambiante, et tangente en x à $E^s(x)$. L'orbite par le flot de la variété stable forte de x constitue sa variété stable (faible) notée $W^s(x)$. On définit de même la variété instable de x en remplaçant X par $-X$.

Rappelons qu'un point est dit *errant* s'il possède un voisinage U tel que U soit disjoint de $X^t(U)$ pour tout $t > 1$.

Voici le résultat qui conclut la théorie de la stabilité structurelle dans le cas des flots :

Théorème 0.1 (Hayashi [14], Robinson [23]) *Un champ de vecteurs d'une variété compacte est C^1 -structurellement stable si et seulement si :*

- *l'ensemble des points non errants est l'union d'un nombre fini de singularités hyperboliques et d'un compact sans singularité, hyperbolique, dans lequel les orbites périodiques sont denses (cette propriété s'appelle classiquement l'axiome A),*
- *le champ possède la propriété de transversalité forte : pour tout x, y non errants, $W^s(x)$ est transverse à $W^u(y)$.*

La démonstration de ce théorème passe par l'étude des propriétés des dynamiques hyperboliques qui a fait l'objet de la théorie de Smale dans les années 60-70 (λ -lemma, shadowing lemma, décompositions en pièces basiques, existence de filtrations...). Nous ne rappellerons que ce dont nous aurons explicitement besoin et nous renvoyons, par exemple à [25] ou [26], pour plus de détails. Nous appellerons désormais *champs et flots de Smale* les champs et flots vérifiant l'axiome A et la transversalité forte.

But de l'article

Cet article est un premier pas vers une classification, à équivalence topologique près, des champs de Smale X des variétés (compactes) \mathcal{M} de dimension 3. Présentons rapidement quel va être ce premier pas avant de donner des définitions plus précises.

La base d'une classification consiste à extraire d'un couple (\mathcal{M}, X) une information combinatoire finie sur la topologie de la variété \mathcal{M} et sur la dynamique du champ X qui caractérise entièrement la classe d'équivalence topologique de X sur \mathcal{M} : si un autre champ de Smale Y sur une variété \mathcal{N} donne lieu à la même information, alors X et Y sont topologiquement équivalents. Nous appellerons *présentation finie* de (\mathcal{M}, X) une telle information.

Par ailleurs, l'ensemble non-errant d'un champ de Smale se scinde en un nombre fini de *pièces basiques* (voir ci-dessous). La variété supportant le champ se décompose alors en sous-variétés à bords qui sont des voisinages de chacune des pièces basiques. Nous appellerons *voisinages filtrants* les plus parfaits (voir ci-dessous) de ces voisinages. L'objet de l'article est de donner des présentations finies de la dynamique d'un champ de Smale restreinte à un voisinage filtrant.

Nous allons maintenant être beaucoup plus formel et définir les notions de pièce basique et de voisinage filtrant. On pourra alors formuler très précisément le but de l'article.

Smale a défini un préordre sur l'ensemble des orbites non errantes : si x et y sont non errants, $x \prec y$ si $W^s(x) \cap W^u(y)$ est non vide. On définit alors les *pièces basiques* comme les éléments de la partition de l'ensemble non errant par la relation d'équivalence $x \sim y$ si $x \prec y$ et $x \succ y$. Les pièces basiques sont alors aussi les compacts hyperboliques transitifs maximaux et constituent donc une décomposition naturelle de l'ensemble non-errant. Les pièces basiques sont en nombre fini. Remarquons que le préordre défini ci-dessus induit un ordre partiel sur l'ensemble des pièces basiques que l'on appelle généralement *ordre de Smale*.

On pourra en fait comprendre non seulement les dynamiques au voisinage des différentes pièces basiques, mais également la façon dont certaines de ces dynamiques se mélangent. On introduit pour cela la notion d'ensemble hyperbolique saturé : un compact hyperbolique K est *saturé* si $K = W^s(K) \cap W^u(K)$. Les pièces basiques sont les compacts hyperboliques saturés et transitifs. Un ensemble hyperbolique saturé est l'union d'un ensemble fini de pièces basiques et de l'intersection de leurs variétés invariantes.

L'existence de *filtrations* pour un champ de Smale peut se formuler comme suit. Etant donné un champ de Smale X sur une variété \mathcal{M} et en notant K_1, \dots, K_n les pièces basiques de X , la variété \mathcal{M} , peut s'écrire comme l'union de sous-variétés à bords M_1, \dots, M_n telles que :

- (i) M_i est un voisinage de K_i et le maximal invariant $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} X^t(M_i)$ de M_i est égal à K_i ,
 - (ii) le champ X est transverse au bord de M_i ,
 - (iii) l'intersection de toute orbite de X avec M_i est connexe,
- et telles que l'intersection de M_i avec M_j est soit vide, soit réduite à des composantes de bords que M_i et M_j ont en commun.

Etant donné un ensemble hyperbolique K , une sous-variété à bord M vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) sera appelée *voisinage filtrant* de K . Les voisinages filtrants des pièces basiques sont les pièces naturelles du jeu de reconstruction de la variété globale \mathcal{M} munie du champ X : voir les travaux de J. Franks et K. de Rezende ([11], [8], ces auteurs utilisent le terme de "voisinages isolants") qui visent à déterminer la topologie de la variété obtenue en recollant de tels voisinages filtrants.

Tout ensemble hyperbolique saturé possède un voisinage filtrant (obtenu comme union de voisinages filtrants des pièces basiques qu'il contient) et n'en possède, à équivalence topologique, près qu'un nombre fini (voir partie 1.1). Notons d'autre part que la connaissance d'une dynamique sur un voisinage filtrant suffit à déterminer cette dynamique sur un voisinage invariant à équivalence topologique près (conséquence de (ii) et (iii)). C'est pour toutes ces raisons que nous cherchons dans cet article à décrire la dynamique d'un champ de Smale en restriction à un voisinage filtrant.

Au moins dans le cas des flots de Smale en dimension 3, les pièces basiques ont une dimension topologique bien définie (la dimension topologique locale au voisinage d'un point ne dépend pas de ce point). Dans le cas des flots d'Anosov transitifs (qui constituent des pièces basiques de dimension 3), des travaux de D. Fried (voir [12]) conduisent à une présentation finie. Dans le cas des pièces basiques de dimension 2 (attracteurs ou répulseurs hyperboliques), des travaux de R. Williams ([27]), puis de J. Christy ([7]) montrent la voie d'une présentation finie du bassin d'attraction (ou de répulsion) de la pièce basique.

Nous nous intéresserons dans cet article aux ensembles hyperboliques saturés de dimension 1 (le long desquels ni la direction stable forte, ni la direction instable forte ne sont triviales), que nous appellerons plus rapidement des *ensembles selles saturés*.

Ainsi, le but précis de l'article est de *décrire des présentations combinatoires finies de n'importe quel champ de Smale en dimension 3 en restriction à un voisinage filtrant quelconque d'ensemble selle*.

Présentation des résultats

Nous allons maintenant esquisser le chemin que nous suivrons pour parvenir à de telles présentations finies.

Depuis Bowen, on sait que la restriction d'un champ de vecteurs à une pièce basique de dimension 1 peut être décrite à équivalence topologique près par la *matrice d'incidence* d'une *partition de Markov*. Cependant, si deux dynamiques hyperboliques décrites par des partitions de Markov ayant même matrice d'incidence sont équivalentes en restriction à ces ensembles hyperboliques, l'homéomorphisme réalisant l'équivalence ne peut en général pas s'étendre à un petit voisinage de ces ensembles.

Pour les difféomorphismes de Smale (c'est à dire C^1 -structurellement stables) des surfaces compactes, C. Bonatti et R. Langevin ont introduit une combinatoire permettant de décrire la dynamique globale à équivalence topologique près (voir [5]). Si on considère une partition de Markov d'une pièce basique K (ou plus généralement d'un ensemble *hyperbolique saturé*) constituée de "vrais" rectangles plongés dans la surface, on définit le *type géométrique* de cette partition qui décrit l'ordre et le sens des intersections des rectangles et de leurs images. Les auteurs montrent que le type géométrique caractérise la dynamique sur un voisinage invariant canonique (unique à conjugaison près) de K : le *domaine* de K . On peut en déduire que le germe de difféomorphisme le long de K caractérise la dynamique (à conjugaison topologique près) sur le domaine de K .

Nous allons voir que la situation est assez différente pour les champs de vecteurs en dimension 3. Précisément, nous appellons *germe d'un champ X le long d'un compact invariant K* la classe du couple (X, K) pour la relation d'équivalence suivante : $(X, K) \sim (Y, L)$ s'il existe un voisinage U de K et un voisinage V de L tel que les restrictions de X et Y à U et V soient topologiquement équivalentes via un homéomorphisme envoyant K sur L . Nous noterons $[X, K]$ le germe de X le long de K .

Nous verrons (voir l'appendice) que le germe d'un champ le long d'un ensemble selle saturé K (possédant un point homocline) ne caractérise aucun voisinage invariant canonique (même à équivalence topologique près) : pour tout voisinage invariant \mathcal{U} d'un ensemble selle saturé K possédant un point homocline, il existe une variété munie d'un champ de Smale Y possédant un ensemble selle L , tel que X et Y soient topologiquement équivalents en restriction à des petits voisinages de K et L , mais que L ne possède aucun voisinage invariant sur lequel Y soit topologiquement équivalent à la restriction de X à \mathcal{U} .

Pour contourner ce problème, nous montrons que le germe du champ X le long de l'ensemble selle saturé K détermine de façon unique, à équivalence topologique près, une variété à bord munie d'un flot transverse au bord qui est en un certain sens la plus simple parmi celles qui réalisent le germe $[X, K]$ comme ensemble selle d'un flot de Smale. Plus précisément, on pose la définition suivante :

Définition 0.2 *Soit X un champ de vecteurs sur une variété compacte orientable de dimension 3 et K un ensemble selle de X . Nous appellerons modèle du germe $[X, K]$ tout couple (N, Y) où N est une variété de dimension 3 orientable compacte à bord, et où Y est un champ de vecteurs sur N transverse au bord, tels que :*

- i) Le maximal invariant de Y dans N est un ensemble selle K_Y tel que le germe $[Y, K_Y]$ est égal au germe $[X, K]$.*
- ii) Notons $\partial_1 N$ l'union des composantes connexes du bord de N où Y est rentrant dans N ; alors tout cercle plongé dans $\partial_1 N$, disjoint de $W^s(K_Y)$ borde un disque dans $\partial_1 N$ également disjoint de $W^s(K_Y)$.*
- iii) Toute composante connexe de N contient un point de K_Y .*

et le premier but de cet article est de montrer :

Théorème 0.3 *Etant donné un ensemble selle saturé K d'un champ de Smale X sur une variété compacte orientable de dimension 3, il existe un unique modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) de $[X, K]$ à équivalence topologique près.*

Remarque. Le modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) peut être naturellement complété en une variété ouverte sans bord muni d'un flot complet. Si on note \tilde{K} le maximal invariant de \tilde{M} , l'ensemble selle saturé K possède alors un voisinage invariant dans \mathcal{M} topologiquement équivalent à un voisinage invariant de \tilde{K} dans cette variété ouverte.

On veut alors montrer que le modèle du germe d'un champ le long d'un ensemble selle admet une présentation combinatoire finie. Pour cela, on s'intéresse à de "bonnes" partitions de Markov d'une section transverse de K , qui sont des partitions par des rectangles plongés dans une section transverse. Les intersections entre les rectangles d'une telle partition et leur premier retour sur la section sont codées par une combinatoire finie : le *type géométrique* de la partition, défini de façon analogue à celui de [5]. Nous montrons alors que le type géométrique caractérise le modèle :

Théorème 0.4 *Soient deux champs de Smale X et Y sur deux variétés compactes orientables \mathcal{M} et \mathcal{N} de dimension 3 et soient K et L des ensembles selles saturés de X et Y . On suppose que K et L admettent des bonnes partitions de Markov de même type géométrique.*

Alors les modèles de $[X, K]$ et de $[Y, L]$ sont topologiquement équivalents. En particulier, il existe des voisinages invariants de K et L en restriction auxquels les champs X et Y sont topologiquement équivalents.

Soit K un ensemble selle saturé d'un flot de Smale X de \mathcal{M} . La construction que nous effectuerons d'un modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) de $[X, K]$, montrera aussi un moyen de reconstruire la restriction de X à tout voisinage filtrant M par un nombre fini de chirurgies topologiques simples loin de l'ensemble K . Nous appellerons *attachement d'anse* la chirurgie suivante : on considère deux disques disjoints sur le bord d'entrée de \tilde{M} dont les orbites positives sortent de \tilde{M} en temps fini. L'orbite de ces deux disques est alors topologiquement équivalente à l'union de deux cylindres pleins disjoints $D^2 \times [0, 1]$ munis du champ $\frac{\partial}{\partial t}$. On ôte alors ces deux cylindres pleins à \tilde{M} et on recolte les deux bords tangents ainsi créés. Remarquons que cela revient à attacher une anse au bord d'entrée de \tilde{M} (voir la partie 3.1).

On verra que la classe d'équivalence topologique du résultat d'un attachement d'anse sur des cercles C et C' ne dépend que de la composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(\tilde{K})$ (le bord d'entrée de \tilde{M} privé de la variété stable de \tilde{K}) dans laquelle se trouve chacun des cercles C et C' .

Proposition 0.5 *Si M est un voisinage filtrant de K tel que toute composante connexe de M rencontre K , on peut passer du modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) de $[X, K]$ à un couple topologiquement équivalent à (M, X) par un nombre fini d'attachement d'anses bien choisis.*

On donne alors une présentation finie de tout couple (M, X) o M est un voisinage filtrant d'un ensemble selle saturé K de X : cette présentation est la donnée du type géométrique d'une partition de Markov de K et d'un nombre fini de mots codant les composantes connexes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(\tilde{K})$ contenant les cercles nécessaires aux attachements d'anses. Nous expliquerons comment réaliser un tel codage via le type géométrique de la partition de Markov (voir la partie 3.2) et montrerons que l'on obtient ainsi une présentation finie de tout voisinage filtrant de K (théorème 3.9)

Remarque. Notre définition d'un "attachement d'anse" diffère de celle employée par d'autres auteurs. Par exemple, "nos" attachements d'anses sont différents de ceux qu'Asimov et Morgan ([1],[17]) utilisent pour montrer l'existence de flots Morse-Smale sur certaines variétés.

Pour obtenir une classification des flots de Smale (d'abord sans attracteur ou répulseur non triviaux), il faudrait :

1) Une présentation finie de ces flots.

Puisqu'on sait donner une présentation finie d'un voisinage filtrant M de l'ensemble selle maximal (c'est-à-dire l'union de toutes les pièces basique selles et des interssections de leurs variétés invariantes), il ne reste qu'à trouver un codage combinatoire de la façon dont on recolle sur M des voisinages filtrants des attracteurs, des répulseurs et des singularités selles.

2) Déterminer quelles présentations finies abstraites correspondent effectivement à des flots de Smale sur des variétés compactes de dimension 3.

Dans [3], nous montrons que tout type géométrique abstrait est le type géométrique d'une partition de Markov d'un ensemble selle d'un flot de Smale en dimension 3. (Ce résultat va dans le sens contraire de ceux de C. Bonatti et E. Jeandenans qui ont montré que de nombreux types géométriques abstraits n'étaient pas réalisables par des ensembles selles de difféomorphismes de surfaces compactes (voir [5]).

3) Savoir décider si deux présentations finies correspondent ou non au même flot de Smale. Des travaux de W. Parry et D. Sullivan ([20]), puis de J. Franks ([10]) donne un critère simple qui permet de décider si les suspensions de deux shifts sont topologiquement équivalentes ou non. Pour les difféomorphismes des surfaces, il existe un algorithme qui décide si deux types géométriques différents correspondent ou non au même germe d'ensemble selle ([2]).

Par contre, on ne connaît pas, pour l'instant, de moyen de décider si deux types géométriques différents donnent lieu au même germe de flot le long d'un ensemble selle.

Dans la suite, sans qu'on le précise à chaque fois, les variétés seront compactes orientables et de dimension 3.

1 Modèle d'un ensemble selle

Le but de cette partie est la démonstration du théorème 0.3, c'est à dire de l'existence d'un modèle, unique à équivalence topologique près, du germe d'un champ de Smale X le long d'un ensemble selle saturé K .

1.1 Voisinages filtrants

Rappelons que l'ensemble non errant d'un flot de Smale X se décompose en un nombre fini de pièces basiques partiellement ordonnées par l'ordre de Smale (que l'on note \prec).

Une indexation $\{\Lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de l'ensemble des pièces basiques de X est dite croissante pour l'ordre de Smale si $\Lambda_i \prec \Lambda_j$ implique $i < j$. Une telle indexation sera également appelée *complétion de l'ordre de Smale*.

Pour toute indexation $\{\Lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de l'ensemble des pièces basiques, croissante pour l'ordre de Smale, il existe une filtration $\{\Sigma_i\}_{0 \leq i \leq n}$ adaptée à cette indexation. Ceci signifie que :

— Les Σ_i sont des sous-variétés de dimension 3 compactes à bords. De plus, les Σ_i peuvent être choisies telles que X soit transverse à leur bord et rentrant dans Σ_i .

— On a $\Sigma_0 = \emptyset$, $\Sigma_n = \mathcal{M}$ et, pour tout i , $\Sigma_i \subset \text{int}(\Sigma_{i+1})$.

— Pour tout i , le maximal invariant de $\Sigma_i \setminus \text{int}(\Sigma_{i-1})$ est égal à Λ_i .

(L'existence de *fonctions de Lyapunov*, montrée dans [21], implique immédiatement l'existence de filtrations comme définies ci-dessus. Cependant, l'idée de l'existence de filtrations pour les difféomorphismes est bien antérieure, voir [25].)

Dans [5], les auteurs montrent (proposition 1.2.7 montrée pour les difféomorphismes, mais la transcription pour les champs de vecteurs est immédiate) que l'ensemble I des pièces basiques d'un ensemble selle saturé K de X forme un intervalle pour l'ordre de Smale (c'est-à-dire, si deux pièces basiques sont dans I et s'il existe une pièce basique comprise entre

les deux pour l'ordre de Smale, alors cette troisième pièce basique est également dans I). L'ensemble selle K est alors le saturé de l'union des pièces basiques de I .

Pour tout ensemble selle saturé K de X , il existe donc une indexation $\{\Lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de l'ensemble des pièces basiques de X qui est croissante pour l'ordre de Smale et telle que l'ensemble des pièces basiques de K soit un intervalle $\Lambda_k, \dots, \Lambda_l$ pour cet indexation. On montre alors facilement que, pour toute filtration $\emptyset = \Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \dots \subset \Sigma_n = M$ adaptée à l'indexation ci-dessus, K est le maximal invariant de $M = \Sigma_l \setminus \text{int}(\Sigma_{k-1})$. En effet, tout point de K a son α et son ω -limite dans M et son orbite ne peut donc sortir de M ; réciproquement, tout point du maximal invariant de M a son ensemble α et son ensemble ω -limite dans des pièces basiques de M et est donc dans l'intersection des variétés invariantes de ces pièces basiques, c'est à dire dans K .

Définition 1.1 *Un voisinage filtrant de K sera une sous-variété à bord M de \mathcal{M} dont le bord est transverse au champ X , telle que le maximal invariant de M soit K et telle que l'intersection de toute orbite de X avec M soit connexe.*

On appellera bord d'entrée de M et on notera $\partial_1 M$ l'union des composantes connexes du bord de M le long desquelles X est rentrant dans M . On définit de même le bord de sortie $\partial_2 M$ de M .

