

Université de Bourgogne – Dijon
UFR de Sciences et techniques

Laboratoire de Topologie
(UMR 5584 du CNRS)

Thèse

en vue d'obtenir le titre de
Docteur de l'Université de Bourgogne
(Spécialité: Mathématiques)

Présentée par

François Béguin

Champs de vecteurs hyperboliques en dimension 3

Soutenue publiquement le 9 juillet 1999 devant un jury composé de :

Thierry	BARBOT	Rémi	LANGVIN
Christian	BONATTI	Patrice	LE CALVEZ
Jean-Marc	GAMBAUDO	Michael	SHUB
Étienne	GHYS	Marcelo	VIANA

Directeur de thèse: Christian BONATTI.

Rapporteurs: Patrice LE CALVEZ, Shigenori MATSUMOTO.

Remerciements

Un travail consistant à essayer de comprendre des mathématiques que l'on trouve fort jolies — et à rédiger le peu qu'on en comprend — me semble une aliénation fort enviable... Je remercie Christian Bonatti de m'avoir proposé cette thèse. Je le remercie également de m'y avoir guidé, d'avoir réfléchi à certains problèmes avec moi (et avec enthousiasme), et de m'avoir appris — un tant soit peu — à faire des mathématiques.

On peut penser que cette thèse est, sinon un peu épaisse, tout du moins, comme Obélix, “légèrement enveloppée”. Je remercie d'autant plus chaleureusement Patrice Le Calvez et Shigenori Matsumoto de l'avoir lue attentivement, ainsi que de l'honneur qu'ils m'ont fait en s'y intéressant.

Thierry Barbot, Jean-Marc Gambaudo, Étienne Ghys, Rémi Langevin, Michael Shub et Marcelo Viana ont gentiment accepté de juger cette thèse. À eux tous, très, très sincèrement merci.

J'ai passé trois années très agréables au Laboratoire de Topologie, de discussions de café en questions mathématiques. Merci à chacun de ses membres pour l'ambiance magnifique qu'il y règne.

Je veux aussi remercier ici Laurence Flachet et Florence Gadenne que j'ai trop souvent été voir pour leur demander de résoudre quelque petit problème “administratif”, et Jacqueline Alexandre qui a assuré avec gentillesse et efficacité la reprographie de cette thèse.

Marc Chaperon qui a dirigé mon DEA et m'a “envoyé” à Dijon, Gioia Vago qui a relu certaines parties de cette thèse, m'y a signalé de petites erreurs en s'excusant toujours de ne pas comprendre les preuves fausses, José Vieitez avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer, qui a trouvé de l'argent pour m'inviter en Uruguay et m'y a accueilli plus que chaleureusement,... il est bien d'autres personnes que j'aimerais remercier ici.

Résumé — Cette thèse est consacrée à l'étude des dynamiques topologiques globales des champs de vecteurs structurellement stables sur les variétés de dimension 3. La base de l'étude est la description de présentations combinatoires finies pour les *champs de Smale* (les champs dont toute pièce basique est une orbite isolée ou est transversalement homéomorphe à un Cantor ; ces dernières pièces basiques seront dites *selles*).

Une présentation finie est essentiellement constituée du *type géométrique* d'une partition de Markov ; c'est une combinatoire qui décrit l'ordre, la position et le sens des intersections des rectangles de la partition de Markov avec leurs premiers retours sur une section locale. Un type géométrique caractérise le germe de la dynamique le long d'un ensemble selle. L'obtention de présentations de la dynamique globale passe ainsi par la construction d'un *modèle* canonique du germe d'un champ de vecteurs le long d'un ensemble selle : ce sont, en quelque sorte, la variété à bord et le champ les plus simples qui portent le germe considéré.

On montre alors que tout type géométrique abstrait est réalisable par un champ de Smale d'une variété de dimension 3. On montre également que les différents types géométriques d'un ensemble selle sont récursivement énumérables grâce à quatre opérations élémentaires.

On cherche ensuite à comprendre quels types géométriques correspondent à des partitions de Markov de suspensions de difféomorphismes de surfaces compactes. On sait donner une condition nécessaire et suffisante si on demande à la partition d'être dessinée sur la surface de suspension. Par ailleurs, on donne une autre condition qui est nécessaire pour être une suspension et suffisante pour admettre une section de Birkhoff.

Le dernier chapitre est consacré aux difféomorphismes de Smale des surfaces compactes. On y montre qu'il existe un algorithme décidant si deux types géométriques correspondent à un même ensemble selle d'un même difféomorphisme.

Mots clés — champs de vecteurs, flots, dynamiques hyperboliques, flots de Smale, classification, présentations combinatoires, partitions de Markov, suspensions, sections de Birkhoff, algorithmes.

Classification Mathématique par sujets (2000) — 37D20, 37C10, 37C15, 37E99.