Remarques.

— Cette définition permet aussi de considérer des voisinages filtrants d'ensembles selles de façon intrinsèque, sans référence à une variété ambiante sans bord : un *voisinage filtrant intrinsèque* de K sera une variété compacte à bords N , munie d'un champ Y transverse au bord, et telle que le maximal invariant de N pour le flot de Y soit un ensemble selle L tel que $[X, K] = [Y, L]$.

— Tout voisinage filtrant intrinsèque N d'un ensemble selle K , peut être plongé dans une variété \mathcal{M} , compacte, sans bord, munie d'une extension de Smale du champ de N tel que N soit un voisinage filtrant de K dans \mathcal{M} (voir, par exemple, [9, corollaire 2.2] ou l'appendice). L'ensemble K est alors saturé dans \mathcal{M} .

— Ceci montre que, si K est un ensemble selle (non nécessairement saturé) admettant un voisinage isolant à bord transverse au champ, K peut être plongé comme ensemble saturé d'une variété sans bord.

Nous venons de voir que tout ensemble saturé possède au moins un voisinage filtrant. Le reste de cette sous-partie a pour but d'esquisser une démonstration de la proposition suivante (qui nous semble faire partie du folklore) :

Proposition 1.2 *Soit K un ensemble selle saturé d'un champ de Smale X sur une variété \mathcal{M} . Alors, il n'existe, à équivalence topologique près, qu'un nombre fini de voisinage filtrants de K dans \mathcal{M} .*

Démonstration : On note n le nombre des pièces basiques de X . Il n'existe qu'un nombre fini d'indexation de ces n pièces basiques; en particulier, il n'existe qu'un nombre fini d'indexations croissantes pour l'ordre de Smale. Pour chaque indexation ω de l'ensemble des pièces basiques de X , croissante pour l'ordre de Smale, on fixe *arbitrairement* une filtration $\Sigma_0^\omega \subset \Sigma_1^\omega \subset \dots \subset \Sigma_n^\omega$ adaptée à l'indexation ω . On a alors le lemme suivant :

Lemme 1.3 *Pour tout voisinage filtrant M de K , il existe une indexation ω_M de l'ensemble des pièces basiques de X , croissante pour l'ordre de Smale, il existe deux entiers i, j vérifiant $0 \leq i < j \leq n$, tels que la restriction de X à M est topologiquement équivalente à la restriction de X à certaines composantes connexes de $\Sigma_j^{\omega_M} \setminus \text{int}(\Sigma_i^{\omega_M})$.*

($\Sigma_0^{\omega_M} \subset \dots \subset \Sigma_n^{\omega_M}$ désigne la filtration que nous avons associée ci-dessus à l'indexation ω_M .)

Admettons provisoirement ce lemme et terminons la preuve de la proposition 1.2. Nous avons déjà remarqué qu'il n'existe qu'un nombre fini d'indexations des n pièces basiques de X croissantes pour l'ordre de Smale. Il n'existe qu'un nombre fini de couple d'entiers (i, j) vérifiant $0 \leq i < j \leq n$. Enfin, pour toute indexation ω_M croissante pour l'ordre de Smale et tout couple (i, j) , la variété compacte à bord $\Sigma_j^{\omega_M} \setminus \text{int}(\Sigma_i^{\omega_M})$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Le lemme 1.3 construit donc une injection de l'ensemble des classes d'équivalences de voisinages filtrant de K dans un ensemble fini. \square

Démonstration du lemme 1.3 : Soit M un voisinage filtrant de K . Remarquons que, pour toute pièce basique Λ de X qui n'est pas dans K , les deux propriétés suivantes s'excluent mutuellement :

— La variété stable de Λ rencontre M . Dans ce cas, on dira que Λ est *inférieure* à M .

— La variété instable de Λ rencontre M . Dans ce cas, on dira que Λ est *supérieure* à M . (En effet, d'après le λ -lemma, si $W^s(\Lambda)$ et $W^u(\Lambda)$ coupent M alors soit $\Lambda \subset M$, soit il existe une orbite dont l'intersection avec M n'est pas connexe.)

On dira qu'une pièce basique est *indifférente* à M si elle n'est pas dans K et si elle n'est ni inférieure, ni supérieure à M . On note A_M , R_M et I_M les ensembles de pièces basiques inférieures, supérieures et indifférentes à M . Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.4 *Il existe indexation ω_M des pièces basiques de X , croissante pour l'ordre de Smale et telle que :*

- A_M et R_M sont des intervalles de pièces basiques pour l'indexation ω_M ,
- suivant l'ordre de ω_M , les pièces basiques de A_M sont inférieures à celles de K , qui sont inférieures à celles de I_M , qui sont inférieures à celles de R_M .

Démonstration : D'après le λ -lemma, toute pièce basique inférieure à une pièce basique inférieure à M est inférieure à M (de même en remplaçant inférieure par supérieure). On en déduit que A_M et R_M sont des intervalles.

Toute pièce basique inférieure (respectivement supérieure) à K est inférieure (respectivement supérieure) à M . En particulier, toute pièce basique de I est indifférente à celles de K , supérieure ou indifférente à celles de A_M et inférieure ou indifférente à celles de R_M . On peut donc trouver une indexation croissante pour l'ordre de Smale et possédant les propriétés souhaitées. \square

Fin de la démonstration du lemme 1.3. On considère l'indexation ω_M donnée par le lemme 1.4. On note i le plus grand entier tel que $\Sigma_i^{\omega_M}$ est disjoint de K et j le plus petit entier tel que $\Sigma_j^{\omega_M}$ contient K .

Le bord de $\Sigma_i^{\omega_M}$ rencontre en un et un seul point toute orbite dont l'ensemble α -limite est dans $K \cup I_M \cup R_M$ et dont l'ensemble ω -limite est dans A_M . On en déduit que le bord de $\Sigma_i^{\omega_M}$ rencontre en un point et un seul l'orbite de tout point de $\partial_2 M$ (l' α -limite de tout point de $\partial_2 M$ est incluse dans $K \cup R_M$ et son ω -limite est incluse dans A_M). Donc il existe une isotopie de \mathcal{M} le long des orbites de X qui déforme la variété à bord M en une variété à bord M' , telle que $\partial_2 M'$ soit inclus dans $\partial \Sigma_i^{\omega_M}$.

Alors, d'une part $\partial_2 M'$ est ouvert fermé dans $\partial \Sigma_i^{\omega_M}$, c'est-à-dire $\partial_2 M'$ est une union de composantes connexes de $\partial \Sigma_i^{\omega_M}$. D'autre part, M' un voisinage filtrant de K et le couple $(M', X_{|M'})$ est topologiquement équivalent au couple $(M, X_{|M})$ (car M' est déduit de M par une isotopie le long des orbites de X).

Le bord de $\Sigma_j^{\omega_M}$ rencontre en un et un seul point toute orbite dont l'ensemble α -limite est dans $I_M \cup R_M$ et dont l'ensemble ω -limite est dans $A_M \cup K_M$. On en déduit que le bord de $\Sigma_j^{\omega_M}$ rencontre en un point et un seul l'orbite de tout point de $\partial_1 M'$ et que le segment d'orbite qui va de $\Sigma_j^{\omega_M}$ à $\partial_1 M'$ est disjoint de $\partial_2 M'$. Donc il existe une isotopie de \mathcal{M} le long du flot égale à l'identité au voisinage de $\partial_2 M'$ et qui déforme M' en M'' , tel que $\partial_1 M''$ soit une union de composantes de $\partial \Sigma_j^{\omega_M}$.

On en déduit que M'' est l'union de certaines composantes connexes de $\Sigma_j^{\omega_M} \setminus \text{int}(\Sigma_i^{\omega_M})$. D'autre part, le couple $(M'', X|_{M''})$ est topologiquement équivalent au couple $(M, X|_M)$. \square

1.2 Construction d'un modèle

On considère un champ de Smale X sur une variété compacte \mathcal{M} de dimension 3 et K un ensemble selle saturé de X . Pour construire un modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) , nous allons considérer un voisinage filtrant M de K dans \mathcal{M} et nous allons découper M le long de cylindres tangents au champ X , allant directement du bord d'entrée de M à son bord de sortie. Ces cylindres sont les orbites dans M de cercles plongés dans le bord d'entrée de M et disjoints de la variété stable de K . Ensuite, nous tuons les bords tangents ainsi créés en y collant des cylindres pleins $D^2 \times [0, 1]$. Nous effectuerons cette chirurgie tant qu'il existera sur le bord d'entrée des cercles disjoints de $W^s(K)$ ne bordant pas un disque disjoint de $W^s(K)$. La preuve consiste essentiellement à montrer que le processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes.

Nous avons, dans un premier temps, besoin d'étudier l'intersection de la variété stable de K avec le bord d'entrée de M .

Rappels. (On rappelle ici des propriétés classiques des variétés invariantes des points d'un ensemble selle saturé tel K ; pour des preuves, on renvoie par exemple à [26, chapitre 6]).

En plus des notions de variété stable et stable forte (globales) d'un point de K (définies dans l'introduction), nous aurons besoin de notions de variétés stables locale. Pour ε assez petit, la variété stable locale $W_\varepsilon^s(x)$ est définie comme l'ensemble des points y tel que $d(X^t(x), X^t(y))$ est inférieure à ε pour tout t positif. C'est un disque, inclus dans $W^s(x)$ et centré en x . La variété stable forte locale $W_\varepsilon^{ss}(x)$ est l'intersection de $W_\varepsilon^s(x)$ et de $W^{ss}(x)$. C'est un segment de $W^{ss}(x)$, centré en x .

Pour ε suffisamment petit, la variété stable locale $W_\varepsilon^s(K) = \bigcup_{x \in K} W_\varepsilon^s(x)$ est égale à l'intersection de $W^s(K) = \bigcup_{x \in K} W^s(x)$ avec la boule de rayon ε autour de K . Elle forme une lamination compacte en disques D^2 , plongée dans un voisinage de K .

Enfin, tout ensemble selle saturé possède une structure dite de *produit local* : pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\delta > 0$ et tel que, si x et y sont dans une même boule B de diamètre δ (dite *boule de produit local*), alors $W_\varepsilon^{ss}(x)$ coupe $W_\varepsilon^u(y)$ en un point et un seul.

Lemme 1.5 *La variété stable de K induit sur le bord d'entrée de M une lamination \mathcal{L}_1^s de dimension 1 compacte.*

Démonstration : Le fait que M soit un voisinage filtrant de K implique que $\bigcap_0^{+\infty} X^{-t}(M) = W^s(K) \cap M$ (car l'orbite positive de tout point de M dont l'ensemble α -limite n'est pas contenue dans K sort de M et n'y revient plus). En particulier, $W^s(K) \cap M$ et, a fortiori, $W^s(K) \cap \partial_1 M$ est compact.

Comme rappelé ci-dessus, la variété stable locale $W_\varepsilon^s(K)$ est une lamination (en disques D^2) plongée dans voisinage U de K .

Par définition d'un voisinage isolant, on a $\bigcap_{\mathbb{R}} X^t(M) = K$, donc, par compacité de M , il existe T tel que $\bigcap_{-T}^T X^t(M) \subset U$. En particulier, $X^T(W^s(K) \cap \partial_1 M)$ est inclus dans U et donc dans $W_\varepsilon^s(K)$. On en déduit que $W^s(K) \cap \partial_1 M$ est l'image par X^{-T} de $X^T(\partial_1 M) \cap W_\varepsilon^s(K)$.

Par ailleurs, $\partial_1 M$ est transverse au champ X . La surface compacte $X^T(\partial_1 M)$ est donc transverse à la lamination $W_\varepsilon^s(K)$. Par conséquent, $W^s(K)$ induit une lamination unidimensionnelle plongée dans $\partial_1 M$. \square

Nous allons maintenant avoir besoin de la notion de variété invariante *bord* et de quelques propriétés de ces bords. En dimension 3, chaque feuille de la variété instable d'un ensemble selle disconnecte localement la variété ambiante ; parler des deux cotés (locaux) d'une feuille de $W^u(K)$ a donc un sens. De façon informelle, une feuille \mathcal{F} de $W^u(K)$ est *bord* si elle n'est

accumulée par $W^u(K)$ qu’au plus d’un seul côté. Formellement, une feuille \mathcal{F} de $W^u(K)$ est bord, si il existe un segment I , transverse à \mathcal{F} , ayant une extrémité sur \mathcal{F} et dont l’intérieur est disjoint de $W^u(K)$ (la remarque ci-dessous montre que cette définition formelle exprime bien l’idée intuitive que “ \mathcal{F} n’est pas accumulée qu’au plus d’un côté”).

Remarque. Si K est un ensemble selle saturé d’un champ de Smale, il existe un feuilletage d’un voisinage de $W^u(K)$ telle que les variétés instables des points de K sont des feuilles de ce feuilletage (voir, par exemple, [5, lemme 5.3.4] pour le cas des difféomorphismes, le cas des champs de vecteurs est identique). Etant donné une feuille \mathcal{F} de $W^u(K)$, l’existence d’un segment transverse à \mathcal{F} , ayant son extrémité en un point x de \mathcal{F} et d’intérieur disjoint de $W^u(K)$ ne dépend donc pas du point x .

S. Newhouse et J. Palis ont prouvé un lemme essentiellement identique au lemme suivant dans le cas des difféomorphismes (voir [18]). Comme ce lemme est fondamental dans la suite, nous transcrivons rapidement la démonstration donnée dans [5, proposition 2.1.1] dans le cas des flots en dimension 3 :

Lemme 1.6 (Newhouse, Palis) *Tout ensemble hyperbolique saturé d’un flot de Smale d’une variété compacte de dimension 3 orientable ne possède qu’un nombre fini de feuilles instables bords. De plus, ces feuilles sont toutes des variétés instables d’orbites périodiques.*

Pour toute orbite \mathcal{O} de K , on appellera *séparatrice stable* une composantes connexes de $W^s(\mathcal{O}) \setminus \mathcal{O}$. Une séparatrice stable disjointe de K est dite *libre*.

Remarques.

— Toute feuille de $W^s(K)$ est homéomorphe à un cylindre, à un ruban de Moebius ou à un plan (selon que cette feuille est la variété stable d’une orbite périodique sans twist, avec twist ou n’est pas la variété stable d’une orbite périodique). Dans le premier cas, le flot induit alors sur ce cylindre un feuilletage avec une feuille fermée (l’orbite périodique) qui disconnecte le cylindre en deux séparatrices. Ces séparatrices sont des cylindres feuilletés trivialement en droites par les orbites. Dans le deuxième cas, il n’y a qu’une seule séparatrice qui est également un cylindre trivialement feuilleté en droites par le flot. Enfin, dans le troisième cas (feuille stable qui n’est pas la variété stable d’une orbite périodique), le feuilletage induit par le flot est un feuilletage trivial du plan en droites.

— La variété instable d’une orbite périodique est bord si et seulement si une des séparatrices stables est disjointe de K , c’est-à-dire libre. Dans ce cas, l’intersection de cette séparatrice avec $\partial_1 M$ est une feuille compacte de la lamination \mathcal{L}_1^s (En effet, toute orbite sur cette séparatrice coupe transversalement $\partial_1 M$ en un et un seul point et l’espace des orbites sur cette séparatrice est un cercle).

Démonstration du lemme 1.6 : Le lemme résulte essentiellement de la structure de produit local de K (voir rappels page 9).

• Tout d’abord, on montre par l’absurde que l’ensemble des orbites périodiques de K ayant une séparatrice stable libre est fini. En particulier, l’ensemble des orbites périodiques appartenant à une feuille instable bord est fini.

Dans le cas contraire, on aurait nécessairement une accumulation de telles orbites. On peut alors considérer trois segments \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 et \mathcal{O}_3 d’orbites périodiques de K , distinctes, appartenant à des feuilles instables bords et coupant un même ouvert U de produit local (voir rappels), près d’un point p de K . Les segments \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 et \mathcal{O}_3 étant sur des orbites périodiques distinctes, deux quelconques de ces segments ne peuvent se situer ni sur une même feuille stable, ni sur une même feuille instable. Considérons les points d’intersection p_1 , p_2 et p_3 des variétés instables locales de \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 et \mathcal{O}_3 avec la variété stable forte locale de p . Quitte à interchanger \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 et \mathcal{O}_3 , on peut supposer que p_2 est entre p_1 et p_3 . Alors,

si on a choisi les segments d'orbites \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 et \mathcal{O}_3 passant suffisamment près de p , les deux séparatrices stables de \mathcal{O}_2 intersectent respectivement les variétés instables de \mathcal{O}_1 ou \mathcal{O}_3 (voir la figure 1). Comme K est saturé, tout point d'intersection d'une séparatrice stable de \mathcal{O}_2 avec une séparatrice instable de \mathcal{O}_1 ou \mathcal{O}_3 est dans K . En particulier, aucune des séparatrices stables de \mathcal{O}_2 n'est libre, ce qui contredit la remarque ci-dessus et conduit à une absurdité.

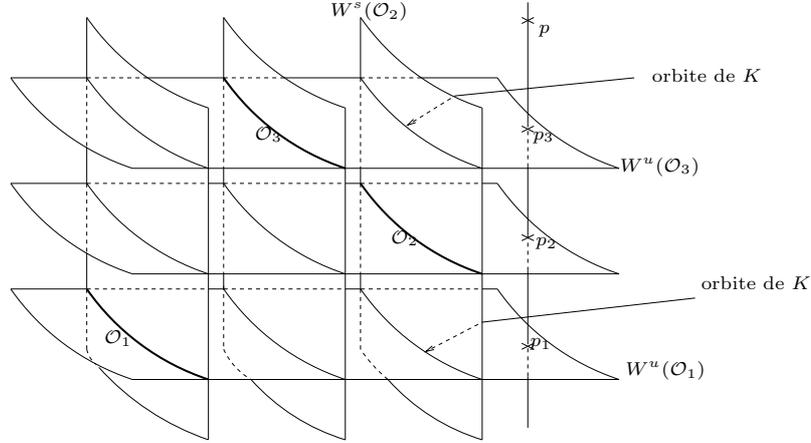


Figure 1: Trois orbites périodiques dans un voisinage à structure de produit local

- On montre ensuite que, si \mathcal{O} est une orbite dont l'une des séparatrices stables est libre, alors \mathcal{O} est périodique.

En effet, pour un point quelconque x d'une orbite \mathcal{O} , on a une suite de temps $t_n \rightarrow +\infty$ tel que les $x_n \equiv X^{t_n}(x)$ sont dans un voisinage de produit local U . Si \mathcal{O} a une séparatrice stable libre, le preuve du point précédent montre que les x_n sont alors situés dans au plus deux feuilles instables locales faibles. Quitte à extraire une sous-suite, les x_n sont dans une seule feuille instable locale faible. Mais une suite de points de la forme $X^{t_n}(x)$ o $t_n \rightarrow +\infty$ ne peut rester dans une même feuille instable locale faible que si tout ces points se trouvent sur une orbite périodique, ce qui conclut.

- Enfin, on montre que toute feuille instable bord \mathcal{F} est la variété instable d'une orbite \mathcal{O} ayant une séparatrice stable libre.

En effet, soit \mathcal{F} une feuille instable bord et soit x un point de $\mathcal{F} \cap K$; il existe alors $\varepsilon > 0$ tel qu'une des séparatrices de $W_\varepsilon^{ss}(x)$ est disjointe de K (on appelle *séparatrice* de $W_\varepsilon^{ss}(x)$ les composantes de $W_\varepsilon^{ss}(x) \setminus \{x\}$). Par conséquent, si on a choisi ε assez petit, pour tout $t < 0$, $W_\varepsilon^{ss}(X^t(x)) \subset X^t(W_\varepsilon^{ss}(x))$ et l'une des deux composantes de $W_\varepsilon^{ss}(X^t(x))$ est donc disjointe de K .

Soit maintenant y un point de l' α -limite de x . Supposons qu'aucune des deux séparatrices de $W^{ss}(y)$ n'est disjointe de K . Alors il existe $\tau < 0$ tel que chacune des deux séparatrices $W_{\frac{\delta}{2}}^{ss}(X^{-\tau}(y))$ intersecte K , disons en des points z_1 et z_2 . Par ailleurs, il existe $t_0 < 0$, les points $X^{t_0}(x)$ et $X^{-\tau}(y)$ sont distant de moins de $\frac{\delta}{2}$. Les points $X^{t_0}(x)$ et z_1 ainsi que les points $X^{t_0}(x)$ et z_2 sont alors distant de moins de δ . La structure de produit locale implique alors que $W_\varepsilon^u(z_1)$ et $W_\varepsilon^u(z_2)$ coupent toute deux $W_\varepsilon^{ss}(X^{t_0}(x))$. Quitte à choisir δ petit par rapport à ε , les points d'intersections sont nécessairement dans chacune des deux séparatrices de $W_\varepsilon^{ss}(X^{t_0}(x))$. Comme K est saturé (et que z_1 et z_2 sont dans K), on en déduit que qu'aucune des deux séparatrices de $W_\varepsilon^{ss}(X^{t_0}(x))$ n'est disjointe de K , ce qui mène à une contradiction. On a donc montré que l'une des séparatrices stables de y est libre. Par suite, l'orbite de y est périodique.

L' α -limite d'une orbite est connexe. Par conséquent, l' α -limite de x est réduite à l'orbite de y , c'est-à-dire que x appartient à la variété instable de l'orbite de y . \square

Lemme 1.7 *Toute feuille compacte de la lamination \mathcal{L}_1^s est l'intersection d'une séparatrice stable libre avec $\partial_1 M$. En particulier, \mathcal{L}_1^s ne possède qu'un nombre fini de feuilles compactes.*

Démonstration : D'après la remarque précédente, une feuille de $W^s(K)$ qui ne contient pas d'orbite périodique ne contient pas de cercle transverse au champ (une telle feuille est un plan feuilleté trivialement en droites par les orbites).

Chaque feuille compacte de la lamination \mathcal{L}_1^s est donc une composante de l'intersection d'une des séparatrices de la variété stable d'une orbite périodique avec $\partial_1 M$. Puisque chaque séparatrice d'orbite périodique est un cylindre trivialement feuilleté en droites par les orbites, et puisque $\partial_1 M$ est transverse aux orbites, une telle composante intersecte chaque orbite incluse dans la séparatrice. Ceci a deux implications :

— Chaque orbite n'intersectant $\partial_1 M$ qu'en au plus un seul point, il n'y a qu'une composante d'intersection entre une séparatrice de variété stable d'orbite périodique et $\partial_1 M$.

— Une telle séparatrice intersectant $\partial_1 M$ est disjointe de K (en effet, s'il existait un point de K sur la séparatrice, l'orbite de ce point intersecterait $\partial_1 M$ ce qui est absurde) ; elle est donc libre.

Tout cercle dans \mathcal{L}_1^s est donc l'unique composante d'intersection d'une séparatrice stable d'une orbite périodique dont la variété stable est bord avec $\partial_1 M$. Il n'existe qu'un nombre fini de telles orbites et donc de telles séparatrices, ce qui conclut. \square

Lemme 1.8 *L'ensemble limite de toute demi-feuille de \mathcal{L}_1^s est exactement constitué d'une feuille compacte.*

(Il arrive que la lamination \mathcal{L}_1^s ne soit pas orientable, c'est pourquoi nous parlons simplement d'ensemble limite de demi-feuille plutôt que d'ensemble α et ω -limite.)

Remarque. Si l'ensemble limite d'une demi-feuille d'une lamination d'une surface compacte contient un point d'une feuille compacte, alors il est égal à cette feuille compacte.

Démonstration : Soit \mathcal{L} une feuille de \mathcal{L}_1^s , intersection de la variété stable d'un point x de K et de $\partial_1 M$ et soit y un point de \mathcal{L} . Notons γ le chemin disjoint de K , inclus dans $W^s(y) \cap M$, joignant y à un point x' de K , obtenu de la façon suivante : on suit l'orbite positive de y jusqu'à rencontrer un point y' appartenant à la variété stable locale de K , puis on suit le segment I de variété stable forte de jusqu'au premier point x' de K (voir figure 2).

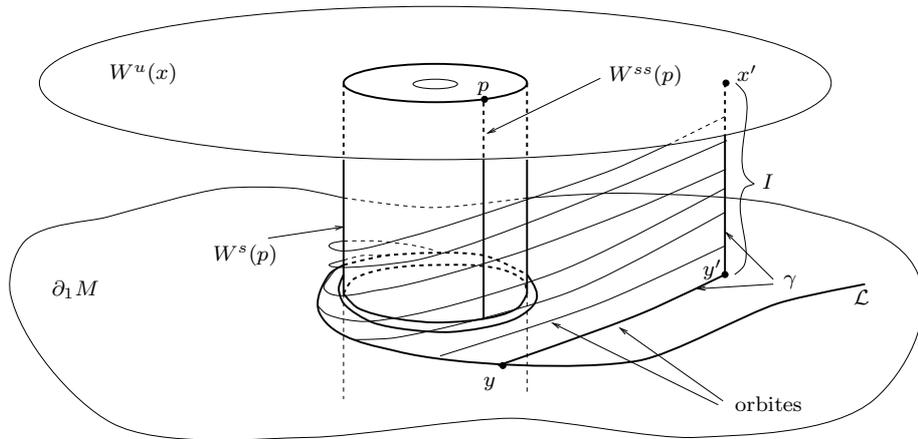


Figure 2: L'ensemble limite de toute demi-feuille est une feuille compacte

La variété instable de x' est alors bord puisque le segment I de variété stable forte de x' est disjoint de $W^u(K)$ (voir remarque page 10). D'après le lemme 1.6, cette feuille instable

est la variété instable d'une orbite périodique. L'orbite négative de x' s'accumule donc sur une orbite périodique.

L'intersection de l'orbite négative de $\gamma \setminus \{x'\}$ avec $\partial_1 M$ est incluse dans la feuille \mathcal{L} de \mathcal{L}_1^s . En effet, l'orbite négative de tout point de $\gamma \setminus \{x'\}$ coupe $\partial_1 M$ en un point et un seul. Par transversalité, le "temps d'intersection" est continu et, par suite, l'intersection de l'orbite négative de $\gamma \setminus \{x'\}$ avec $\partial_1 M$ est connexe donc incluse dans \mathcal{L} .

Soit p un point de l'ensemble α -limite de x' (p est donc périodique). La longueur des images de I par les temps négatifs du flot ne tend pas vers 0 donc l'ensemble α -limite de I contient un segment de la variété stable forte de p . La structure de produit locale permet de montrer que l'intérieur de ce segment ne contient pas de point de K (l'intérieur du segment I est disjoint de K) ; l'intérieur de ce segment est donc inclus dans une séparatrice stable libre de l'orbite de p . Nous avons vu que l'intersection de M avec une séparatrice libre est une couronne bordée par l'orbite périodique et par une feuille compacte C de \mathcal{L}_1^s . La variété stable forte de p coupe alors C en un point q . D'après le λ -lemma, l'orbite négative de I contient en fait une des deux séparatrices de la variété stable forte de p dans son adhérence ; ceci implique que q appartient à l'adhérence de l'intersection de l'orbite négative de I avec $\partial_1 M$, c'est à dire implique que q est dans l'adhérence de \mathcal{L} .

D'après notre remarque initiale, ceci implique qu'une des demi-feuilles de \mathcal{L} a pour ensemble limite la feuille compacte C .

Maintenant considérons une demi-feuille quelconque. Son ensemble limite est formé de feuilles entières, chacune contenant dans son adhérence une feuille compacte. Toujours d'après la remarque initiale, l'ensemble limite de la demi-feuille considérée est une feuille compacte. \square

Pour comprendre maintenant la topologie de $\partial_1 M \setminus W^s(K)$, nous avons d'abord besoin d'un lemme de topologie générale des surfaces.

Lemme 1.9 *Etant donné une famille infinie Γ de cercles plongés dans une surface compacte S deux-à-deux disjoints, l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

- *il existe une famille infinie de disques fermés de S deux-à-deux disjoints bordés par des cercles de Γ ,*
- *il existe une famille infinie de couronnes fermées dans S , deux-à-deux disjointes, chacune de ces couronnes étant bordée par deux cercles de Γ .*

Démonstration : Rappelons d'abord que pour toute surface compacte à bord il existe un entier N tel que, toute famille de N courbes fermées simples disjointes tracées sur cette surface possède deux courbes homotopes. On en déduit que la famille Γ possède une sous-famille infinie de courbes toutes homotopes entre-elles ; nous pouvons donc supposer que Γ possède déjà cette propriété. Quitte à se restreindre à une composante connexe de S contenant une sous-famille infinie de Γ , on peut supposer S connexe.

• Supposons d'abord que les courbes de Γ ne sont pas homotopes à zéro, et coupons la surface le long de l'une d'entre elles. On obtient ainsi une surface compacte à bord sur laquelle une sous-famille infinie de Γ (que nous noterons encore Γ), est homotope à l'une des composantes γ_0 du bord. Cette famille est alors naturellement totalement ordonnée par l'inclusion des couronnes dont le bord est formé d'une de ses courbes et de γ_0 .

Il reste alors à remarquer qu'un ensemble E infini totalement ordonné contient une suite infinie croissante ou une suite infinie décroissante. Pour cela considérons $e_0 \in E$ tel que l'ensemble des points supérieurs à e_0 soit infini. Si cet ensemble n'est pas une suite décroissante, alors on peut choisir $e_1 > e_0$ tel que l'ensemble des points supérieurs à e_1 soit infini. On construit ainsi par récurrence la suite croissante, à moins que le procédé ne s'arrête...par une suite décroissante.

Les couronnes disjointes sont obtenues entre les courbes γ_{2i} et γ_{2i+1} de cette suite.

• Supposons désormais que les courbes de Γ sont toutes homotopes à zéro. Coupons la surface le long de l'une d'entre elles. Une des deux composantes obtenues contient une sous-famille infinie de Γ qui sont ou-bien toutes homotopes à une composante du bord (auquel cas on est ramené au cas précédent), ou bien toutes homotopes à zéro. Cette surface n'étant pas la sphère chacune de ces courbes borde exactement un disque. Deux de ces disques ou bien sont disjoints ou bien l'un est inclus dans l'autre.

S'il existe une courbe γ_0 telle que l'ensemble des disques qui la contiennent est infini, alors ces disques sont totalement ordonnés par l'inclusion, et l'on achève de la même façon que le premier cas.

Sinon, pour toute courbe γ , l'ensemble des disques qui la contient est fini et notons $n(\gamma)$ son cardinal. Remarquons que les disques bordés par les courbes telles que $n(\gamma)$ ait une valeur donnée sont deux à deux disjoints : s'il existe n tel que l'ensemble des courbes γ telles que $n(\gamma) = n$ est infini, nous avons trouvé une famille infinie de disques disjoints. Sinon, on peut choisir par récurrence une suite γ_i telle que $n(\gamma_i) = i$, que le disque bordé par γ_{i+1} est inclus dans celui bordé par γ_i et contient une infinité de disques. On construit ainsi une suite de couronnes disjointes bordées par γ_{2i} et par γ_{2i+1} . \square

Lemme 1.10 *Toute famille de cercles plongés dans $\partial_1 M$, deux-à-deux disjoints, deux-à-deux non homotopes dans $\partial_1 M \setminus W^s(K)$ et dont aucun ne borde de disque dans $\partial_1 M \setminus W^s(K)$ est finie.*

Démonstration : Supposons, au contraire, qu'il existe une famille $\{C_i\}$ infinie satisfaisant aux conditions du lemme 1.10. Chacun des disques et des couronnes donnés par le lemme 1.9 doit rencontrer, par hypothèse sur la famille $\{C_i\}$, la lamination \mathcal{L}_1^s . Le lemme 1.8 montre alors que chacun de ces disques ou couronnes contient une feuille compacte de \mathcal{L}_1^s . Ces feuilles compactes étant en nombre fini (voir lemme 1.7), on obtient une contradiction. \square

En conséquence du lemme 1.10, nous pouvons choisir une famille $\{C_1, \dots, C_n\}$ maximale parmi les familles de cercles plongés dans $\partial_1 M$, deux-à-deux disjoints, deux-à-deux non homotopes dans $\partial_1 M \setminus W^s(K)$ et dont aucun ne borde de disque dans $\partial_1 M \setminus W^s(K)$. On peut, bien sûr, choisir les C_i différentiables.

En découpant $\partial_1 M$ le long des cercles C_i , on obtient une surface compacte avec $2n$ composantes de bord. Notons \tilde{S} la surface obtenue en collant un disque sur chacune de ces composantes de bord. Notons D_i^1 et D_i^2 les deux disques collés sur les composantes de bord correspondant à C_i . Les D_i^j sont des disques deux-à-deux disjoints.

De plus, les C_i étant tous disjoints de \mathcal{L}_1^s , la surface \tilde{S} est naturellement munie d'une lamination qu'on notera $\tilde{\mathcal{L}}_1^s$. Cette lamination est disjointe, par construction, de tous les disques D_i^j .

Lemme 1.11 *Tout cercle plongé dans \tilde{S} , et disjoint de $\tilde{\mathcal{L}}_1^s$, borde un disque disjoint de $\tilde{\mathcal{L}}_1^s$.*

Démonstration : Soit \tilde{C} un tel cercle. Les disques D_i^j étant deux-à-deux disjoints et disjoints de la lamination $\tilde{\mathcal{L}}_1^s$, le cercle \tilde{C} est homotope dans $\tilde{S} \setminus \tilde{\mathcal{L}}_1^s$ à un cercle disjoint des D_i^j . Il correspond alors à un cercle C de $\partial_1 M$ disjoint de \mathcal{L}_1^s et disjoint des cercles C_i . La famille C_i étant maximale, on a une des deux situations suivantes :

— Soit C borde un disque dans $\partial_1 M \setminus \mathcal{L}_1^s$; ce disque est alors nécessairement disjoint des C_i (car C est disjoint des C_i et car les C_i ne sont pas homotopes à 0 dans $\partial_1 M \setminus \mathcal{L}_1^s$) et induit donc un disque sur \tilde{S} , bordé par \tilde{C} , et disjoint de $\tilde{\mathcal{L}}_1^s$.

— Soit il existe une couronne dans $\partial_1 M \setminus \mathcal{L}_1^s$ bordée par C et un des C_i ; cette couronne est alors disjointe des autres C_j (les C_j sont deux à deux non homotopes dans $\partial_1 M \setminus \mathcal{L}_1^s$). La réunion de cette couronne et d'un des disques D_i^1 ou D_i^2 induit alors un disque sur \tilde{S} , disjoint de $\tilde{\mathcal{L}}_1^s$, et bordé par \tilde{C} . \square

Nous devons maintenant réaliser une chirurgie sur M munie de X , de manière à induire sur le bord d'entrée la chirurgie qui transforme $\partial_1 M$ en \tilde{S} . Nous avons pour cela besoin du lemme suivant que nous réutiliserons souvent dans la suite.

Lemme 1.12 *Soit N un voisinage filtrant d'un ensemble selle L d'un champ de Smale Y . Soit D un compact de $\partial_1 N$ disjoint de $W^s(L)$.*

L'orbite de D dans N est difféomorphe à $D \times [0, 1]$ et le champ Y en restriction à cette orbite est topologiquement équivalent au champ $\frac{\partial}{\partial t}$ o on a placé des coordonnées (x, t) sur $D \times [0, 1]$.

Démonstration : L'ensemble D est disjoint de $W^s(L)$ donc l'orbite de tout point de D coupe donc $\partial_2 N$ au bout d'un temps fini, strictement positif. Ce temps de sortie étant différentiable et D étant compact, on peut ramener le temps de sortie de tout point de D à 1, simplement en multipliant Y par une fonction différentiable strictement positive, ce qu'on appellera renormalisation de Y .

D'autre part, pour tout t_1 et t_2 distincts, et pour tous x_1 et x_2 dans D , on a $Y^{t_1}(x_1) \neq Y^{t_2}(x_2)$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $Y^{t_1-t_2}(x_1) = x_2 \in D \subset \partial_1 N$, ce qui contredit le fait que toute orbite coupe $\partial_1 N$ en un point et un seul (N est un voisinage filtrant).

L'application $(x, t) \mapsto \hat{Y}^t(x)$ (o \hat{Y} est la renormalisation du champ Y construite ci-dessus) réalise alors un difféomorphisme entre $D \times [0, 1]$ et l'orbite de D dans N : c'est un difféomorphisme local, il est injectif grâce à la remarque précédente. Le champ $\frac{\partial}{\partial t}$ de $D \times [0, 1]$ est envoyé par ce difféomorphisme sur le champ \hat{Y} . \square

Remarque. Le lemme 1.12 a pour conséquence que, pour tout compact D de $\partial_1 N \setminus W^s(L)$ et tout difféomorphisme h de $\partial_1 N$ coïncidant avec l'identité hors de l'intérieur de D , on peut prolonger h en une équivalence topologique de (N, Y) vers lui-même. Cette équivalence est réalisée via le difféomorphisme, égal à l'identité sur le complémentaire de l'orbite de D , qui envoie $(x, t) \in \mathcal{O}(D) \simeq D \times [0, 1]$ sur $(h(x), t) \in D \times [0, 1]$.

Pour tout cercle C_i de la famille maximale choisie précédemment, l'orbite de C_i dans M est donc difféomorphe à $S^1 \times [0, 1]$ via un difféomorphisme envoyant la restriction X sur $\frac{\partial}{\partial t}$ (quitte à multiplier X par une fonction différentiable strictement positive). Découpons M le long de ces cylindres. On obtient alors une variété de dimension 3 à bords et arrêtes, possédant un bord d'entrée, un bord de sortie et $2n$ cylindres bords tangents allant du bord d'entrée au bord de sortie. Notons Γ_i^1 et Γ_i^2 les deux cylindres correspondants à l'orbite positive C_i .

Sur chaque cylindre Γ_i^j , on recolle le cylindre plein $D_i^j \times [0, 1]$ muni du flot $\frac{\partial}{\partial t}$ via un difféomorphisme recollant les champs. Notons \tilde{M}^0 la variété à bord ainsi construite. C'est une variété munie par construction d'un champ \tilde{X} , transverse aux bords. Notons enfin \tilde{M} l'union des composantes connexes de \tilde{M}^0 contenant au moins un point du maximal invariant de \tilde{M}^0 .

Proposition 1.13 *Le couple (\tilde{M}, \tilde{X}) est un modèle du germe $[X, K]$.*

Démonstration : Le maximal invariant \tilde{K} de \tilde{M} est par construction inclus dans \tilde{M}^0 privé de l'union des cylindres pleins $D_i^j \times [0, 1]$, et la restriction de \tilde{X} à \tilde{M}^0 privée des $D_i^j \times [0, 1]$ est égale (à renormalisation près) à la restriction de X à M privée de l'orbite des C_i . En particulier, le germe de \tilde{X} le long de \tilde{K} est égal au germe de X le long de K .