Abstract (Hyperbolic vector fields on 3-manifolds) — In this thesis, we study the global topological dynamics of structurally stable vector fields on 3-manifolds. The basis of this work is the description of combinatorial finite presentations for *Smale vector fields* (that is, vector fields whose basic pieces either are single orbits or are transversally homeomorphic to Cantor sets; these last basic pieces will be called *saddle-like sets*).

A finite presentation is essentially constituted by the *geometrical type* of a Markov partition : this combinatorial information describes the intersections (order, positions and orientations) of the rectangles of the partition and their images by the first return map on a local section. A geometrical type characterizes the germ of the dynamics along a saddle-like set. To get some presentations of the global dynamics, we build a canonical *model* of the germ of a vector field along a saddle-like set: in some way, these are the simplest manifold and vector field carrying the germ we consider.

Then, we prove that any abstract geometrical type is realizable by a Smale vector field on a 3-manifold. We also show how the different geometrical types of a saddle-like set can be recursively enumerated thanks to four elementary operations.

Thereafter, we consider the problem of determining which geometrical types correspond to Markov partitions of suspensions of diffeomorphisms of compact surfaces. First, we can give a necessary and sufficient condition if we require moreover the Markov partition to lie on a surface of suspension. If not, we provide another condition which is necessary to have a suspension and sufficient to admit a Birkhoff section.

The last chapter is devoted to Smale diffeomorphisms of compact surfaces. We prove that there exists a finite algorithm which decides whether or not two geometrical types correspond to the same saddle-like set of the same diffeomorphism.

Keywords — vectors fields, flows, hyperbolic dynamics, Smale flows, classification, combinatorial presentations, Markov partitions, suspensions, Birkhoff sections, algorithms.

2000 Mathematical Subject Classification — 37D20, 37C10, 37C15, 37E99.

Table des matières

Introduction	9
0.1 difféomorphismes et champs de vecteurs structurellement stables	11
0.2 Exemples de champs de vecteurs hyperboliques en dimension 3	17
0.3 Classification des flots hyperboliques en dimension 3	26
0.4 Présentation des résultats	29
1 Présentations combinatoires finies des flots hyperboliques	41
1.1 Modèle d'un ensemble selle	46
1.2 Type géométrique : présentation finie du modèle	61
1.3 Du modèle aux voisinages filtrants du champ initial	75
1.4 Présentations finies globales de champs de Smale	81
Appendice A. Flots hyperboliques, flots de Smale et dérivé d'Anosov	85
Appendice B. Il n'existe pas de voisinage canonique associé à un germe	87
2 Construction de flots hyperboliques	93
2.1 Patrons et ouvrages associés à un type géométrique	94
2.2 De l'ouvrage \mathcal{P}_∞ au modèle de T	103
3 Présentations finies équivalentes	115
3.1 Les différentes partitions de Markov d'un ensemble selle saturé	118
3.2 Traduction en termes de types géométriques	136
4 Flots en dimension 3 et suspensions de difféomorphismes de surfaces	145
4.1 Types géométriques réalisables pour les difféomorphismes	151
4.2 Condition nécessaire pour être un germe de suspension	167
4.3 Condition suffisante pour admettre une section de Birkhoff	177
Appendice A. Types géométriques réalisables et de genres finis	201
Appendice B. La condition 3 traduite sur la surface Σ^u	212
5 Problème de conjugaison des difféomorphismes hyperboliques des surfaces	215
5.1 Construction géométrique des partitions de Markov primitives	221
5.2 Construction de $\mathcal{T}(f, K, p)$ dans un ensemble fini	236
5.3 La fonction $\Pi_p : T \mapsto \mathcal{T}(T, p)$ est N -cc-réursive	247
5.4 La fonction $\Pi_p : T \mapsto \mathcal{T}(T, p)$ est réursive	261

Appendice A. Composition de types géométriques	267
Appendice B. Types géométriques primitifs du fer à cheval	271
Appendice C. Commentaires sur le cas non-transitif	272
Appendice D. Conjugaison topologique des pseudo-Anosov	275

Bibliographie	279
----------------------	------------

Introduction

Je voudrais, au long de cette thèse, décrire le mieux possible les dynamiques globales des champs de vecteurs structurellement stables en dimension 3. On s'intéressera également aux difféomorphismes structurellement stables des surfaces dont on achèvera la classification.

Comme on peut difficilement la faire remonter à la nuit des temps, je crois que l'on peut fixer l'origine du problème étudié au rêve, formulé par Smale ([Sm60],[Sm67]), de classer un ensemble résiduel de systèmes dynamiques — ou au moins d'actions de difféomorphismes et de champs de vecteurs sur les variétés compactes.

Ce programme de Smale a été mené à bien de façon idéale pour les champs de vecteurs des surfaces par Peixoto qui a caractérisé un ensemble dense de dynamiques — les dynamiques *structurellement stables* — qu'il a ensuite classifiées à équivalence topologique près ([Pe62],[Pe73]). Il faut cependant remarquer que les champs de vecteurs structurellement stables des surfaces ne présentent pas de dynamique "chaotique". Par exemple, ces champs de vecteurs ne possèdent qu'un nombre fini d'orbites périodiques, et aucune orbite non-périodique n'est récurrente.

L'apparition *d'intersections homoclines* pour les champs de vecteurs structurellement stables en dimension 3, et déjà en dimension 2 quand on considère les difféomorphismes plutôt que les champs de vecteurs, change radicalement la nature du problème. Selon la phrase consacrée de Poincaré, en présence d'intersections homoclines, la courbe stable et la courbe instable d'un point périodique "*forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau*" ([Poi]). Puisque le dessin que forment deux telles courbes est un invariant topologique, on doit au moins comprendre quels sont les différents types de tels "treillis" possibles.

Voici une autre indication assez marquante, me semble-t-il, de la complexité que peut présenter la dynamique topologique d'un champ structurellement stable dès la dimension 3: il existe un champ de vecteurs structurellement stable sur S^3 qui porte tous les nœuds comme orbites périodiques ([Ghr]).

Les variétés invariantes des intersections homoclines ont tout de même été, dans une certaine mesure, "démêlées" et on termine, dans cette thèse, la classification des

difféomorphismes structurellement stables des surfaces. Plus précisément, on résoudra le problème de conjugaison pour de tels difféomorphismes à l'aide d'un algorithme.

Par ailleurs, le principal but de cette thèse est de décrire les actions des champs de vecteurs structurellement stables des variétés compactes de dimension 3. On donne des présentations combinatoires finies de tels champs de vecteurs et on construit un prototype de champ réalisant chaque présentation finie abstraite. On peut aussi essentiellement énumérer les différentes présentations finies d'un champ donné (par contre, on ne sait pas décider, pour l'instant, si deux présentations combinatoires finies sont équivalentes).

L'étude des champs de vecteurs en dimension 3 ne se heurte pas de front à la topologie de dimension 3. En effet, dans la variété considérée, on dispose d'une direction privilégiée donnée par le champ que l'on considère simultanément. En pratique, on exploitera le plus possible l'idée classique suivante: en utilisant des sections de Poincaré, on ramène localement la dynamique d'un champ en dimension 3 à celle d'un difféomorphisme en dimension 2.

Cependant, il faut se garder de croire que l'étude globale des champs de vecteurs structurellement stables en dimension 3 et celle des difféomorphismes des surfaces soient assez proches l'une de l'autre. En fait, on verra que les résultats globaux obtenus pour ces deux types de dynamiques sont toujours très différents.

Après ce bref avant-goût, il est peut-être temps de présenter formellement les objets que nous allons étudier.

0.1 difféomorphismes et champs de vecteurs structurellement stables

Bien que l'objet principal de cette thèse soit l'étude des champs de vecteurs en dimension 3, il sera fréquemment utile ou instructif de comparer le comportement de ces champs à celui des difféomorphismes des surfaces. Par ailleurs, un long chapitre sera consacré à un algorithme terminant la classification des difféomorphismes structurellement stables des surfaces. Je vais donc rappeler les notions de stabilité structurelle, d'hyperbolicité, etc, aussi bien pour les difféomorphismes que pour les champs de vecteurs, quitte à alourdir l'exposé.

Par contre, je ne rappellerai que les notions et propriétés dont nous aurons immédiatement besoin, renvoyant aux nombreux ouvrages sur le sujet pour plus de détails, par exemple, à [Sm67] ou [Shu].

0.1.1 Conjugaisons et équivalences topologiques, stabilité structurelle

On s'intéresse aux C^1 -difféomorphismes et aux champs de vecteurs C^1 des variétés compactes du point de vue de leur dynamique. Il nous faut donc utiliser des relations d'équivalence qui respectent autant que possible l'action de ces difféomorphismes et champs de vecteurs sur les variétés sous-jacentes.

Rappelons que l'orbite d'un point x sous l'action d'un difféomorphisme f désigne simplement la suite de points $\dots, f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \dots$. La relation d'équivalence qui s'impose pour les difféomorphismes est la conjugaison: deux difféomorphismes f et g agissant sur des variétés compactes \mathcal{M} et \mathcal{N} sont conjugués s'il existe un homéomorphisme ou un difféomorphisme $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ vérifiant la relation $h \circ f = g \circ h$. Une telle conjugaison envoie les orbites de f sur les orbites de g . Si f et g sont conjugués, on peut dire qu'alors, les actions de f et g sont les mêmes, vues à travers le changement de coordonnées h .

On veut alors définir une notion de stabilité. Un difféomorphisme f sera stable si pour tout difféomorphisme g suffisamment C^1 -proche de f , les difféomorphismes f et g sont conjugués. On se convainc facilement que si on demande aux conjugaisons d'être différentiables, alors aucun difféomorphisme n'est stable: par exemple, si f a un point périodique x de période n et si g est une C^1 -perturbation de f telle que x est encore un point périodique de période n de g mais telle que les spectres de df_x^n et dg_x^n ne sont pas égaux, alors f et g ne peuvent pas être conjugués par un difféomorphisme.