Le bord de \tilde{M} est, par construction, homéomorphe à la réunion de certaines composantes de \tilde{S} , via un homéomorphisme envoyant $W^s(\tilde{K}) \cap \partial_1 \tilde{M}$ sur $\tilde{\mathcal{L}}_1^s$. Par conséquent, tout cercle plongé sur $\partial_1 \tilde{M}$, disjoint de $W^s(\tilde{K})$ borde un disque sur $\partial_1 \tilde{M}$ disjoint de $W^s(\tilde{K})$.

Enfin, toute composante de \tilde{M} contient au moins un point de \tilde{K} . \square

Remarques.

— Toute composante de $\partial_1 \tilde{M}$ rencontre $W^s(\tilde{K})$. En effet, s'il existait une composante S de $\partial_1 \tilde{M}$ disjointe de $W^s(\tilde{K})$, le saturé par le flot de S dans \tilde{M} serait une composante de \tilde{M} disjointe de \tilde{K} .

— La procédure de construction montre que les propriétés suivantes caractérisent le modèle d'un germe. Le germe du germe $[X, K]$ est le voisinage filtrant abstrait de K :

- (i) dont toute composante connexe rencontre K ,
- (ii) dont le bord d'entrée a un nombre de composantes connexes qui est maximal (parmi les voisinages filtrants vérifiant (i))
- (iii) dont le bord d'entrée a une caractéristique d'Euler minimale (parmi les voisinages filtrants vérifiant (i) et (ii)).

1.3 Unicité du modèle

On considère donc deux modèles (N, Y) et (O, Z) de $[X, K]$. On notera K_Y et K_Z leur maximaux invariants respectifs. On doit montrer que ces deux modèles sont globalement topologiquement équivalents.

Par hypothèse, il existe des voisinages U et V de K_Y et K_Z tels que les restrictions de Y et Z à U et V sont topologiquement équivalentes. On notera h un homéomorphisme réalisant cette équivalence. On voudrait étendre l'équivalence topologique aux saturés par les flots Y et Z de U et V . La difficulté essentielle sera que certaines orbites de Y ou Z peuvent entrer et sortir plusieurs fois des voisinages U et V .

Une autre difficulté est le fait que h soit une équivalence entre les restrictions de Y et Z au voisinages U et V n'implique pas, a priori, que $h(W^s(K_Y) \cap U) = W^s(K_Z) \cap V$.

Par contre, notons $W_U^s(K_Y)$ la variété stable locale de K_Y dans U , c'est à dire l'ensemble des points dont l'orbite positive ne sort pas de U (si U est assez petit, $W_U^s(K_Y)$ est inclus dans $W^s(K_Y)$) et définissons de même $W_V^s(K_Z)$; on a $h(W_U^s(K_Y)) = W_V^s(K_Z)$. (De même pour les variétés instables.)

Remarques.

— Pour tout T , notons $N_T = \bigcap_{-T}^T Y^t(N)$. L'intersection de toute orbite de Y dans N avec N_T est connexe. En effet, chaque orbite de Y dans N est homéomorphe à un intervalle de \mathbb{R} et on lui ôte dans N_T un intervalle de temps T à partir de chacune de ses extrémités finie s'il y en a.

— La famille N_T forme une base de voisinages compacts de K_Y . Ceci provient de la compacité de N et du fait que K_Y est le maximal invariant de N .

— Si W est un voisinage de K_Y telle que l'intersection de toute orbite de Y dans N avec W soit connexe, tout voisinage W' de K_Y inclus dans W , invariant dans W par le flot de Y possède également la propriété de W .

Lemme 1.14 *Pour tout voisinage U_1 de K_Y suffisamment petit, on a $W_U^s(K_Y) \cap U_1 = W^s(K_Y) \cap U_1$. (De même pour la variété instable de K_Y et de même pour les variétés stables et instables de K_Z)*

Démonstration : Remarquons d'abord que si un voisinage U_1 de K_Y possède la propriété requise, alors tout voisinage de K_Y inclus dans U_1 possède également cette propriété.

Il suffit alors de remarquer qu'un voisinage $U_1 \subset U$ convient dès lors que toute orbite qui sort de U_1 n'y rentre plus. On peut donc prendre un voisinage N_T défini à la remarque précédente avec T suffisamment grand pour que N_T soit inclus dans U . \square

Corollaire 1.15 *Pour tout voisinage U_2 de K_Y assez petit, on a $h(W^s(K_Y) \cap U_2) = W^s(K_Z) \cap h(U_2)$ et $h(W^u(K_Y) \cap U_2) = W^u(K_Z) \cap h(U_2)$.*

Démonstration : Etant donnés U_1 et V_1 (dont l'existence est montrée par le lemme 1.14) tels que $W_U^s(K_Y) \cap U_1 = W^s(K_Y) \cap U_1$, $W_U^s(K_Z) \cap V_1 = W^s(K_Z) \cap V_1$ et de même pour les variétés instables, il suffit de choisir U_2 tel que $U_2 \subset U_1$ et $h(U_2) \subset V_1$. \square

Lemme 1.16 *Il existe des voisinages compacts U' et V' de K_Y et K_Z tels que :*

- i) Les restrictions de Y et Z à U' et V' sont topologiquement équivalentes.*
- ii) L'intersection de toute orbite de Y dans N avec U' est connexe (donc est un intervalle de cette orbite). De même, l'intersection de toute orbite de Z dans O avec V' est connexe.*
- iii) D'après le point précédent chaque orbite a au plus un point d'entrée et un point de sortie dans U' ou V' . Notons respectivement $\partial_1 U'$, $\partial_2 U'$, $\partial_1 V'$ et $\partial_2 V'$ les ensembles des points d'entrée et de sortie dans U' et V' . Alors ces quatre ensembles sont compacts.*

Démonstration : Choisissons maintenant T assez grand pour que $U_2 = N_T$ (défini dans les remarques ci-dessus) vérifie la propriété du corollaire 1.15. On pose $V_2 = h(U_2)$. On a donc $h(W^s(K_Y) \cap U_2) = W^s(K_Z) \cap V_2$ et $h(W^u(K_Y) \cap U_2) = W^u(K_Z) \cap V_2$.

Le bord de U_2 est l'union des deux compacts $\partial_1 U_2 = U_2 \cap Y^T(\partial_1 N)$ et $\partial_2 U_2 = U_2 \cap Y^{-T}(\partial_2 N)$. Remarquons que le flot entre dans U_2 par $\partial_1 U_2$ et en sort par $\partial_2 U_2$. L'intersection d'une orbite de Y dans N avec U_2 est connexe d'après les remarques du début de cette partie.

L'image V_2 de U_2 par h est un voisinage de K_Y dont le bord est constitué de $\partial_1 V_2 = h(\partial_1 U_2)$ et de $\partial_2 V_2 = h(\partial_2 U_2)$. Le flot entre dans V_2 par $\partial_1 V_2$ et en sort par $\partial_2 V_2$.

On sait que $\partial_1 U_2 \subset Y^T(\partial_1 N)$ est disjoint de $W^u(K_Y)$ et que, de même, $\partial_2 U_2$ est disjoint de $W^s(K_Y)$. Par conséquent, $\partial_1 V_2$ est disjoint de $W^u(K_Z)$ et $\partial_2 V_2$ est disjoint de $W^s(K_Z)$. L'orbite négative de tout point de $\partial_1 V_2$ sort par $\partial_1 O$. Par compacité de $\partial_1 V_2$, le temps de sortie est borné ; soit alors $-\tau$ un minorant de ce temps de sortie.

De même, l'orbite positive de tout point de $\partial_2 V_2$ sort par $\partial_2 O$. Par compacité de $\partial_2 V_2$, le temps de sortie est borné ; quitte à augmenter τ , c'est un majorant de ce temps de sortie.

En remarquant que le temps de sortie par $\partial_1 O$ des orbites négative tend vers $-\infty$ quand on s'approche de $W^u(K_Z)$, on montre qu'il existe un voisinage compact F de $W^u(K_Z) \cap \partial_2 V_2$ tel que le segment d'orbite négative de 0 à -2τ de tout point de F est disjoint de $\partial_1 O$. Ceci implique que l'orbite positive de tout point de F est disjointe de $\partial_1 V_2$ et donc de V_2 .

De même il existe un voisinage compact E de $W^s(K_Z) \cap \partial_1 V_2$ tel que l'orbite négative de tout point de E soit disjointe de $\partial_2 V_2$ et donc de V_2 .

On enlève de V_2 l'ensemble des points dont l'orbite positive dans V_2 sort de V_2 par $\partial_2 V_2 \setminus F$ et l'ensemble des points dont l'orbite négative dans V_2 sort par $\partial_1 V_2 \setminus E$. Notons V_3 l'ensemble ainsi obtenu.

Remarquons que V_3 est un voisinage de K_Z : en effet, F est un voisinage de $W^u(K_Z)$ dans $\partial_2 V_2$, donc l'orbite positive de tout point suffisamment proche de K_Z , si elle sort de V_2 , sort en fait de V_2 par F ; de même, l'orbite négative de tout point suffisamment proche de K_Z , si elle sort de V_2 , sort en fait de V_2 par E .

Pour montrer que V_3 est compact, il suffit de voir qu'on a ôté à V_2 des parties ouvertes : Soit x un point de V_2 dont l'orbite positive sort de V_2 mais pas par F . Soit un temps t tel que $Z^t(x)$ soit hors de V_2 et que le segment d'orbite entre x et $Z^t(x)$ ne rencontre pas F . Il existe un voisinage de x tel que pour tout point y dans ce voisinage, $Z^t(y)$ soit hors de V_2 et tel que le segment d'orbite entre y et $Z^t(y)$ soit disjoint de F . Ce voisinage de x est disjoint de V_3 . De même pour les points x dont l'orbite négative sort de V_2 mais pas par E .

Les bords d'entrée et de sortie de V_3 sont $\partial_1 V_3 = \partial_1 V_2 \cap V_3$ et $\partial_2 V_3 = \partial_2 V_2 \cap V_3$. Ce sont donc deux compacts.

Tout point de V_3 dont l'orbite positive sort de V_3 sort par F . Son orbite positive intersecte donc V_3 en un segment. De même pour l'orbite négative. Donc toute orbite de Z intersecte V_3 en un segment.

Notons alors $U_3 = h^{-1}(V_3)$. Toute orbite de Y intersecte U_3 en un segment et bien sûr, $\partial_1 U_3$ et $\partial_2 U_3$ sont compacts, ce qui conclut la démonstration en posant $U' = U_3$ et $V' = V_3$. \square

Lemme 1.17 *Soient U' et V' des voisinages compacts de K_Y et K_Z contenus dans les intérieurs de N et O et vérifiant les conditions i), ii) et iii) du lemme 1.16. On peut prolonger l'équivalence topologique h aux saturés \hat{U} et \hat{V} des voisinages U' et V' par les flots de Y et Z .*

Démonstration : Notons \hat{U} et \hat{V} les saturés respectivement par Y et Z de voisinages U' et V' donnés par le lemme 1.16. Le voisinage invariant \hat{U} se décompose en trois parties :

- le voisinage U' ,
- l'ensemble $\mathcal{O}^-(U')$ des points dont l'orbite positive coupe le bord d'entrée $\partial_1 U'$,
- l'ensemble $\mathcal{O}^+(U')$ des points dont l'orbite négative coupe le bord de sortie $\partial_2 U'$.

Comme l'intersection de toute orbite de Y avec U' est connexe, on a $U' \cap \mathcal{O}^-(U') = \partial_1 U'$, $U' \cap \mathcal{O}^+(U') = \partial_2 U'$ et $\mathcal{O}^-(U') \cap \mathcal{O}^+(U') = \partial_1 U' \cap \partial_2 U'$.

Par une démonstration analogue à celle du lemme 1.12, en utilisant l'existence et l'unicité du temps de sortie de l'orbite négative d'un point de $\mathcal{O}^-(U')$ par $\partial_1 N$, on montre que $\mathcal{O}^-(U')$ est homéomorphe au produit $\partial_1 U' \times [0, 1]$ via un homéomorphisme envoyant la restriction de Y (à renormalisation près), sur le champ $\frac{\partial}{\partial t}$ (le temps de sortie est strictement positif car U' est inclus dans l'intérieur de N).

De même, $\mathcal{O}^+(U')$ muni de la restriction de Y est topologiquement équivalent à $(\partial_2 U' \times [0, 1], \frac{\partial}{\partial t})$.

On peut de même définir $\mathcal{O}^-(V')$ et $\mathcal{O}^+(V')$. On a bien sûr les mêmes propriétés en remplaçant U' par V' . En particulier, $\mathcal{O}^-(V')$ est topologiquement équivalent à $\partial_1 V' \times [0, 1]$ muni du champ $\frac{\partial}{\partial t}$. L'équivalence h se prolonge alors de $\mathcal{O}^-(U')$ en envoyant $(x, t) \in \partial_1 U' \times [0, 1]$ sur $(h(x), t) \in \partial_1 V' \times [0, 1]$. De même de $\mathcal{O}^+(U')$ dans $\mathcal{O}^+(V')$. \square

Nous aurons besoin dans la suite de la variante suivante du lemme 1.17 :

Lemme 1.18 *On suppose que l'on a deux voisinages compacts U' et V' de K_Y et K_Z inclus respectivement dans les intérieurs de N et O tels que :*

- l'intersection de toute orbite de Y dans N avec U' est connexe,
- l'intersection de toute orbite de Z dans O avec V' est connexe,
- il existe un homéomorphisme h de U' sur V' réalisant une conjugaison entre Y et Z .

Alors h se prolonge en un homéomorphisme réalisant une équivalence topologique entre Y et Z définie sur les saturés de U' et V' par les flots de Y et Z .

Démonstration : On multiplie Y par une fonction C^1 définie sur N , positive, égale à 1 sur U' et nulle exactement sur le bord de N . On note \tilde{Y} le champ obtenu. On note de même \tilde{Z} , le champ obtenu en multipliant Z par une fonction C^1 définie sur O , positive, égale à 1 sur V' et nulle exactement sur le bord de O . Les flots de \tilde{Y} et \tilde{Z} dans N et O sont complets.

Nous pouvons prolonger l'homéomorphisme de conjugaison h aux saturés de U' et V' par les flots de \tilde{Y} et \tilde{Z} : pour tout point x du saturé de U' , il existe un réel t et un point x' de U' tel que $x = \tilde{Y}^t(x')$; on définit alors naturellement \tilde{h} en x par $\tilde{h}(x) = \tilde{Z}^t(h(x'))$. Ceci ne dépend pas du couple (x', t) tel que $x = \tilde{Y}^t(x')$ choisi car h est une conjugaison et car l'intersection de toute orbite de Y donc de \tilde{Y} avec U' est connexe. Le prolongement de h ainsi défini envoie le saturé de U' pour la flot de \tilde{Y} sur le saturé de V' pour le flot de \tilde{Z} .

Ces saturés coïncident avec les saturés de U' et V' pour les flots de Y et Z intersectés avec $\text{int}(N)$ et $\text{int}(O)$.

Pour un point x du saturé de U' , l'orbite positive de x pour \tilde{Y} :

— soit coïncide avec l'orbite positive de x pour Y si cette dernière orbite positive ne sort pas de N ,

— soit tend vers l'unique point intersection de l'orbite positive de x pour Y avec $\partial_2 N$.

On a les propriétés analogue pour les orbites négatives de \tilde{Y} et Y (avec $\partial_1 N$) et pour les orbites positives et négatives de \tilde{Z} et Z .

On en déduit que \tilde{h} se prolonge par continuité en une équivalence topologique entre Y et Z définie sur les saturés dans N et O de U' et V' (pour les flots de Y et Z). \square

Remarque. Notons $\partial_1 \hat{U}$ l'intersection du voisinage \hat{U} donné par le lemme 1.17 avec $\partial_1 N$. On peut choisir un voisinage A de $W^s(K_Y) \cap \partial_1 N$ inclus dans $\partial_1 \hat{U}$ tel que A soit une sous-surface compacte à bords de $\partial_1 N$ dont toute composante connexe contienne au moins un point de la lamination $W^s(K_Y) \cap \partial_1 N$. En considérant \hat{U} privé de l'orbite dans N du complémentaire de A dans $\partial_1 N$ et l'image par h de ce voisinage, on peut se ramener au cas où \hat{U} et \hat{V} sont des voisinages de K_Y et K_Z invariants dans N et O et dont les intersections avec $\partial_1 N$ et $\partial_1 O$ sont des surfaces compactes.

Le lemme suivant termine la démonstration du théorème 0.3.

Lemme 1.19 *Soient deux modèles (N, Y) et (O, Z) tels qu'il existe des voisinages \hat{U} et \hat{V} de K_Y et K_Z , invariants dans N et O , tels que que les restrictions de Y et Z à \hat{U} et \hat{V} sont topologiquement équivalentes et tels que les intersections de \hat{U} et \hat{V} avec $\partial_1 N$ et $\partial_1 O$ sont des surfaces compactes dont toute composante connexe rencontre respectivement $W^s(K_Y)$ et $W^s(K_Z)$.*

Alors l'équivalence sur \hat{U} et \hat{V} de Y et Z se prolonge en une équivalence topologique globale de N dans O .

Démonstration : $\hat{U} \cap \partial_1 N$ est, par hypothèse, une sous-surface compacte à bord de $\partial_1 N$. Chaque composante du bord de cette surface borde dans $\partial_1 N$ un disque disjoint de $W^s(K_Y)$ et un seul. L'intérieur de ce disque est disjoint de \hat{U} : ceci car toute composante de $\hat{U} \cap \partial_1 N$ est, a priori, soit incluse, soit disjointe de ce disque et car chaque composante contient un point de $W^s(K_Y)$. Ceci montre par ailleurs que les disques disjoints de $W^s(K_Y)$ bordés par les composantes de bord de $\hat{U} \cap \partial_1 N$ sont deux à deux disjoints.

Soit h un homéomorphisme réalisant l'équivalence entre les restrictions de Y et Z à \hat{U} et \hat{V} . Les composantes de bord de $\hat{V} \cap \partial_1 O$ bordent des disques deux à deux disjoints et disjoints de $W^s(K_Z)$ (pour la même raison que pour \hat{U} dans $\partial_1 N$). On obtient une équivalence globale en recollant l'équivalence réalisée par h de \hat{U} sur \hat{V} à une équivalence sur les cylindres pleins constitués par les orbites des disques de $\partial_1 N$ et $\partial_1 O$ complémentaire de \hat{U} et \hat{V} (donnée par le lemme 1.12). \square

Remarques.

— Il n'existe bien qu'une seule façon de recoller des copies de $(D^2 \times [0, 1], \frac{\partial}{\partial t})$ sur des bords tangents disjoints des variétés invariantes. En effet, si on recolle un disque sur chacune des composantes de bord d'une surface compacte à bord, cela de deux manières différentes, les résultats sont des surfaces difféomorphes via un difféomorphisme égal à l'identité hors d'un voisinage arbitrairement petit des cercles de recollement ; on conclut grâce à la remarque suivant 1.12.

— Nous avons défini le modèle en particulier par la propriété "tout cercle sur le bord d'entrée, disjoint de la variété stable borde un disque dans la face d'entrée, également disjoint de la variété stable". Il aurait été équivalent d'utiliser la même propriété pour des cercles sur le bord de sortie disjoints de la variété instable.