C'est pourquoi Andronov et Pontryagin ont donné naissance à la notion de stabilité structurelle ([AnPo]). Deux difféomorphismes f et g sont dits *topologiquement conjugués* s'ils sont conjugués par un homéomorphisme h . Un C^1 -difféomorphisme f de \mathcal{M} est alors dit *C^1 -structurellement stable* s'il existe un C^1 -voisinage \mathcal{U} de f , tel que, pour tout g dans \mathcal{U} , les difféomorphismes f et g sont topologiquement conjugués (on peut alors toujours choisir l'homéomorphisme de conjugaison proche de l'identité).

Pour un champ de vecteurs X , de classe C^1 , sur une variété \mathcal{M} , rappelons tout d'abord que le *flot* de X est la famille $\{X^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ d'applications de \mathcal{M} dans \mathcal{M} définie par $X^0 = Id_{\mathcal{M}}$ et, pour tout $x \in \mathcal{M}$, $\frac{dX^t(x)}{dt}|_{t=0} = X(x)$. L'orbite d'un point x_0 sous l'action de X est alors l'union des points $X^t(x_0)$ quand t varie dans \mathbb{R} ; c'est aussi la solution passant par x_0 de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = X(x)$. Un champ de vecteurs caractérisant son flot et réciproquement, on considérera alternativement des champs de vecteurs ou leurs flots, sans plus de précaution.

Dès lors que l'on veut que l'ensemble des dynamiques structurellement stables soit non-vide, la relation de conjugaison topologique est trop rigide pour ce qui est des flots. En effet, la période d'une orbite périodique reste invariante par conjugaison topologique d'un flot et varie continûment lorsqu'on perturbe ce flot. On doit donc affaiblir la relation d'équivalence, tout en préservant la structure orbitale: on dira que deux champs de vecteurs X et Y sur des variétés compactes \mathcal{M} et \mathcal{N} sont *topologiquement équivalents* s'il existe un homéomorphisme $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ envoyant orbite orientée de X sur orbite orientée de Y (il suffit que le flot de X soit topologiquement conjugué à une reparamétrisation du flot de Y).

Un champ de vecteurs X est alors C^1 -structurellement stable si pour tout champ Y suffisamment C^1 -proche de X , les champs X et Y sont topologiquement équivalents.

Voici donc définis, les difféomorphismes C^1 -structurellement stables des surfaces et les champs de vecteurs C^1 -structurellement stables des variétés de dimension 3 qui vont être les objets de notre attention tout au long de cette thèse.

Les difféomorphismes et les flots C^1 -structurellement stables sont les candidats naturels pour une classification. D'une part, s'intéresser à des dynamiques qui résistent à la perturbation semble naturel. D'autre part, une classification à l'aide d'invariants algébriques ou de présentations combinatoires finies des dynamiques structurellement stables est *a priori* possible puisque l'ensemble des classes d'équivalence de difféomorphismes ou champs de vecteurs est par définition discret donc dénombrable (la topologie C^1 est séparable).

Le programme de Smale était de classifier un ensemble résiduel (au sens de Baire) de dynamiques. On sait depuis [AbSm] que les dynamiques structurellement stables ne sont pas denses parmi les difféomorphismes ou les champs de vecteurs. En fait, des ouverts de dynamiques instables apparaissent dès la dimension 2 pour les difféomorphismes et dès la dimension 3 pour les champs de vecteurs (une raison à cela est l'existence d'attracteurs "de Lorenz" persistants; voir [GuWi], [ABS], ou plus récemment [Tuc]). C'est pourquoi, de nombreux dynamiciens tentent maintenant de classifier les dynamiques globales d'un point de vue non plus topologique, mais statistique. Les dynamiques structurellement

stables restent cependant un ensemble naturel de dynamiques dont on peut espérer décrire “réellement” l’action, et non pas l’action “en moyenne”.

Comme on ne travaillera qu’avec la topologie C^1 , on oubliera systématiquement la référence à cette topologie et on parlera simplement de dynamiques structurellement stables.

0.1.2 Application de premier retour de Poincaré d’un flot et suspension d’un difféomorphisme

La comparaison que nous avons déjà commencé à mettre en scène entre champs de vecteurs en dimension 3 et difféomorphismes des surfaces est justifiée par les notions d’*application de retour de Poincaré* et de *suspension*. De manière générale, l’étude des dynamiques des difféomorphismes en dimension n peut être vue comme une réduction de l’étude des dynamiques des champs de vecteurs en dimension $n+1$. Il y a à cela une raison globale et une raison locale.