En effet, tout cercle sur le bord de sortie, disjoint de la variété instable, se projette, le long des orbites en un cercle sur le bord d'entrée, disjoint de la variété stable. Si ce cercle borde un disque disjoint de la variété stable, il suffit de projeter ce dernier disque sur le bord de sortie via son orbite positive.

2 Type géométrique : présentation finie du modèle

Dans cette section, on définit une combinatoire décrivant les intersections des rectangles d'une partition de Markov avec leurs images par une application de premier retour : le type géométrique. On montre alors que deux ensembles selles saturés admettant des partitions de même type géométrique ont même germe et, par conséquent, ont même modèle (à équivalence topologique près).

2.1 Type géométrique d'une bonne partition de Markov

Pour un ensemble selle saturé K d'un champ X , Bowen a remarqué (voir [6]) qu'il existe une *section locale* : simplement une surface Σ compacte, éventuellement à bords, non nécessairement connexe, transverse au champ, telle que toute orbite de K coupe Σ et telle que le bord de Σ soit disjoint de K . L'application de premier retour sur cette surface n'est bien sûr que partiellement définie.

Nous appellerons *rectangle* R un plongement h de classe C^1 de $I \times J$ dans une section transverse à K , où I et J sont deux segments non triviaux de \mathbb{R} . Le *bord horizontal* de R (on dira aussi le *bord stable*) sera $\partial^s R = h(I \times \partial J)$ et son *bord vertical* (on dira aussi son *bord instable*) sera $\partial^u R = h(\partial I \times J)$.

On supposera toujours un tel rectangle R muni de deux feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u de classe C^0 , à feuilles C^1 , triviaux, transverses l'un à l'autre, invariants par l'application de premier retour sur Σ et tels que $\partial^s R$ soit constitué de deux feuilles de \mathcal{F}^s et $\partial^u R$ soit constitué de deux feuilles de \mathcal{F}^u . Les feuilles de \mathcal{F}^s seront dites *horizontales* et celles de \mathcal{F}^u *verticales*.

On appellera *sous-rectangle horizontal* de R tout rectangle H inclus dans R tel que $\partial^u H$ soit inclus dans $\partial^u R$ et tel que $\partial^s H$ soit constitué de deux feuilles du feuilletage \mathcal{F}^s de R . De même, on appellera *sous-rectangle vertical* de R tout rectangle V inclus dans R tel que $\partial^s V$ soit inclus dans $\partial^s R$ et tel que $\partial^u V$ soit constitué de deux feuilles du feuilletage \mathcal{F}^u de R .

Etant donné une section locale Σ de K et un rectangle R dans Σ , on dira que le premier retour de R est *bien défini* si l'orbite positive de tout point de R recoupe Σ et si le premier retour des points se fait en temps continu (il suffit pour cela que le premier retour de R soit disjoint du bord de Σ). Un rectangle contenant un point de K et de diamètre suffisamment petit possède toujours cette propriété (car K est inclus dans l'intérieur de Σ).

Si R possède cette propriété, on peut renormaliser le champ (c'est à dire le multiplier par une fonction C^1 strictement positive) de façon à ce que l'application de premier retour, que l'on note f , coïncide avec le temps 1 du flot en restriction à R .

On appellera alors *cube associé au rectangle* R l'ensemble C constitué de l'union des segments d'orbites entre un point de R et son premier retour, c'est à dire, après le renormalisation décrite ci-dessus, $C = \bigcup_0^1 X^t(R)$.

Définition 2.1 On appellera *bonne partition de Markov* de K la donnée d'une section locale Σ de K et d'une collection finie de rectangles disjoints R_1, \dots, R_n dans Σ tels que :

- $K \cap \Sigma$ soit recouvert par l'union des intérieurs des R_i et K est le maximal invariant de l'union des cubes associés aux R_i ,
- Pour tous i , le premier retour de R_i sur Σ est bien défini ; notons le $f(R_i)$.
- Pour tous i et j , l'intersection $f(R_i) \cap R_j$ a un nombre fini de composantes. Chacune de ces composantes est à la fois un sous-rectangle horizontal de $f(R_i)$ et un sous-rectangle

vertical de R_j . De plus, on exige que $\partial^u R_j$ soit disjoint de cette intersection ainsi que $\partial^s f(R_j)$. (voir figure 3)

— Il existe une métrique sur Σ telle que pour tout x appartenant à un R_i tel que $f(x)$ soit dans un R_j , tout vecteur tangent en x à \mathcal{F}^s soit contracté par f et tout vecteur tangent en x à \mathcal{F}^u soit dilaté par f .

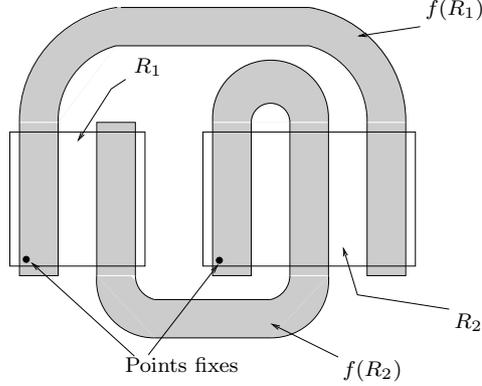


Figure 3: Une bonne partition de Markov

Remarque. Soit \mathcal{R} une bonne partition de Markov de K , alors l'union U des cubes associés aux rectangles de \mathcal{R} est un voisinage de K .

En effet, notons $R = \cup_i R_i$; on sait que $K \cap \Sigma$ est inclus dans l'intérieur de R . Tout point x de $K \setminus \Sigma$ appartient à un segment d'orbites d'extrémités dans Σ et d'intérieur disjoint de Σ . Notons x_0 l'origine de ce segment ; il appartient à l'intérieur de R . Le point x appartient alors à l'intérieur de $U = \cup_0^1 X^t(R)$. Si x est un point de $K \cap \Sigma$, alors x appartient à $\text{int}(R) \cap \text{int}(f(R))$. Un voisinage de x est obtenu par $(\cup_0^\epsilon X^t(R)) \cup (\cup_{-\epsilon}^0 X^t(f(R))) \subset U$.

Dans la suite, quand on considèrera une partition de Markov $\mathcal{R} = \{R_i\}$, on sous-entendra la donnée de Σ sur laquelle sont tracés les R_i et telle que les premiers retours des R_i sur Σ soient bien définis.

En adaptant légèrement les résultats de la littérature à notre définition, on obtient :

Proposition 2.2 *Il existe des bonnes partitions de Markov (au sens ci-dessus) de K .*

Schéma de démonstration : R. Bowen a montré l'existence de partitions de Markov par rectangles disjoints pour l'intersection d'un ensemble selle avec une section locale (voir [6]); les rectangles de Bowen ne sont cependant pas des rectangles géométriques au sens où nous l'entendons mais des ensemble inclus dans K ayant une structure de produit.

On peut cependant déduire d'une partition au sens de Bowen une partition par des rectangles géométriques semblables aux nôtres et disjoints, comme le font J. Birman et R. Williams (voir [4], démonstration du lemme 2.3). Les partitions de Birman et Williams sont constituée de rectangles dont les bords ne sont pas disjoints de K (les bords sont inclus dans les variétés invariantes de K).

Il suffit d'augmenter légèrement ces rectangles pour obtenir une bonne partition de Markov au sens défini ci-dessus. L'existence des feuilletages invariants \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u respectivement contractés et dilatés par l'application de premier retour, contenant les côtés horizontaux et verticaux des rectangles est montrée dans [19] (chapitre 2.3). \square

On ne va retenir d'une partition de Markov que la façon dont chaque $f(R_i)$ coupe les différents R_j , c'est à dire selon combien de sous-rectangles verticaux, lesquels, dans quel ordre et dans quels sens.

Définition 2.3 On appellera type géométrique abstrait la donnée de :

- Un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ deux entiers $h_i, v_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $\sum_i h_i = \sum_i v_i$
- Une application Φ de l'ensemble $\{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, h_i\}\}$ dans l'ensemble $\{k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, v_k\}\} \times \{-, +\}$, induisant une bijection par "oubli des signes"

On explique à présent comment associer un type géométrique à une bonne partition de Markov. Par hypothèse, la variété \mathcal{M} est orientable. Tout rectangle est donc muni d'une orientation induite (une orientation directe du rectangle suivi de celle du flot est l'orientation ambiante). Le choix d'une orientation des verticales d'un rectangle induit alors une orientation des horizontales (l'orientation des horizontales suivie de celle des verticales donne l'orientation du rectangle).

Définition 2.4 Soit $\mathcal{R} = \{R_i\}$ une bonne partition de Markov et un choix des orientations des horizontales et des verticales. Le type géométrique de \mathcal{R} est un type géométrique abstrait comme défini ci-dessus tel que :

- n est le nombre de rectangles de \mathcal{R}
- pour tout $i \leq n$, h_i est le nombre de composantes connexes de l'intersection de $f(R_i)$ avec l'union des R_j . Ces composantes connexes sont, par définition d'une bonne partition de Markov, l'image de sous-rectangles horizontaux de R_i . On notera $H_i^1 \dots H_i^{h_i}$ ces sous-rectangles numérotés dans l'ordre induit par l'orientation des verticales de R_i .
- de même, pour tout $k \leq n$, v_k est le nombre de composantes connexes de l'intersection de R_k avec l'union des $f(R_j)$. On notera $V_k^1 \dots V_k^{v_k}$ ces sous-rectangles verticaux de R_k numérotés dans l'ordre induit par l'orientation horizontales de ce rectangle.
- chaque sous-rectangle horizontal H_i^j de R_i est envoyé par f sur un sous-rectangle vertical V_k^l de R_k . L'application Φ envoie alors (i, j) sur $((k, l), \varepsilon)$ o $\varepsilon = +1$ si l'orientation des verticales de $f(H_i^j)$ coïncide avec celle des verticales de V_k^l et $\varepsilon = -1$ sinon.

Exemple : Le type géométrique de la partition de Markov de la figure 3 est :

$$\begin{aligned} n &= 2 \\ h_1 &= 2, h_2 = 3, v_1 = 2, v_2 = 3, \\ \Phi(1, 1) &= ((1, 1), +), \Phi(1, 2) = ((2, 3), -), \\ \Phi(2, 1) &= ((2, 1), +), \Phi(2, 2) = ((2, 2), -), \Phi(2, 3) = ((1, 2), +). \end{aligned}$$

2.2 Le type géométrique caractérise le modèle

L'unicité du modèle d'un germe de champ de vecteur le long d'un ensemble selle saturé (théorème 0.3) implique que le théorème 0.4 est une conséquence directe de la proposition suivante :

Proposition 2.5 Soit K et L des ensemble selles saturés de champs X et Y . On suppose que K et L admettent des partitions de Markov \mathcal{R} et \mathcal{S} de même type géométrique.

Alors il existe un homéomorphisme h de l'union des cubes associés à \mathcal{R} sur l'union des cubes associés à \mathcal{S} , conjuguant une renormalisation de X à une renormalisation de Y . En particulier, les germes de X et Y le long de K et L sont égaux.

De plus, l'image par h du rectangle feuilleté R_i de \mathcal{R} est le rectangle feuilleté S_i de \mathcal{S} , et h préserve les orientations des horizontales et des verticales de ces rectangles.

La notion d'application markovienne et la proposition 2.7 sont de légères adaptations d'une notion et d'un résultat de [5].

Définition 2.6 On appellera application markovienne unidimensionnelle toute application g telle que :

- l'image de g est une union finie de segments I_1, \dots, I_n disjoints orientés,
- l'ensemble de définition de g est une union finie de sous-segments J_i^j ($1 \leq j \leq n_i$) des I_i disjoints deux à deux et disjoints des extrémités des I_i , indexés de façon compatible avec l'orientation des I_i ,
- g est un homéomorphisme de chaque J_i^j sur un des I_k ,
- le maximal invariant $\bigcap_{n=0}^{+\infty} g^{-n}(\cup_i I_i)$ est d'intérieur vide.

On définit le *type combinatoire* σ d'une telle application markovienne g dans le même esprit qu'a été défini le type géométrique : c'est une "bijection signée" qui à chaque couple (i, j) associe un couple (k, ε) o $g(J_i^j) = I_k$ et o $\varepsilon = \pm$ suivant que g est croissante ou décroissante sur J_i^j .

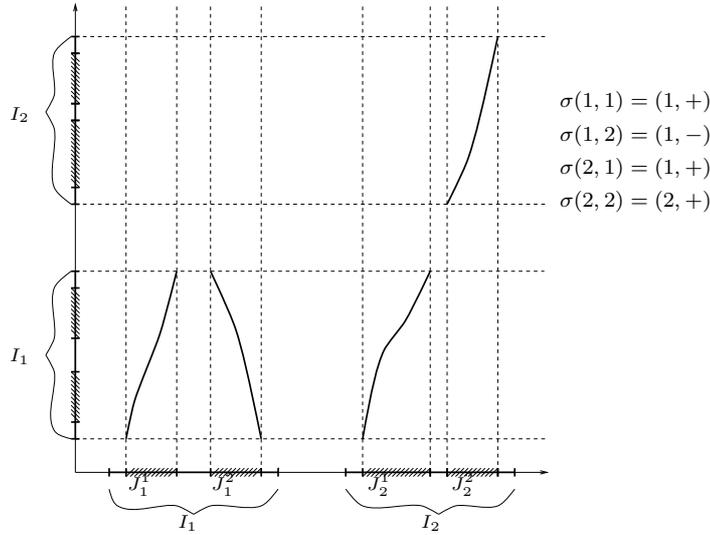


Figure 4: Un exemple de graphe d'application markovienne unidimensionnelle

Proposition 2.7 Soient g et g' deux application markoviennes. On note I_1, \dots, I_n et I'_1, \dots, I'_n les segments images de g et g' et J_i^j et $J'_i{}^j$ leurs intervalles de définition. On suppose que g et g' sont de même type.

Alors g et g' sont topologiquement conjuguées via un homéomorphisme envoyant l'intervalle orienté I_i sur l'intervalle orienté I'_i .

Démonstration : On notera $\mathcal{I} = \cup_i I_i$, $\mathcal{I}' = \cup_i I'_i$, $\mathcal{J} = \cup_{i,j} J_i^j$ et $\mathcal{J}' = \cup_{i,j} J'_i{}^j$.

Pour tout i , $I_i \setminus \mathcal{J}$ et $I'_i \setminus \mathcal{J}'$ ont même nombre de composantes, qui sont toutes des intervalles. Chaque intervalle de $I_i \setminus \mathcal{J}$ est de même nature que l'intervalle ayant la même position dans $I'_i \setminus \mathcal{J}'$ (en fait, les intervalles de $I_i \setminus \mathcal{J}$ sont tous ouverts sauf le premier J_i^0 et le dernier $J_i^{n_i}$ qui sont semi-ouverts).

On peut donc choisir un homéomorphisme croissant de $I_i \setminus \mathcal{J}$ sur $I'_i \setminus \mathcal{J}'$. Notons h_0 l'homéomorphisme défini de $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ dans $\mathcal{I}' \setminus \mathcal{J}'$ ainsi obtenu.

On note $\mathcal{O}_0 = \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ et on remarque que $g^{-1}(\mathcal{O}_0)$ est disjoint de \mathcal{O}_0 et donc que les $g^{-i}(\mathcal{O}_0)$ sont deux à deux disjoints. Pour chaque i , $g^{-i}(\mathcal{O}_0)$ est une union d'intervalles, ouverts ou semi-ouverts. Les extrémités fermées des intervalles semi-ouverts se recollent sur des extrémités ouvertes d'intervalles de $g^{-(i-1)}(\mathcal{O}_0)$. On note $\mathcal{O}_k = \bigcup_0^k g^{-i}(\mathcal{O}_0) = \mathcal{O}_0 \sqcup g^{-1}(\mathcal{O}_{k-1})$ et on construit une conjugaison entre g et g' sur chaque \mathcal{O}_k par récurrence sur k .

L'homéomorphisme h_0 a été fixé. Supposons donc h_{k-1} construit et soit alors x dans \mathcal{O}_k .

— Si x est dans $\mathcal{O}_0 = \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ alors on pose $h_k(x) = h_0(x)$.

— Sinon $g(x)$ est dans \mathcal{O}_{k-1} et x est dans un des J_i^j . Comme g et g' ont même type, si $I_k = g(J_i^j)$, alors g' induit un homéomorphisme de $J_i^{j'}$ dans I_k' . Soit donc $h_k(x)$ le seul point de $J_i^{j'}$ tel que $g'(h_k(x)) = h_{k-1}(g(x))$.

Par construction, h_k est un homéomorphisme sur chaque sous-intervalle de \mathcal{O}_k . Il est croissant par récurrence, les J_i^j et les $J_i^{j'}$ étant ordonnés de la même façon et les restrictions de g et g' à ces sous-intervalles étant simultanément croissantes ou décroissantes. Ces deux propriétés montrent par ailleurs que h_k est continu aux extrémités des intervalles semi-ouverts de $g^{-i}(\mathcal{O}_0)$: une bijection croissante entre une union d'intervalles et cette même union est nécessairement continue.

Par hypothèse, $\bigcap_0^\infty g^{-n}(\mathcal{J})$ est d'intérieur vide, c'est à dire que \mathcal{O}_∞ est dense dans \mathcal{I} . Comme toute bijection croissante d'une partie dense d'un intervalle dans une partie dense d'un intervalle se prolonge par continuité en un homéomorphisme entre les intervalles, h_∞ se prolonge en un homéomorphisme h de \mathcal{I} sur \mathcal{I}' conjuguant g à g' . \square

Démonstration de la proposition 2.5 : Considérons donc deux transversales Σ et Σ' de K et L contenant deux partitions de Markov $\mathcal{R} = \{R_i\}$ et $\mathcal{S} = \{S_i\}$ de K et L de même type géométrique. On notera $R = \cup_i R_i$ et $S = \cup_i S_i$. Notons \tilde{X}^t et \tilde{Y}^t les temps t des flots de renormalisations de X et Y faites de façon à ce que les temps de retour des points de \mathcal{R} et \mathcal{S} sur Σ et Σ' soient tous égaux à 1. On notera φ et ψ les applications de premier retour sur Σ et Σ' restreintes respectivement à l'ensemble des points de R dont le premier retour sur Σ est dans R et à l'ensemble des points de S dont le premier retour sur Σ est dans S . On notera enfin U et V l'union des cubes associés aux rectangles de \mathcal{R} et \mathcal{S} .

Rappelons que R et S sont tous deux munis de feuilletages stables et instables invariants.

En quotientant R par le feuilletage stable, on obtient un espace homéomorphe à une union de segments disjoints et par passage au quotient de φ une application markovienne unidimensionnelle φ^u définie sur cette union de segments.

On obtient par le même passage au quotient pour ψ une application markovienne ψ^u de même type combinatoire que φ^u (car \mathcal{R} et \mathcal{S} ont même type géométrique). D'après la proposition 2.7, les applications markoviennes, φ^u et ψ^u sont donc conjuguées.

En considérant cette fois, φ^{-1} et ψ^{-1} , et en quotientant par les feuilletages instables, on obtient également des applications markoviennes unidimensionnelles φ^s et ψ^s conjuguées.

Comme le feuilletage stable et le feuilletage instable construisent des coordonnées globales sur R et S , et comme \mathcal{R} et \mathcal{S} sont de même type géométrique, les conjugaisons entre applications unidimensionnelles induisent une conjugaison h entre φ et φ' de R sur S (pour une démonstration détaillée, voir [5], proposition 5.4.1).