Tout d’abord, la description de la dynamique globale de certains champs de vecteurs en dimension $n+1$ se ramène à celle des difféomorphismes de dimension n . En effet, considérons un champ de vecteurs X de classe C^1 , agissant sur une variété \mathcal{M} de dimension $n+1$, et supposons qu’il existe une hypersurface compacte (sans bords) Σ dans \mathcal{M} , transverse en tout point à X et coupant tout segment de longueur T d’orbite de X (pour un certain T). On définit l’application de premier retour f de X sur Σ comme l’application qui a tout point x de Σ associe le premier point d’intersection de l’orbite strictement positive de x avec Σ . On vérifie que f est un C^1 -difféomorphisme de Σ et on dit que X est la *suspension* de f (on vérifie également que la suspension de f est unique à équivalence topologique près).

Réciproquement, pour tout C^1 -difféomorphisme f d’une variété Σ de dimension n , on peut construire abstraitement la suspension de f en considérant l’ensemble

$$\mathcal{M} = (\Sigma \times \mathbb{R}) /_{(x,t) \sim (f(x), t-1)}$$

(on note π la projection de $\Sigma \times \mathbb{R}$ sur \mathcal{M}). On vérifie que \mathcal{M} est une variété compacte de dimension $n+1$ que l’on munit du champ de vecteurs $X = \pi_* (\frac{\partial}{\partial t})$ (*a priori*, \mathcal{M} n’est que C^1 et le champ X n’est que continu, mais on peut montrer que le couple (\mathcal{M}, X) est topologiquement équivalent à un couple (\mathcal{M}', X') où X' est C^1). On remarque que $\pi(\Sigma \times \{0\})$ est une hypersurface transverse à X coupant tout segment d’orbite de longueur 1 de X et que l’application de premier retour de X sur cette hypersurface est précisément le difféomorphisme f : le champ X est donc la suspension de f .

Si f et g sont topologiquement conjugués alors on construit immédiatement une équivalence topologique entre les suspensions de f et de g . Autrement dit, l’équivalence topologique entre les suspensions de difféomorphismes f et g induit une relation d’équivalence plus grossière que la conjugaison topologique entre f et g . En ce sens, pour donner une description globale de certains champs de vecteurs en dimension $n+1$, il suffit de donner une description globale des difféomorphismes en dimension n .

Remarque Attention, un champ de vecteurs admet *a priori* de nombreuses surfaces transverses coupant tout segment d'orbite de longueur fixée. Ainsi, si X est la suspension de f et si X est aussi la suspension de g , alors f et g ne sont pas nécessairement topologiquement conjugués. La classification des suspensions en dimension $n + 1$ ne se réduit donc pas de façon directe à celle des difféomorphismes en dimension n .

Tout champ de vecteurs, même sans singularité, n'est pas toujours la suspension d'un difféomorphisme global. Par contre, l'étude locale d'un champ de vecteurs X peut souvent être ramenée à celle d'un difféomorphisme.

Il suffit pour cela de considérer une "petite" surface à bord Σ transverse à X . Si l'application de premier retour f sur Σ est définie en un point x de l'intérieur de Σ et si $f(x)$ est également dans l'intérieur de Σ alors f est définie sur un voisinage U de x dans Σ . Si on note \mathcal{U} l'union des segments d'orbites de X compris entre un point de U et son premier retour sur Σ , alors la dynamique du champ X restreint à \mathcal{U} se ramène à la dynamique de f restreinte à U . L'étude de X sur \mathcal{U} se ramène donc à celle de f sur U .

Remarque Attention, dans la construction locale ci-dessus, on décrit des dynamiques en restriction à des ensembles qui ne sont pas invariants (pour ces dynamiques). De telles informations, on ne peut que difficilement tirer des informations sur les dynamiques globales. D'autre part, cette réduction locale n'est, encore une fois, pas unique.

0.1.3 Caractérisation des dynamiques structurellement stables

Un préalable à une classification est de posséder une caractérisation des difféomorphismes ou champs de vecteurs structurellement stables (par des propriétés portant sur le difféomorphisme ou le champ étudié lui-même et non pas par comparaison de sa dynamique à celle des difféomorphismes ou des champs voisins).

L'hyperbolicité s'est imposée comme la composante dominante de la stabilité structurelle. Je vais tenter une justification heuristique.

Notons d'abord qu'un paroxysme de difféomorphisme qui n'est pas structurellement stable est l'identité (tout point est fixe par l'identité et ça n'est évidemment pas vrai pour les difféomorphismes voisins!). La stabilité structurelle a alors été comprise d'abord au voisinage des points fixes : un difféomorphisme f est hyperbolique en un point fixe en x si la différentielle de f en x possède des sous-espaces invariants supplémentaires et contracte strictement ou dilate strictement les vecteurs tangents à ces sous-espaces. On évite ainsi au maximum le comportement de l'identité : localement, l'orbite sous l'action de f de tout point à part x s'éloigne exponentiellement vite de l'orbite de ce point sous l'action de l'identité. On peut alors effectivement montrer qu'un difféomorphisme f hyperbolique en un point fixe x est "localement structurellement stable" (voir, par exemple, [PaMe]).

D'un point de vue plus global, un compact K d'une variété \mathcal{M} , invariant sous l'action d'un difféomorphisme f , est dit *hyperbolique* s'il existe une décomposition du fibré tangent à \mathcal{M} au-dessus de K en somme directe de deux sous-fibrés continus, $T\mathcal{M}|_K = E^s \oplus E^u$, invariants par df , et tels que df contracte (resp. dilate) uniformément tout vecteur de E^s (resp. E^u), c'est à dire : il existe une métrique $\|\cdot\|$ et une constante $\lambda < 1$ telles que

- pour tout $x \in K$ et tout $v \in E_x^s$, $\|df(v)\| \leq \lambda\|v\|$,
- pour tout $x \in K$ et tout $w \in E_x^u$, $\|df(w)\| \geq \lambda^{-1}\|w\|$,

La direction tangente à un champ de vecteurs n'est ni contractée ni dilatée par le flot de ce champ ; on doit tenir compte de cette direction dans la définition de l'hyperbolicité pour les champs. Un compact K d'une variété \mathcal{M} , invariant par l'action du flot d'un champ de vecteur X et disjoint de l'ensemble des singularités est dit *hyperbolique* s'il existe une décomposition du fibré tangent à \mathcal{M} au-dessus de K en somme directe de trois sous-fibrés continus, $T\mathcal{M}|_K = \mathbb{R}X \oplus E^s \oplus E^u$, invariants par la différentielle du flot et tels que la différentielle du flot dilate uniformément les vecteurs de E^u et contracte uniformément les vecteurs de E^s .

Par ailleurs, une singularité x d'un champ X est dite hyperbolique si $T_x\mathcal{M}$ se décompose en deux sous-espaces invariants dont les vecteurs sont strictement contractés et strictement dilatés par la différentielle du flot.

L'hyperbolicité a de nombreuses conséquences ; en particulier, elle assure l'existence de variétés invariantes stables et instables.

Considérons un compact K d'une variété sur laquelle agit un difféomorphisme f . Pour un point x de K , on définit l'ensemble stable $W^s(x)$ de x :

$$W^s(x) = \{y \in \mathcal{M} \mid d(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty\}$$

Si K est hyperbolique, $W^s(x)$ est une variété injectivement immergée dans \mathcal{M} , tangente en x à E_x^s et de la dimension de E_x^s (voir [HPS]). On vérifie immédiatement que $f(W^s(x)) = W^s(f(x))$.

L'ensemble instable $W^u(x)$ est obtenu en remplaçant f par f^{-1} dans la définition ci-dessus. Si K est hyperbolique, $W^u(x)$ est une variété injectivement immergée et tangente en x à E_x^u .

La variété stable (resp. instable) de K est définie comme l'ensemble des points x tels que la distance de l'orbite positive (resp. négative) de x à K tend vers 0. Un lemme de pistage (en anglais, *shadowing lemma*; voir, par exemple, [Shu]) permet de prouver que (dans les cas que nous considérerons) la variété stable de K est également l'union des variétés stables des points de K . La variété stable de K est une lamination (non compacte) de \mathcal{M} .

Pour les flots, il faut comme toujours tenir compte de la direction tangente au champ. Pour un point x d'un ensemble hyperbolique, on définit la *variété stable forte*

$$W^{ss}(x) = \{y \in \mathcal{M} \mid d(X^t(y), X^t(x)) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty\}$$

La *variété stable (faible)* $W^s(x)$ de x est l'orbite de la variété stable forte de x . La variété stable forte est une variété injectivement immergée tangente à E_x^s , la variété stable faible est une variété injectivement immergée tangente à $\mathbb{R}X(x) \oplus E_x^s$ (voir [PS70]).

Remarque Les variétés stables fortes des points sont des objets de manipulation délicate car, si $X = \varphi.Y$ ou φ est une fonction réelle C^1 et strictement positive (l'identité envoie alors les orbites orientées de X sur celles de Y), les laminations stables fortes d'un ensemble hyperbolique K pour X et Y ne sont pas nécessairement conjuguées.

On l'a déjà dit, l'hyperbolicité sera la composante essentielle de la stabilité structurelle. La condition d'hyperbolicité porte sur l'ensemble *non-errant* du difféomorphisme ou du champ de vecteurs. Un point est dit *errant* s'il possède un voisinage U tel que U soit disjoint de $f^n(U)$ pour tout $n \geq 1$ (resp. tel que U est disjoint de $X^t(U)$ pour tout $t > 1$). L'ensemble des points non-errants est généralement noté $\Omega(f)$ (resp. $\Omega(X)$).