Cette conjugaison implique que l'on peut définir l'application continue $H : U \rightarrow V$ qui à tout point $\tilde{X}^t(x)$, $x \in R$, $t \in [0, 1]$ associe $\tilde{Y}^t(h(x))$. Cette application est un homéomorphisme qui réalise une conjugaison entre les flots (renormalisés) \tilde{X}^t et \tilde{Y}^t .

Des propriétés des conjugaisons entre φ^u et ψ^u et entre φ^s et ψ^s données par la proposition 2.7, on déduit que H envoie le rectangle R_i sur le rectangle S_i en préservant les orientations des horizontales et des verticales. \square

2.3 Equivalences du modèle et partitions de Markov

La proposition 2.5 et le théorème 0.3 impliquent que deux modèles dont les maximaux invariants admettent des partitions de Markov \mathcal{R} et \mathcal{S} de même type géométrique sont globalement topologiquement équivalents via un homéomorphisme h . Cependant, rien n'indique que l'on

peut choisir h de façon à ce que l'image de la partition \mathcal{R} soit la partition \mathcal{S} (car le lemme 1.16 utilisé pour montrer 0.3 réduit les voisinages sur lesquels on a l'équivalence a priori). Ceci est d'ailleurs a priori impossible sans hypothèse supplémentaire sur les partitions \mathcal{R} et \mathcal{S} . Nous allons montrer qu'une hypothèse supplémentaire convenable est que l'intersection de toute orbite avec l'union des cubes associés aux rectangles de \mathcal{R} soit connexe. Plus précisément, nous allons montrer les deux propositions suivantes :

Proposition 2.8 *Soit X un champ de Smale et M un voisinage filtrant d'un ensemble selle saturé K de X . Il existe des bonnes partitions de Markov de K dont l'union des cubes est incluse dans l'intérieur de M et tel que l'intersection de toute orbite de X dans M avec l'union des cubes est connexe.*

Remarque. La propriété "l'intersection des cubes avec toute orbite de X dans M est connexe" est en fait indépendante du choix du voisinage isolant M . En effet, M étant un voisinage isolant, toute qui en sort n'y revient plus.

Définition 2.9 *Une partition de Markov \mathcal{R} telle que l'intersection de l'union des cubes associés à \mathcal{R} avec toute orbite du flot est connexe sera dite essentielle.*

Proposition 2.10 *Soient deux modèles (N, Y, K_Y) et (O, Z, K_Z) tels que K_Y et K_Z possèdent dans N et O des partitions \mathcal{R} et \mathcal{S} essentielles et de même type géométrique.*

Alors toute conjugaison entre des renormalisations de Y et Z définie de l'union des cubes de \mathcal{R} dans l'union des cubes de \mathcal{S} se prolonge en une équivalence topologique entre (N, Y, K_Y) et (O, Z, K_Z) .

Remarque. En fait, nous montrons, dans [3] que, si T est le type géométrique T d'une partition de K dans \mathcal{M} , il existe une partition essentielle de K dans le modèle de $[X, K]$ de type géométrique T . Cependant, il existe des partitions de K non essentielles dans \mathcal{M} et il existe des partitions de K qui ne sont incluses dans aucun voisinage filtrant de K .

Démonstration de la proposition 2.8 : On considère d'abord une partition $\mathcal{R} = \{R_i\}$ de K dans l'intérieur de M (il en existe car il existe des partitions dont les rectangles sont de diamètres arbitrairement petits). Rappelons que les rectangles de \mathcal{R} sont dessinés sur une section locale de K que nous noterons Σ et notons f l'application de premier retour sur Σ . On notera également R l'union des R_i .

Nous appellerons *raffinement* de la partition \mathcal{R} une bonne partition de K dont les rectangles sont des sous-rectangles des rectangles de \mathcal{R} (c'est à dire sont inclus dans les R_i avec des bords inclus dans les feuilles des feuilletages horizontaux et verticaux des R_i). On remarque que les prototypes de raffinement de \mathcal{R} sont les partitions dont les rectangles sont les composantes connexes de $\bigcap_{-P}^N f^n(R)$ pour P et N entier fixés.

Lemme 2.11 *Il existe un raffinement \mathcal{R}' de \mathcal{R} et un temps T tel que pour tout point x de $f(\mathcal{R}') \setminus \mathcal{R}'$, $X^T(x)$ est hors de M .*

Démonstration : Grâce aux propriétés des voisinages filtrants, il suffit de montrer qu'on a un raffinement \mathcal{R}' tel que $\text{adh}(f(\mathcal{R}') \setminus \mathcal{R}')$ soit disjoint de $W^s(K)$. En effet, l'orbite positive de tout point de $\text{adh}(f(\mathcal{R}') \setminus \mathcal{R}')$ sortira alors de M en temps fini (ce temps étant continu par rapport au point) ; par compacité de $\text{adh}(f(\mathcal{R}') \setminus \mathcal{R}')$ on obtiendra la propriété demandée par le lemme.

Notons C l'union des cubes associés à \mathcal{R} . Nous avons construit (voir lemme 1.14) un voisinage U de K tel que $W_C^s(K) \cap U = W^s(K) \cap U$.

Soit \mathcal{R}' un raffinement de \mathcal{R} tel que l'union des cubes associés à \mathcal{R}' soit incluse dans U . $\text{adh}(f(\mathcal{R}') \setminus \mathcal{R}')$ est une union de sous-rectangles horizontaux de $f(\mathcal{R}')$ disjointe de K . Chaque

composante de $f(R')$ est un rectangle contenant un point de K qui est donc traversé de bas en haut par une feuille de \mathcal{F}^u qui est dans $W^u(K)$. Chaque composante de $\text{adh}(f(R') \setminus R')$ est donc traversée par une feuille de \mathcal{F}^u qui est dans $W^u(K)$.

Toute feuille de $W^s(K)$ qui rencontrerait une composante de $\text{adh}(f(R') \setminus R')$ contiendrait une feuille entière de \mathcal{F}^s qui intersecterait toute feuille de \mathcal{F}^u de cette composante. Ceci est impossible puisque $\text{adh}(f(R') \setminus R')$ est disjoint de K et $K = W^s(K) \cap W^u(K)$. \square

Remarques.

— Dans le cas d'un voisinage filtrant intrinsèque (voir la remarque suivant 1.1), la même démonstration prouve "Il existe un raffinement \mathcal{R}' de \mathcal{R} et un temps T tel que pour tout point x de $f(R') \setminus R'$, $X^T(x)$ n'est plus défini".

— Puisque toute orbite qui sort d'un voisinage filtrant n'y revient pas, si T est un temps qui satisfait à la conclusion du lemme précédent, alors tout temps $T' \geq T$ satisfait également à cette conclusion.

On considère un raffinement \mathcal{R}' et un temps T donné par le lemme précédent. La second point de la remarque ci-dessus nous autorise à supposer T entier. Considérons le raffinement \mathcal{R}'' de \mathcal{R}' dont les rectangles sont les composantes connexes de $R'' = \bigcap_{-T}^0 f^n(R')$.

Lemme 2.12 *Pour tout point x appartenant à $f(R'') \setminus R''$ et tout temps t strictement positif, $X^t(x)$ n'est pas dans R'' .*

Démonstration : Le point x est dans $f(R'') \setminus R''$ donc $f^{T-1}(x)$ est défini et est dans R' , mais $f^T(x)$ n'est pas dans R' . Si il existait un temps $i \leq T$ (entier via la renormalisation habituelle puisque $f^T(x)$ est défini) tel que $X^i(x)$ soit dans R'' alors pour tout j tel que $i \leq j \leq i + T$, $f^j(x)$ serait défini et appartiendrait à R' . En particulier, $f^T(x)$ serait dans R' , ce qui est impossible.

Remarquons que $y = f^T(x)$ est dans $f(R') \setminus R'$. Par définition de R' et de T , pour tout $t \geq T$, $X^t(y)$ n'est pas dans M et donc, a fortiori, n'est pas dans R' . Par conséquent, comme $X^t(y) = X^T(X^t(x))$, pour tout $t \geq T$, $X^t(x)$ n'est pas dans R'' (car, si z est dans R'' , alors, par définition de R'' , $X^T(z) = f^T(z)$ est dans R'). \square

(Fin de la démonstration de la proposition 2.8) Le lemme précédent montre que toute orbite positive qui sort des cubes de \mathcal{R}'' n'y rentre plus. Supposons que l'orbite négative d'un point x sorte des cubes de \mathcal{R}'' en un point y puis y rentre à nouveau en un point z . Alors l'orbite positive de z sortirait des cubes puis y rentrerait à nouveau en y . On obtient une contradiction. La partition \mathcal{R}'' est donc essentielle. \square

Démonstration de la proposition 2.10 : Le lemme 1.18 prouve que toute conjugaison entre des renormalisations de Y et Z définie de l'union des cubes de \mathcal{R} dans l'union des cubes de \mathcal{S} se prolonge en une équivalence topologique définie sur les saturés dans N et O des partitions \mathcal{R} et \mathcal{S} .

D'après le lemme 1.19, il suffit donc de prouver que les intersections de ces saturés avec les bords de N et O sont des surfaces compactes à bord, ce que fait le lemme ci-dessous. \square

Lemme 2.13 *Soit M un voisinage filtrant d'un ensemble selle K d'un champ X et $\mathcal{R} = \{R_i\}$ une partition essentielle de K . On note Σ^s l'intersection du saturé de \mathcal{R} avec $\partial_1 M$. Alors Σ^s est une surface compacte à bord que l'on appellera parfois surface d'entrée de \mathcal{R} .*

Démonstration : Rappelons que les rectangles de \mathcal{R} sont dessinés sur une section locale de K . On note f l'application de retour sur cette section locale. On note R l'union des R_i .

Par définition d'une partition de Markov, $R \cap f(R)$ est constituée d'un nombre fini de sous-rectangles verticaux (compacts) de R . Par suite, $R \setminus f(R)$ est une union finie de sous-rectangles verticaux "semi-ouverts" de R (c'est-à-dire des sous-rectangles verticaux de R

privés d'un ou deux de leurs côtés instables). Les adhérences de ces sous-rectangles "semi-ouverts" sont deux-à-deux disjointes. On note A_1, \dots, A_r ces sous-rectangles semi-ouverts.

Puisque la partition \mathcal{R} est supposée essentielle, l'orbite strictement négative de tout point d'un A_j est disjointe de R donc :

- coupe $\partial_1 M$ (en un et un seul point),
- est disjointe de l'orbite des autres A_i .

Notons B_j l'ensemble des points de sortie (en suivant l'orbite négative) sur $\partial_1 M$ des points de A_j . Les deux points ci-dessus montre que chaque B_j est diffeomorphe au A_j correspondant donc est un rectangle. D'autre part, par définition des A_j et des B_j , l'intersection du saturé des R_i avec $\partial_1 M$ est égale à l'union des B_j . On doit donc montrer que B_j forme une surface à bord.

Notons \bar{A}_j l'adhérence de A_j . Alors $\bar{A}_j \setminus A_j$ est constitué des côtés instables de \bar{A}_j qui sont dans $f(R)$. L'image par f^{-1} d'un tel côté est incluse dans un côté instable de R . L'orbite négative de chaque composante de $\bar{A}_j \setminus A_j$ vient donc, au bout d'un temps 1, s'insérer dans l'orbite négative d'un côté d'un A_k .

L'union des B_j est donc homéomorphe à l'ensemble obtenu en considérant l'union des rectangles compacts disjoints \bar{A}_j et en recollant les côtés constituant $\bar{A}_j \setminus A_j$ à leurs images par f^{-1} (qui sont des segments du bord instable des A_j). Une ensemble obtenu en recollant un nombre fini de rectangles le long d'un nombre fini de segments de leurs bords forme une surface compacte à bords et à coins avec, *a priori*, des branchements. Mais $\Sigma^s = \bigcup B_j$ est de plus plongé dans la surface compacte $\partial_1 M$. On en déduit que Σ^s est une "vraie" surface compacte à bord et à coins (voir figure 5). \square

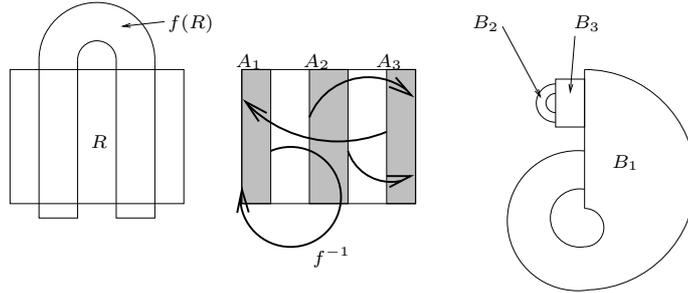


Figure 5: Trace du saturé d'une partition essentielle sur le bord d'un voisinage filtrant

Remarque. Remarquons que la preuve du lemme ci-dessus donne une procédure de construction de la surface d'entrée Σ^s par recollement de rectangles.

3 Du modèle au champ initial

Dans cette partie, nous montrons qu'on peut revenir du modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) au champ initial X en restriction à un voisinage isolant M quelconque de K (tel que toute composante de M rencontre K) par un nombre fini de chirurgies topologiques simples : des attachements d'anses. Nous verrons qu'un attachement d'anse est déterminé, à équivalence topologique près, par deux composantes connexes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$. Nous montrerons alors comment coder une composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ par une combinatoire finie. On en déduit une présentation finie de tout voisinage isolant à bord transverse de K .

3.1 Attachements d'anses

La construction que nous avons effectuée du modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) de $[X, K]$ nous indique également comment revenir par des chirurgies simples sur \tilde{M} à notre couple (M, X) initial, au moins à équivalence topologique près (pourvu que toute composante connexe de M rencontre K).

Soient C et C' deux cercles sur $\partial_1 \tilde{M}$, disjoints de $W^s(K)$ (on note K le maximal invariant de \tilde{M} en accord avec la première propriété d'un modèle de $[X, K]$). Supposons que C et C' bordent sur $\partial_1 \tilde{M}$ deux disques D et D' , disjoints l'un de l'autre, et tout deux disjoints de $W^s(K)$.

Les orbites de D et D' dans \tilde{M} munies de la restriction de \tilde{X} sont topologiquement équivalentes, via un difféomorphisme, à deux copies disjointes de $D^2 \times [0, 1]$ muni du champ $\frac{\partial}{\partial t}$. Si on ôte ces deux cylindres pleins à \tilde{M} , on obtient une variété avec un bord d'entrée, un bord de sortie et deux cylindres $S^1 \times [0, 1]$ tangents (sur lesquels la restriction de X est équivalente à $\frac{\partial}{\partial t}$). On peut alors recoller ces deux cylindres tangents l'un sur l'autre de façon à recoller les champs et à obtenir une variété orientable (il n'existe qu'une seule façon de le faire à équivalence topologique près, par une remarque analogue à celle suivant 1.19). On obtient une nouvelle variété munie d'un champ transverse au bord.

Définition 3.1 On appellera l'opération précédemment décrite *attachement d'anse sur les cercles C et C'* .

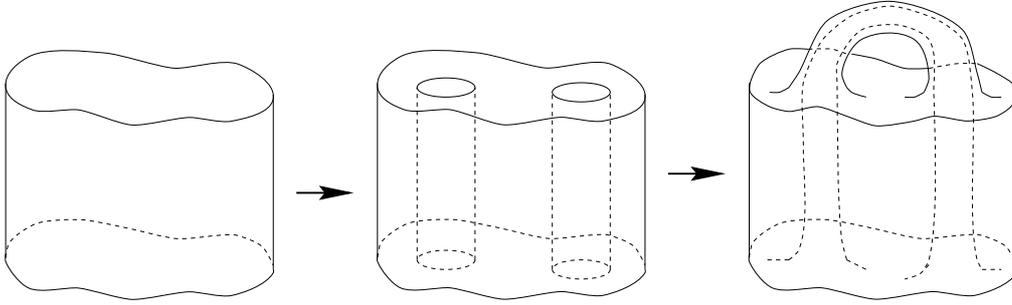


Figure 6: Attachement d'une anse

Lemme 3.2 La classe d'équivalence topologique d'un attachement d'anse ne dépend que des composantes connexes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ dans lesquelles se trouvent les deux cercles sur lesquels on effectue cet attachement d'anse.

Démonstration : Soient C_1 et C_2 deux cercles dans une même composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ bordant des disques D_1 et D_2 disjoints de $W^s(K)$ et soient C'_1 et C'_2 deux cercles également dans une même composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ et bordant des disques D'_1 et D'_2 disjoints de $W^s(K)$ et disjoints respectivement de D_1 et D_2 .

Il existe deux compacts D et D' sur $\partial_1 \tilde{M}$, disjoints de $W^s(K)$ et tels que D contienne D_1 et D_2 dans son intérieur et D' contienne D'_1 et D'_2 dans son intérieur. Il existe alors deux difféomorphismes h et h' de D et D' , égaux à l'identité sur des voisinages de ∂D et $\partial D'$ envoyant D_1 sur D_2 et D'_1 sur D'_2 . On conclut grâce à la remarque suivant 1.12. \square

On remarque qu'on peut effectuer simultanément plusieurs attachements d'anses pourvu que les disques sur $\partial_1 \tilde{M}$ concernés soient disjoints. On peut donc effectuer toute suite finie d'attachements d'anses sur des cercles disjoints dans un ordre arbitraire.

On peut maintenant montrer la proposition 0.5, c'est-à-dire montrer qu'on passe du modèle au voisinage filtrant initial par un nombre fini d'attachements d'anses :

Démonstration de la proposition 0.5 : Rappelons que, dans la sous-partie 1.2, on est passé, d'un voisinage filtrant quelconque M de K à \tilde{M}^0 :

— \tilde{M}^0 est un voisinage filtrant intrinsèque de K , union disjointe du modèle \tilde{M} et d'un nombre de composantes M_1, \dots, M_k ne rencontrant pas K .

— Pour cela, nous avons découpé M le long des orbites des cercles C_1, \dots, C_n d'une famille maximale finie donnée par le lemme 1.10 puis nous avons collé des copies de $(D^2 \times [0, 1], \frac{\partial}{\partial t})$ sur les $2n$ bords tangents créés.

On remarque que ces opérations sont exactement les chirurgies inverses aux attachements d'anses sur les n couples de cercles $((C_1^1, C_1^2), \dots, (C_n^1, C_n^2))$ de $\partial_1 \tilde{M}^0$ images des cercles C_1, \dots, C_n . On peut donc passer de (\tilde{M}^0, \tilde{X}) à (M, X) par n attachements d'anses sur les couples de cercles $((C_1^1, C_1^2), \dots, (C_n^1, C_n^2))$.

D'autre part, les composantes M_1, \dots, M_k sont des copies de $S^2 \times [0, 1]$: en effet, tout cercle sur le bord d'entrée d'une telle composante borde un disque (voir le lemme 1.11) et on conclut par le lemme 1.12.

Toute composante de M rencontrant K on en déduit qu'il existe une composante M_i et un couple (C_j^1, C_j^2) tel que (quitte à échanger C_j^1 et C_j^2), le cercle C_j^1 soit sur le bord d'entrée de \tilde{M} et le cercle C_j^2 soit sur le bord d'entrée de M_i . Quitte à changer l'indexation, on supposera que $i = k$. Notons \tilde{M}^1 le résultat de l'attachement d'anse sur les cercles C_j^1 et C_j^2 .

On remarque alors :

— que (\tilde{M}^1, \tilde{X}) est topologiquement équivalente à (\tilde{M}, \tilde{X}) (la somme connexe d'une surface avec une sphère redonne la surface initiale),

— (M, X) est obtenu à partir de $(\tilde{M}^1 \cup M_1 \cup \dots \cup M_{k-1}, \tilde{X})$ par moins de n attachement d'anses.