C'est sur cet ensemble que se concentre la dynamique. Cet ensemble contient par définition les orbites périodiques et les orbites récurrentes (c'est-à-dire qui reviennent infiniment près d'elles-mêmes). De plus, notons $\alpha(x)$ et $\omega(x)$ l'ensemble des points d'adhérence des orbites négatives et positives de x ; alors, pour tout point x de \mathcal{M} , les ensembles $\alpha(x)$ et $\omega(x)$ sont inclus dans l'ensemble non-errant.

On est maintenant en mesure d'énoncer les caractérisations des difféomorphismes et champs de vecteurs structurellement stables :

Théorème (Robbin [Ro71], Robinson [Ro76], Mañé [Man]) *Un difféomorphisme f agissant sur une variété compacte est C^1 -structurellement stable si et seulement si :*

- *l'ensemble non-errant $\Omega(f)$ est hyperbolique et si l'ensemble des orbites périodiques f est dense dans $\Omega(f)$ (cette propriété s'appelle classiquement "l'axiome A"),*
- *pour tous points x et y de $\Omega(f)$, les variétés stable et instable $W^s(x)$ et $W^u(y)$ sont transverses (cette propriété s'appelle "la transversalité forte").*

Pour les flots, les attracteurs "de type Lorenz", dont l'existence persiste par C^1 -perturbation du champ de vecteurs mais qui ne sont pas structurellement stables, indiquent qu'il faut éviter de mélanger, dans un même ensemble transitif, singularités et orbites périodiques (de période non-nulle). C'est en fait le seul ingrédient qu'il faut rajouter à la version "difféomorphismes" :

Théorème (Robbin, Robinson [Ro75], Mañé, Hayashi [Hay]) *Un champ de vecteur X d'une variété compacte est C^1 -structurellement stable si et seulement si :*

- *l'ensemble non-errant $\Omega(X)$ est l'union d'un nombre fini de singularités hyperboliques et d'un compact disjoint de l'ensemble des singularités, hyperbolique, et dans lequel les orbites périodiques sont denses,*
- *pour tous points x et y de $\Omega(X)$, les variétés stable et instable (faibles) $W^s(x)$ et $W^u(y)$ sont transverses.*

Ces caractérisations incitent à parler simplement de *dynamiques hyperboliques* pour les dynamiques structurellement stables. On le fera parfois, comme dans le titre ; ceci d'autant plus qu'on ne se servira jamais directement de la définition de la stabilité structurelle, mais plutôt de sa caractérisation.

Terminons ces rappels par celui de la décomposition spectrale de Smale ([Sm67]). Celle-ci énonce que, pour un difféomorphisme ou un flot axiome A, l'ensemble non-errant se décompose en un nombre fini de compacts disjoints

$$\Omega = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_n$$

où les Λ_i sont transitifs (chacun possède une orbite dense) et maximaux pour ces propriétés : ce sont les *pièces basiques* de la décomposition spectrale.

On dit d'un ensemble hyperbolique K qu'il est *saturé* si $K = W^s(K) \cap W^u(K)$. Les sous-ensembles saturés transitifs de l'ensemble non-errant d'un difféomorphisme ou d'un champ structurellement stable sont les pièces basiques. Les *ensemble hyperboliques saturés* auront une grande importance dans notre étude. En effet, bien plus que la transitivité, c'est la propriété de saturation qui fait que l'on peut considérer un ensemble hyperbolique indépendamment du reste de la dynamique.

La dimension des directions stables et instables est, par définition d'un ensemble hyperbolique, constante sur une pièce basique. De plus, pour les champs de vecteurs structurellement stables en dimension 3, la dimension topologique d'une pièce basique est 0 (singularité), 1 (la pièce basique est, transversalement au champ, totalement discontinue), 2 (la pièce basique est une lamination de dimension 2) ou 3 (la pièce basique est égale à la variété entière). Nous appellerons, selon une terminologie classique ([Fr83],[Fr85]), *champs de Smale* les champs structurellement stables dont l'ensemble non-errant ne comportera que des singularités et des pièces basiques de dimension topologique 1 (ceci équivaut à exclure la présence d'attracteurs ou de répulseurs hyperboliques et à exclure les flots d'Anosov transitifs, voir la suite).

Remarque Attention, cette convention s'oppose à celle de [BLJ] où Bonatti et Langevin appellent *difféomorphisme de Smale* n'importe quel difféomorphisme structurellement stable. Cependant, il faut noter que les auteurs de [BLJ] se ramènent immédiatement à n'étudier que des difféomorphismes dont les pièces basiques sont totalement discontinues.

0.2 Exemples de champs de vecteurs hyperboliques en dimension 3

L'ensemble des dynamiques que nous voulons étudier est maintenant circonscrit. Je propose alors une rapide promenade dans le zoo des flots hyperboliques en dimension 3. J'espère qu'on y entreverra la richesse et la diversité de telles dynamiques.