Par récurrence, on en déduit donc qu'on peut passer de (\tilde{M}, \tilde{X}) à (M, X) par moins de n attachement d'anses bien choisis. \square

3.2 Codage des composantes connexes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ et présentation finie des voisinages filtrants

Etant donné un ensemble selle saturé K d'un champ de Smale X , le théorème 0.4 montre que le type géométrique d'une bonne partition de Markov de K constitue à lui seul une présentation finie du modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) de $[X, K]$. Pour obtenir une présentation finie d'un voisinage filtrant M quelconque de K (tel que toute composante de M rencontre K), il nous reste donc à coder les attachements d'anses nécessaires pour passer de \tilde{M} à M .

Nous avons vu que les attachements d'anses ne dépendent que des composantes connexes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ contenant les cercles sur lesquels on les effectue. Un *codage* sera donc une surjection d'un ensemble dénombrable de mots finis d'un alphabet fini sur l'ensemble des composantes connexes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$.

Pour construire un tel codage, nous allons considérer une partition essentielle $\mathcal{R} = \{R_i\}$ de K incluse dans \tilde{M} . On supposera de plus, pour simplifier la procédure de codage, que \mathcal{R} est génératrice, c'est à dire que pour tous i et j , $f(R_i)$ a au plus une composante d'intersection avec R_j . L'alphabet considéré dépendra alors du type géométrique de \mathcal{R} .

Nous montrerons ensuite qu'étant donné une autre partition de Markov \mathcal{S} de K essentielle, génératrice, incluse dans \tilde{M} et de même type géométrique que \mathcal{R} , il existe une équivalence topologique globale de (\tilde{M}, \tilde{X}) tel que pour tout mot de notre alphabet, la composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ codée via \mathcal{S} soit l'image par cette équivalence de la composante codée via \mathcal{R} . Notre codage ne dépend, en ce sens, à équivalence topologique près, pas de la partition choisie, mais seulement de son type géométrique.

Une présentation finie de (M, X) sera alors la donnée du type géométrique d'une partition essentielle, génératrice de K incluse dans \tilde{M} , et d'un nombre fini de mots de notre alphabet fini correspondant aux attachements d'anses.

Nous noterons R l'union des rectangles R_i . Notons Σ la section locale de K qui vient avec \mathcal{R} et f l'application de premier retour sur Σ .

Lemme 3.3 *Soit C une composante connexe d'un rectangle R_i privé de l'union des variétés invariantes de K . L'orbite de C ne coupe qu'une seule composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$.*

Démonstration : L'orbite de tout point de C coupe $\partial_1 \tilde{M}$ transversalement et en un point et un seul. L'application qui a un point de C associe l'intersection de son orbite avec $\partial_1 \tilde{M}$ est donc bien définie et continue. Ceci assure la connexité de l'intersection de l'orbite de C avec $\partial_1 \tilde{M}$. Cette intersection est bien sûr disjointe de $W^s(K)$. \square

Lemme 3.4 *L'orbite positive de toute composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ coupe $R \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$.*

Démonstration : L'orbite positive de tout point de $W^s(K) \cap \partial_1 \tilde{M}$ intersecte l'intérieur de R . L'orbite de tout point de $\partial_1 \tilde{M}$ suffisamment proche de $W^s(K)$ intersecte donc R (bien sûr hors de $W^s(K)$ et de $W^u(K)$), ce qui montre le lemme. \square

Rappelons que, par définition d'une bonne partition de Markov, $R_i \cap f^{-1}(R)$ est constitué de h_i sous-rectangles horizontaux disjoints et disjoints de $\partial^s R_i$ o h_i est donné par le type géométrique de \mathcal{R} . L'ensemble $R_i \setminus f^{-1}(R)$ est donc une union de $h_i + 1$ sous-rectangles horizontaux ; nous numérotons ces sous-rectangles horizontaux de 1 à $h_i + 1$ de faon compatible avec l'orientation choisie des verticales. De même, $R_i \setminus f(R)$ est une union de $v_i + 1$ sous-rectangles verticaux, que nous numérotons de faon compatible avec l'orientation des horizontales.

De plus, comme \mathcal{R} a été supposée essentielle, $R_i \setminus f^{-1}(R)$ est disjoint de $W^s(K)$ et $R_i \setminus f(R)$ est disjoint de $W^u(K)$.

Définition 3.5 *Pour tout point x tel que :*

- x est dans la v^{ieme} composante de $R_{i_0} \setminus f(R)$,
- pour tout k compris entre 0 et N , $f^k(x) \in R_{i_k}$,
- $f^N(x)$ est dans la h^{ieme} composante de $R_{i_N} \setminus f^{-1}(R)$,

nous dirons que l'orbite de x admet l'itinéraire $(v, i_0, i_1, \dots, i_N, h)$.

Remarque. L'orbite de tout point de x de $R \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$ admet un unique itinéraire. En effet, x n'appartient ni à $W^s(K)$, ni à $W^u(K)$, l'intersection de l'orbite de x pour le flot avec R est donc finie. De plus, \mathcal{R} est essentielle donc cette orbite correspond à un intervalle dans \mathbb{Z} pour l'application de premier retour f .

Proposition 3.6 *Soit \mathcal{R} une partition de K essentielle, génératrice et incluse dans \tilde{M} . Soient deux points x et y de $R \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$ dont les orbites admettent le même itinéraire.*

Alors les orbites de x et y intersectent $\partial_1 \tilde{M}$ en des points appartenant à la même composante connexe C de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$.

Définition 3.7 *Nous dirons alors que l'itinéraire commun des orbites de x et de y est un code de C .*

Démonstration : Notons $(v, i_0, i_1, \dots, i_N, h)$ l'itinéraire commun des orbites de x et de y . Notons x' et y' les premiers points d'intersection (pour le temps) des orbites de x et de y avec R . Par définition, en notant V la v^{ieme} composante de $R_{i_0} \setminus f(R)$ et H la h^{ieme} composante de $R_{i_N} \setminus f^{-1}(R)$, les points x' et y' appartiennent tous deux à $V \cap (\bigcap_0^N f^{-k}(R_{i_k})) \cap f^{-N}(H)$.

L'intersection $\bigcap_0^N f^{-k}(R_{i_k})$ est un sous-rectangle horizontal de R_{i_0} . La composante H est un sous-rectangle horizontal de R_{i_N} donc $(\bigcap_0^N f^{-k}(R_{i_k})) \cap f^{-N}(H)$ est un sous-rectangle horizontal de R_{i_0} . La composante V est un sous-rectangle vertical de R_{i_0} donc $V \cap (\bigcap_0^N f^{-k}(R_{i_k})) \cap f^{-N}(H)$ est un sous-rectangle de R_{i_0} et, en particulier, est connexe.

D'autre part, pour tout point z de $V \cap (\bigcap_0^N f^{-k}(R_{i_k})) \cap f^{-N}(H)$, ni $f^{-1}(z)$, ni $f^{N+1}(z)$ ne sont dans R donc x n'est ni dans $W^s(K)$, ni dans $W^u(K)$ (la partition est essentielle). L'intersection $V \cap (\bigcap_0^N f^{-k}(R_{i_k})) \cap f^{-N}(H)$ est donc incluse dans une composante connexe de $R \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$. On conclut via le lemme 3.3. \square

Définition 3.8 Soient X un flot de Smale, K un ensemble selle saturé de X et M un voisinage filtrant de X tel que toute composante de M rencontre K . On note (\tilde{M}, \tilde{X}) le modèle de $[X, K]$. On notera encore K le maximal invariant de \tilde{M} .

Soient $(C_1, C'_1), \dots, (C_n, C'_n)$, n couples de cercles plongés dans $\partial_1 \tilde{M}$, disjoints de $W^s(K)$, bordant, sur $\partial_1 \tilde{M}$, des disques deux-à-deux disjoints et disjoints de $W^s(K)$ et tels que les attachements d'anses sur les couples (C_i, C'_i) transforment \tilde{M} en M .

Soit enfin \mathcal{R} une partition de Markov de K essentielle, génératrice, incluse dans \tilde{M} .

Une présentation finie de (M, X) sera la donnée :

- d'un type géométrique de \mathcal{R} ,
- de n couple d'itinéraires (I_i, I'_i) , tel que, pour tout i , I_i et I'_i sont des codes des composantes connexes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ contenant C_i et C'_i .

Remarque. Si M possède une composante connexe ne rencontrant pas K , notons M^0 l'union des composantes connexes de M rencontrant K . Nous appellerons présentation finie de M , toute présentation finie de M^0 complétée par la donnée du genre du bord d'entrée de chacune des composantes de $M \setminus M^0$.

Théorème 3.9 Tout voisinage filtrant M d'un ensemble selle saturé K d'un champ X admet une présentation finie.

Deux voisinages filtrants M et N d'ensembles selle saturés K et L de champs X et Y admettant la même présentation sont globalement topologiquement équivalents.

Démonstration : Nous savons, d'après la proposition 2.8, que le modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) contient une partition essentielle \mathcal{R} de K . On peut toujours se ramener à une partition essentielle génératrice simplement en considérant $R \cap f(R)$.

Notons M^0 l'union des composantes connexes de M rencontrant K . La proposition 0.5 montre que, pour passer (\tilde{M}, \tilde{X}) à (M^0, X) (à équivalence topologique près) par un nombre finis d'attachement d'anses qui ne dépendent que des composantes connexes dans $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ des cercles sur lesquels on les effectue. Le lemme 3.4 montre que toute composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ admet (au moins) un code. Ceci et la remarque précédente achève la démonstration de la première affirmation du théorème.

Pour montrer la seconde affirmation, remarquons d'abord que l'équivalence est donnée par le lemme 1.12 sur les composantes de M et N ne rencontrant pas K et L . On supposera donc désormais que toute composante de M et N rencontre respectivement K ou L .

Il existe, par hypothèse, deux partitions \mathcal{R} et \mathcal{S} de K et L , essentielles, génératrices et incluses dans \tilde{M} et \tilde{N} et de même type géométrique. La proposition 2.5 montre qu'il existe un homéomorphisme h défini des cubes associés à \mathcal{R} et \mathcal{S} réalisant une conjugaison entre des renormalisations de X et Y et envoyant le rectangle orienté R_i sur le rectangle orienté S_i . La proposition 2.10 montre que h s'étend en une équivalence topologique globale de \tilde{M} dans \tilde{N} .

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de voir que l'image par h d'une composante connexe C de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ codée via \mathcal{R} par un itinéraire I est codée dans \tilde{N} par l'itinéraire I via \mathcal{S} . Pour cela, il suffit de considérer un point x de C dont l'orbite admet I comme itinéraire. L'image par h de l'orbite de x admet alors le même itinéraire car h respecte la numérotation des rectangles et des sous-rectangles des R_i et S_i . \square

Remarque. La remarque suivant la définition 1.1 montre que le théorème précédent donne en fait une présentation finie de tout voisinage isolant d'ensemble selle dont le bord est transverse au champ. Un tel voisinage est en effet un voisinage filtrant intrinsèque.

Remerciements. Nous tenons à remercier Rémi Langevin pour sa disponibilité et l'intérêt qu'il a porté à ce travail, José Vieitez pour de nombreuses discussions au cours des premiers pas de notre étude des flots de Smale, et les referees pour leurs critiques constructives d'une première version de l'article.

Appendice A : Il n'existe pas de voisinage canonique associé au germe le long d'un ensemble selle

Nous allons montrer ici que le germe d'un flot de Smale le long d'un ensemble selle saturé ne suffit pas à caractériser la dynamique sur un voisinage invariant :

Proposition 3.10 *Soit \mathcal{M} une variété compacte sans bord de dimension 3 munie d'un champ de Smale X qui admet un ensemble selle saturé K . On considère un voisinage \mathcal{U} de K invariant dans \mathcal{M} . On suppose que K est connexe et admet une orbite homocline.*

Alors il existe une variété \mathcal{N} munie d'un champ de Smale Y admettant un ensemble selle saturé L de façon à ce que :

- *les germes de X et Y le long de K et L sont égaux*
- *il n'existe aucun voisinage invariant \mathcal{V} de L tel que les restrictions de X et Y à \mathcal{U} et \mathcal{V} soient topologiquement équivalentes.*

La démonstration de cette proposition constitue le reste de cet appendice.

Remarques.

— Il suffit de montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tel que L n'admette aucun voisinage invariant sur lequel Y soit équivalent à $X|_{\mathcal{U}'}$. Autrement dit, on peut toujours restreindre \mathcal{U} .

— Supposons au contraire de ce qu'on veut prouver que pour toute variété \mathcal{N} munie d'un champ Y admettant un ensemble selle saturé L tel que $[X, K] = [Y, L]$, on ait un voisinage invariant \mathcal{V} de L tel que $X|_{\mathcal{U}}$ soit équivalent à $Y|_{\mathcal{V}}$. Alors, en particulier, cela est alors vrai quand (\mathcal{N}, Y) est une complétion de Smale du modèle de $[X, K]$ (il existe une telle complétion, voir [9, corollaire 2.1] ou la suite de cet appendice). Quitte à remplacer (\mathcal{M}, X) par une complétion du modèle de $[X, K]$, on peut donc supposer que le modèle \tilde{M} de $[X, K]$ est inclus dans \mathcal{M} comme voisinage isolant de K .

D'après la remarque ci-dessus, on peut supposer que K admet dans \mathcal{M} un voisinage filtrant \tilde{M} qui est un modèle de $[X, K]$: de plus, quitte à restreindre \mathcal{U} , on peut supposer que \mathcal{U} est le saturé par le flot de X de $\mathcal{U} \cap \tilde{M}$ et que $\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M}$ est une sous-surface compacte à bord de $\partial_1 \tilde{M}$; notons alors n le nombre de ses composantes de bord et g son genre.

Remarque. Par hypothèse, K possède une orbite homocline et donc une infinité d'orbites périodiques. On en déduit que la lamination $W^s(K) \cap \partial_1 \tilde{M}$ possède une infinité de feuilles.

Lemme 3.11 *Le complémentaire de $W^s(K)$ dans $\partial_1 \tilde{M}$ possède une infinité de composantes connexes.*

Remarque. Ce fait n'est pas complètement trivial. Par exemple, le minimal exceptionnel d'un flot de Denjoy sur le tore est une lamination sur le tore avec une infinité de feuilles, d'intérieur vide, et dont le complémentaire est connexe.

Schéma de démonstration : Nous avons vu que la lamination $\mathcal{L}_1^s = W^s(K) \cap \partial_1 \tilde{M}$ possède une infinité de feuilles. Les lemmes 1.7 et 1.8 montrent que \mathcal{L}_1^s ne contient qu'un nombre fini de feuilles compactes et que l'ensemble limite de toute demi-feuille est l'une de ces feuilles compactes.

Otons à la surface $\partial_1 \tilde{M}$ chacune de ces feuilles compactes et compactifions la surface ouverte obtenue par un point ajouté à chacun de ses bouts. On obtient ainsi une surface compacte S avec un ensemble fini de points marqué. Chaque feuille non compacte de \mathcal{L}_1^s induit sur S un segment allant d'un point marqué à un autre. Notons $\bar{\mathcal{L}}_1^s$ la famille de ces segments. Les segments de $\bar{\mathcal{L}}_1^s$ sont deux-à-deux d'intérieurs disjoints et sont en nombre infinis. Toute composante connexe de $S \setminus \bar{\mathcal{L}}_1^s$ correspond à une unique composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus \mathcal{L}_1^s$.

On vérifie que la famille $\bar{\mathcal{L}}_1^s$ contient une sous-famille infinie constituées de segments deux-à-deux homotopes à extrémités fixées. Par une démonstration analogue à celle de 1.9, il existe donc une famille infinie de disques ouverts deux-à-deux disjoints bordés chacun par deux de cette sous-famille. Comme l'union de ces segments est un compact d'intérieur vide, chacun de ces disques contient une composante connexe différente de S privée de $\bar{\mathcal{L}}_1^s$. \square

On choisit alors $n + g + 1$ composantes distinctes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$, puis, dans chacune de ces composantes, un couple de cercles disjoints bordant des disques disjoints l'un de l'autre et disjoints de $W^s(K)$. On attache alors une anse sur chacun de ces couples de cercles (comme dans la définition 3.1). On note N la variété à bord obtenue, Y le champ dont elle est munie et L le maximal invariant de N . Le genre de $\partial_1 N$ est donc supérieur $n + g + 1$. On rappelle que le germe de Y le long de L est égal au germe de X le long de K .

Remarque. Chaque composante de $\partial_1 N$ rencontre $W^s(L)$ car chaque composante de $\partial_1 \tilde{M}$ rencontre $W^s(K)$ (voir la remarque à la fin de la partie 1.2).

On peut compléter N en une variété compacte sans bord de dimension 3 munie d'une extension de Smale de Y de faon simple.

On commence par les remarques suivantes :

— On notera B_0 la boule de dimension 3. La variété à bord B_0 peut être munie d'un champ Morse Smale X_0 transverse à son bord, rentrant dans B_0 le long de celui-ci et tel que l'ensemble non errant de X_0 soit simplement constitué d'une singularité puits.

— On notera B_1 le tore plein. La variété à bord B_1 peut être munie d'un champ Morse Smale X_1 transverse à son bord, rentrant dans B_1 le long de celui-ci et tel que l'ensemble non errant de X_1 soit simplement constitué d'une orbite périodique puits.

— On notera B_2 le bretzel plein à 2 trous (c'est à dire la somme connexe de 2 tores pleins). La variété à bord B_2 peut être munie d'un champ Morse Smale X_2 transverse à son bord (qui est un tore à 2 trous), rentrant dans B_2 le long de celui-ci et tel que l'ensemble non errant de X_2 soit simplement constitué de deux orbites périodiques puits et d'un singularité selle dont la variété stable locale est un 2-disque coupant le bord de B_2 en un cercle et dont la variété instable est donc de dimension 1 (voir la figure 7).

— On notera B_p le bretzel plein à p trous (c'est à dire la somme connexe de B_{p-1} et d'un tore plein). La variété à bord B_p peut être munie d'un champ Morse Smale X_p transverse à son bord (qui est un tore à p trous), rentrant dans B_p le long de celui-ci et tel que l'ensemble non errant de X_p soit simplement constitué de p orbites périodiques puits et de $p - 1$ singularités selles dont les variétés stables locales sont des 2-disques coupant le bord de B_p en $p - 1$ cercles disjoints et dont les variétés instables sont donc de dimension 1.

— Pour chaque p , le champ $-X_p$ est un champ Morse Smale sur B_p transverse au bord de B_p et sortant de B_p le long de celui-ci.

On recolte alors sur chaque composante de $\partial_1 N$, l'exemplaire de B_p correspondant au genre p de cette composante muni du champ $-X_p$. Rappelons que chaque composante de $\partial_1 N$ rencontre $W^s(L)$. Si p est supérieur ou égal à 2, il faut effectuer ce recollement de faon à ce que tous les cercles correspondants à la trace des variétés instables des singularités selles rencontrent la lamination $W^s(K) \cap \partial_1 N$ et cela de faon transverse. Le lemme suivant nous assure qu'on peut le faire :

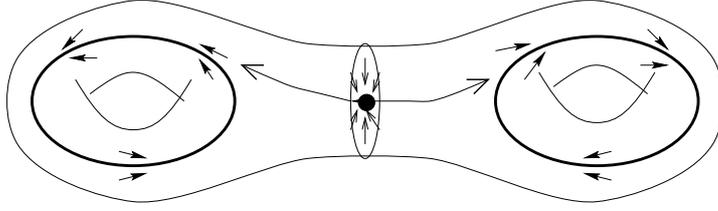


Figure 7: Le champ X_2 dans le bretzel plein à 2 trous

Lemme 3.12 *Pour tout cercle C plongé dans $\partial_1 M$, il existe un cercle C' plongé dans $\partial_1 M$, aussi C^1 -proche que l'on veut de C et transverse à $W^s(K) \cap \partial_1 N$.*

Démonstration : Par définition d'une feuille bord et puisque $\partial_1 M$ est transverse à $W^s(K)$, tout point de $W^s(K) \cap \partial_1 M$ qui est sur une feuille bord est adhérent à $\text{int}(\partial_1 M \setminus W^s(K))$. Par ailleurs, une conséquence classique de la transitivité des pièces basiques est que, pour tout point x d'une pièce basique Λ , la feuille $W^s(x)$ est dense dans $W^s(\Lambda)$ (pour une démonstration dans le cas des difféomorphismes, voir, par exemple, [5][lemme 6.1.3]) ; en particulier, les feuilles bords sont denses dans $W^s(K)$. Par conséquent, $\text{int}(\partial_1 M \setminus W^s(K))$ est un ouvert dense dans $\partial_1 M$.

On peut toujours approcher (en norme C^1) un cercle C par une ligne brisée L telle que les segments de L sont transverses à la lamination $W^s(K) \cap \partial_1 M$. Puisque $\text{int}(\partial_1 M \setminus W^s(K))$ est dense, on peut exiger que les sommets de L soient dans $\text{int}(\partial_1 M \setminus W^s(K))$. Ceci nous permet maintenant d'arrondir les sommets de L par un lissage à support disjoint de $W^s(K)$. \square

Par le recollement ci-dessus, on obtient une variété à bord N^+ muni d'un flot de Smale transverse à son bord, sortant de N^+ le long de celui-ci. Remarquons que le bord de N^+ est $\partial_2 N$. Ce bord est naturellement muni d'une lamination unidimensionnelle d'intérieur vide obtenue en rajoutant à $W^u(L) \cap \partial_2 N$ la trace des variétés instables des singularités selles ajoutées dans N^+ . On peut maintenant compléter N^+ en une variété \mathcal{N} sans bord, en collant des copies des B_p munies des champs X_p de façon que les cercles, traces sur le bord des B_p des variétés stables des singularités selles de B_p , soient transverses à la nouvelle lamination de $\partial_2 N$ et rencontrent tous $W^u(L)$.

Nous avons ainsi construit une variété \mathcal{N} compacte, sans bord, orientable, de dimension 3 munie d'une extension de Smale de Y tel que toute pièce basique ajoutée soit comparable pour l'ordre de Smale à L . Alors N est un voisinage filtrant de L dans \mathcal{N} .

Remarque. La construction ci-dessus montre que tout voisinage isolant d'un ensemble selle dont le bord est transverse au champ peut être plongé comme voisinage filtrant de cet ensemble dans une variété sans bord comme annoncé dans la remarque suivant la définition 1.1.

La démonstration de la proposition 3.10 est alors réduite à la démonstration de la proposition suivante :

Proposition 3.13 *Le champ Y ne possède aucun voisinage \mathcal{V} de L invariant dans \mathcal{N} tel que les restrictions de X et Y à \mathcal{U} et \mathcal{V} soient topologiquement équivalentes.*

Démonstration : Par l'absurde, on suppose qu'il existe un voisinage invariant \mathcal{V} de L dans \mathcal{N} et un homéomorphisme h réalisant l'équivalence entre $X|_{\mathcal{U}}$ et $Y|_{\mathcal{V}}$. Remarquons qu'alors \mathcal{V} ne contient ni orbite puits, ni orbite source, ni singularité selle. Toute orbite de \mathcal{V} sauf éventuellement les séparatrices (de dimension 1) des singularités selles coupe N . Toute orbite de \mathcal{V} disjointe de $W^u(L)$, sauf éventuellement les séparatrices des singularités selles, coupe donc $\partial_1 N$.

Lemme 3.14 *L'intérieur du voisinage \mathcal{V} est disjoint des séparatrices unidimensionnelles des singularités selles.*

Démonstration : Supposons que la variété stable de dimension 1 d'une singularité selle σ rencontre \mathcal{V} en un point intérieur x . Le point x n'appartient donc ni à $W^s(L) = h(W^s(K))$, ni à $W^u(L) = h(W^u(K))$. Comme $h^{-1}(x) \notin W^s(K)$, l'orbite de $h^{-1}(x)$ coupe $\partial_1 M$. On peut donc supposer que $h^{-1}(x)$ appartient à $\partial_1 \tilde{M}$.

Mais tout voisinage de x rencontre $W^s(L)$: en effet, par construction de \mathcal{N} et Y , la variété instable de σ coupe transversalement $W^s(L)$; on conclut par le λ -lemma. Tout voisinage de $h^{-1}(x)$ dans \mathcal{U} rencontre donc $W^s(K)$. Par transversalité de $\partial_1 \tilde{M}$ à X , tout voisinage de $h^{-1}(x)$ dans $\partial_1 \tilde{M}$ rencontre $W^s(K)$. Par compacité de $W^s(K) \cap \partial_1 \tilde{M}$, le point $h^{-1}(x)$ est dans $W^s(K)$. Par suite, x est dans $W^s(L)$ ce qui est impossible.

On fait le même raisonnement si c'est la variété instable de dimension 1 d'une singularité selle qui rencontre l'intérieur de \mathcal{V} en remplaçant W^s par W^u et $\partial_1 \tilde{M}$ par $\partial_2 \tilde{M}$. \square

Quitte à remplacer \mathcal{U} par un voisinage invariant de K du même type (en particulier sans changer n et g) contenu dans son intérieur, on peut supposer que \mathcal{V} est disjoint des séparatrices unidimensionnelles des singularités selles.

On considère $h(\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M})$. C'est une surface compacte à bord topologiquement transverse au flot. Toute orbite de Y coupe au plus une fois cette surface (car h est une équivalence entre X et Y). Enfin cette surface est disjointe de $W^u(L)$ et des séparatrices unidimensionnelles des singularités selles ; l'orbite de chacun de ses points coupe donc $\partial_1 N$ en un point et un seul. En utilisant la compacité de $h(\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M})$ et de $\partial_1 N$ et la transversalité de $\partial_1 N$ à Y , on voit que $h(\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M})$ se projette, via le flot, difféomorphiquement sur une partie de $\partial_1 N$.

Alors la projection de $h(\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M})$ est un voisinage dans $\partial_1 N$ de $\partial_1 N \cap W^s(L)$ par une sous-surface à n composantes de bord. Le genre de $\partial_1 N$ est donc majoré par la somme du genre de $h(\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M})$ et des genres des composantes de $\partial_1 N \setminus W^s(L)$ contenant une composante du bord de la projection de $h(\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M})$. Le genre de chacune de ces dernières composantes étant, par construction, au plus égal à 1, le genre de $\partial_1 N$ est majoré par $g + n$; ce qui est contraire au choix de N .

Cette contradiction achève la démonstration de la proposition 3.13 et donc de la proposition 3.10. \square

Appendice B : Exemples de modèles

Pour que l'article ne reste pas trop abstrait, nous allons exhiber quelques exemples de modèles. Le problème auquel on se heurte pour obtenir des exemples de modèles qui vérifie certaines propriétés est celui de la réalisabilité d'un type géométrique abstrait. La réponse à ce problème fait l'objet de l'article [3]. Nous utiliserons ici le résultat principal de cet article :

Théorème 3.15 (Beguin, Bonatti, Vieitez, [3]) *Pour tout type géométrique abstrait T , il existe un modèle dont le maximal invariant admet une partition de Markov essentielle de type géométrique T .*

Modèle du fer à cheval

Les théorèmes 0.3, 0.4 et 3.15 nous autorisent à parler du modèle d'un type géométrique. Comme premier exemple de modèle, nous allons construire celui du fer à cheval de Smale, c'est-à-dire celui du type géométrique décrit à la figure 5 et que nous noterons ici T .

Rappelons tout d'abord qu'il existe un difféomorphisme de Smale f de la sphère S^2 dont l'ensemble non-errant est réduit à un fer à cheval (c'est à dire une pièce basique selle

admettant une bonne partition de type T), un point fixe puits et un point fixe source. Ce difféomorphisme f est isotope à l'identité. La suspension de ce difféomorphisme est donc un flot de Smale sur $\mathcal{M} \simeq S^1 \times S^2$ dont l'ensemble non-errant est constitué d'une pièce basique selle admettant une partition essentielle de type T (nous noterons K cette pièce basique), de deux orbites puits et source.

On obtient donc un voisinage filtrant de K dans \mathcal{M} en ôtant à \mathcal{M} deux tores pleins dont les âmes sont l'orbite périodique puits et l'orbite périodique source. Ces dernières orbites ne sont pas nouées (ni individuellement, ni entre elles) dans \mathcal{M} (car ces orbites sont les suspensions de points fixes sous f) donc le voisinage filtrant M est homéomorphe au produit de S^1 par S^2 privé de deux disques, c'est-à-dire est homéomorphe à $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$. Les bords d'entrée et sortie de M sont donc chacun constitué d'un tore et un seul. On doit maintenant recueillir quelques informations sur la lamination $\mathcal{L}_1^s = W^s(K) \cap \partial_1 M$.

Lemme 3.16 *La lamination d'entrée \mathcal{L}_1^s du fer à cheval est de genre nul et connexe.*

Schéma de démonstration : En notant \tilde{M} est le modèle de $[X, K]$, la lamination $\mathcal{L}_1^s = W^s(K) \cap \partial_1 M$ est homéomorphe à la lamination $\tilde{\mathcal{L}}_1^s = W^s(K) \cap \partial_1 \tilde{M}$. De plus, dans \tilde{M} , il existe une partition essentielle de type T (théorème 3.15). La surface d'entrée Σ^s associée au type géométrique T , représentée à la figure 5, contient alors la lamination $\tilde{\mathcal{L}}_1^s$ qui est donc de genre nul.

Pour que \mathcal{L}_1^s soit connexe, il suffit, d'après le lemme 1.8, que \mathcal{L}_1^s ne comporte qu'une seule feuille compacte. Par ailleurs, on a vu dans la partie 1.2 que cela équivaut à ce que $W^s(K)$ n'ait qu'une seule séparatrice stable libre. Je pense que la forme des variétés stables et instables du difféomorphisme "fer à cheval" sont assez classiques ; en particulier, on remarque que celles-ci ne possèdent effectivement chacune qu'une seule séparatrice libre, ce qui conclut. \square

Si on suit la construction du modèle à partir d'un voisinage filtrant quelconque (voir la partie 1.2), on doit maintenant considérer une famille maximale de cercles plongés sur $\partial_1 M$, deux-à-deux disjoints, deux-à-deux non-homotopes dans $\partial_1 M \setminus W^s(K)$ et dont aucun ne borde un disque de $\partial_1 M \setminus W^s(K)$. Du fait que $\partial_1 M$ est un tore et du lemme ci-dessus, il résulte qu'une telle famille ne comporte en fait qu'un seul cercle que nous noterons C . Comme \mathcal{L}_1^s est de genre nul, il existe, par ailleurs, un cercle non-homotope à 0 dans $\partial_1 M$ et disjoint de \mathcal{L}_1^s . Par conséquent, on peut supposer C non-homotope à 0 dans $\partial_1 M$.

Selon la procédure de construction du modèle de la partie 1.2, on doit découper M selon l'orbite de ce cercle. Si on voit M comme $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$, on coupe alors selon $\{0\} \times S^1 \times [0, 1]$ et on obtient $[0, 1] \times S^1 \times [0, 1]$. Puis, on doit recoller deux copies de $D^2 \times [0, 1]$ respectivement sur $\{0\} \times S^1 \times [0, 1]$ et $\{1\} \times S^1 \times [0, 1]$. On obtient alors le modèle du fer à cheval : ce modèle est donc homéomorphe à $S^2 \times [0, 1]$ (les bords d'entrée et de sortie sont donc des sphères).

Modèle d'une orbite selle isolée

On peut construire le modèle du germe d'un flot de Smale le long d'une orbite selle isolée par un raisonnement analogue au précédent mais les opérations topologiques sont un peu plus difficiles à décrire.

Par contre, si on note M la sphère S^3 privée de quatre boules B^3 , on vérifie facilement que M peut-être muni d'un champ X transverse au bord de M , rentrant le long de deux des composantes du bord, sortant le long des deux autres, tel que le maximal invariant de M est réduit à une orbite périodique hyperbolique \mathcal{O} et tel que chacune des quatre séparatrices stables et instables de \mathcal{O} rencontre une composante différente du bord de M . Puisque $\partial_1 M$ est alors formé de deux sphères et que la lamination \mathcal{L}_1^s est composée d'une feuille compacte et c'est tout sur chacune de ces sphères, il est immédiat que tout cercle tracé sur $\partial_1 M \setminus W^s(K)$ borde un disque de $\partial_1 M \setminus W^s(K)$. Par suite, (M, X) est un modèle de $[X, \mathcal{O}]$.

Un modèle dont le bord a une caractéristique d'Euler négative

Le bord du modèle d'un ensemble selle provenant d'une suspension est nécessairement de caractéristique d'Euler positive (on a toujours un voisinage filtrant dont le bord est constitué de tores et, au cours de la procédure de construction du modèle de la partie 1.2, on augmente toujours la caractéristique d'Euler). Il semble donc intéressant d'exhiber un ensemble selle dont le modèle a un bord de caractéristique d'Euler négative.

Le théorème 3.15 montre qu'il existe un modèle dont le maximal invariant admet une partition essentielle du type géométrique décrit à la figure 8. Par ailleurs, on vérifie, à l'aide de la procédure de construction décrite dans la preuve lemme 2.13, que la surface d'entrée Σ^s associée à une telle partition essentielle est homéomorphe à la surface représentée à la même figure 8. Cette surface d'entrée est de genre 2. Par définition, la surface d'entrée d'une partition essentielle est plongée dans le bord d'entrée de tout voisinage filtrant contenant la partition. On en déduit qu'il existe un modèle dont le bord d'entrée possède une composante de genre au moins égal à 2.

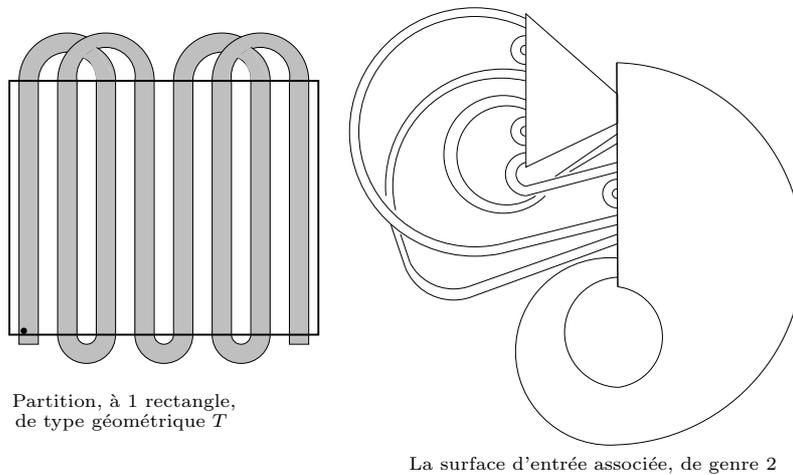


Figure 8: Une partition de Markov à 1 rectangle et la surface d'entrée associée, de genre 2

References

- [1] D. Asimov. *Round Handles and non-singular Morse-Smale flows*. Annals of Mathematics 102, pages 41-54, 1975.
- [2] F. Béguin. *Smale diffeomorphisms of surfaces: an algorithm for the conjugacy problem*. Prépublication, 1999.
- [3] F. Béguin, C. Bonatti et J.L. Vieitez. *Réalisabilité des types géométriques par des flots de Smale en dimension 3*. A paraître aux Annales de la Faculté de Science de Toulouse 8, 1999.
- [4] J.S. Birman et R.F. Williams. *Knotted periodic orbits in dynamical systems II*. Contemporary Mathematics 20 : Low Dimensional Topology, pages 1-60, 1981.
- [5] C. Bonatti et R. Langevin avec la collaboration de E. Jeandenans. *Difféomorphismes de Smale des surfaces*. Astérisque 250, SMF, 1998.
- [6] R. Bowen. *One dimensional hyperbolic sets for flows*. Journal of Differential Equations 12, pages 173-179, 1972.
- [7] J. Christy. *Branched surfaces and attractors I: dynamic branched surfaces*. Transaction of the American Mathematical Society 336, pages 759-784, 1993.

- [8] K. de Rezende. *Smale flows on the three sphere*. Transaction of the American Mathematical Society 303, pages 283-310, 1987.
- [9] J. Franks. *Symbolic dynamics in flows on three manifolds*. Transactions of the American Mathematical Society 279, volume 1, pages 231-236, 1983.
- [10] J. Franks. *Flow equivalence of subshifts of finite type*. Ergodic theory and dynamical systems 4, pages 53-66, 1984.
- [11] J. Franks. *Non singular Smale flows on S^3* . Topology 24, pages 265-282, 1985.
- [12] D. Fried. *Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps*. Topology 22, pages 299-303, 1983.
- [13] J. Guckenheimer et R.F. Williams. *Structural stability of Lorenz Attractors*. Publications de l'I.H.E.S. 50, pages 59-72, 1979.
- [14] S. Hayashi. *Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 -stability and Ω -satbility conjectures for flows*. Annals of mathematics 145, pages 81-137, 1997.
- [15] M. Hirsch, C. Pugh et M. Shub. *Invariant manifolds*. Lectures Notes in Mathematics 583, Springer-Verlag, 1977.
- [16] R. Mañe. *A proof of the C^1 - stability conjecture*. Publications de l'I.H.E.S. 66, pages 161-210, 1988.
- [17] J.W. Morgan. *Non-singular Morse-Smale flows on 3-dimensional manifolds*. Topology 18, pages 41-53, 1978.
- [18] S. Newhouse et J. Palis. *Hyperbolic nonwandering sets on two-dimensional manifolds*. Dynamical Systems, Peixoto ed., Salvador, pages 293-301, 1973.
- [19] J. Palis et F. Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge University Press, 1993.
- [20] W. Parry and D. Sullivan. *A topological invariant for flows on one-dimensional spaces*. Topology 14, pages 297-299, 1975.
- [21] C. Pugh et M. Shub. *Suspending subshifts*. In *Contributions to geometry and Analysis*, C. Percelli and R. Sackester editors, John Hopkins University Press, 1981.
- [22] J.W. Robbin. *A structural stability theorem*. Annals of Mathematics 94, pages 447-493, 1971.
- [23] C. Robinson. *Structural stability of C^1 flows*. Dynamical systems (Warwick, 1974), Lecture Notes in Mathematics 468, pages 262-277, Springer Verlag, 1975.
- [24] S. Smale. *On dynamical systems*. Bol. Soc. Mat. Mexicana 5, pages 195-198, 1960.
- [25] S. Smale. *Differentiable dynamical systems*. Bulletins of A.M.S. 73, 1967, pages 747-817.
- [26] M. Shub. *Stabilité globale des systèmes dynamiques*. Astérisque 56, 1978.
- [27] R.F. Williams. *Expanding attractors*. Publications de l'I.H.E.S. 43, pages 169-203, 1974.