Rappelons tout d'abord un minimum de vocabulaire pour bien lever l'ambiguïté des termes relatifs aux orbites périodiques et aux singularités : une singularité *source* (resp. *puits*) est une singularité hyperbolique où la différentielle du champ est strictement dilatante (resp. contractante), c'est-à-dire, pour un flot en dimension 3, une singularité hyperbolique dont la variété instable (resp. stable) est de dimension 3. Les autres singularités hyperboliques seront dites *singularités selles* (on a alors $\dim W^s = 2$ et $\dim W^u = 1$ ou l'inverse). Une orbite périodique hyperbolique est dite *source* (resp. *puits*) si la dimension de la variété instable (resp. stable forte) aux points de cette orbite est maximale (égale à 2 pour un champ en dimension 3). Les orbites périodiques selles en dimension 3 sont les orbites périodiques aux points desquelles, on a $\dim W^{ss} = \dim W^{uu} = 1$, c'est-à-dire $\dim W^s = \dim W^u = 2$.

On peut maintenant décrire les premiers exemples.

Flots de type gradient

Le champ de vecteurs structurellement stable sur une variété de dimension 3 le plus simple est certainement le suivant. On considère la sphère $S^3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$ et le champ X sur cette sphère défini comme le gradient de la dernière coordonnée t . La dynamique de ce champ s'appelle la dynamique nord-sud sur S^3 .

On voit immédiatement que le champ X possède une singularité hyperbolique source au pôle nord $N = (0,0,0,1)$ de la sphère et une singularité hyperbolique puits au pôle sud $S = (0,0,0,-1)$. Par ailleurs, tous les méridiens sont invariants par le flot de X et le champ n'est jamais nul ailleurs qu'en N et S . Mis à part les singularités N et S , toutes les orbites sont donc errantes et vont de N à S le long des méridiens.

Le champ X vérifie par conséquent la caractérisation des champs structurellement stables de la partie précédente (la transversalité forte est triviale à cause de la dimension maximale des variétés stables et instables des singularités N et S). La figure 1 ci-dessous est réalisée en supprimant une coordonnée, c'est-à-dire sur S^2 au lieu de S^3 .

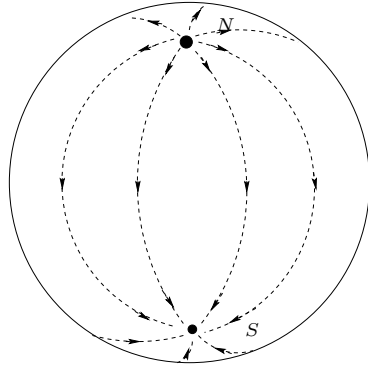


FIG. 1 – La dynamique nord-sud sur S^3 (vue en supprimant une coordonnée, c'est-à-dire en fait sur S^2)

Une variante du champ ci-dessus consiste à considérer la dynamique nord-sud sur la sphère S^2 (définie comme ci-dessus, en considérant S^2 euclidienne dans \mathbb{R}^3 et la dynamique donnée par le gradient de la dernière coordonnée), puis à suspendre cette dynamique. On obtient alors un champ de vecteurs sur $S^2 \times S^1$ avec une orbite périodique source, une orbite périodique puits et toutes les autres orbites errantes allant spiraler, dans le futur, autour de l'orbite périodique puits et, dans le passé, autour de l'orbite périodique source. Pour pouvoir réaliser la figure 2 ci-dessous, on a également supprimé une coordonnée.

On peut généraliser les constructions ci-dessus, en considérant les gradients de certaines fonctions de Morse sur des variétés de dimension 3 ou des suspensions de gradients de certaines fonctions de Morse sur les surfaces. De façon intrinsèque, on dit qu'un flot structurellement stable est *de type gradient* si son ensemble non-errant est réduit à un nombre fini d'éléments critiques tous hyperboliques et si la variété stable d'une singularité selle ou d'une orbite périodiques selle ne rencontre jamais la variété instable d'une singularité selle ou d'une orbite périodiques selle.

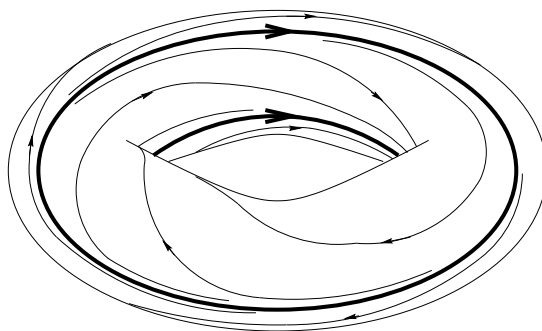


FIG. 2 – La suspension de la dynamique nord-sud sur S^2 vue en supprimant une coordonnée, c'est-à-dire sur $S^1 \times S^1$ au lieu de $S^2 \times S^1$

Les flots de type gradient permettent déjà de construire nombre de flots hyperboliques, mais la dynamique de tels flots n'est pas une très riche.

Flot de type Morse-Smale

L'étape suivante dans l'exploration de dynamiques structurellement stables plus complexes consiste à autoriser des intersections entre les variétés invariantes des orbites périodiques ou des singularités selles. Ainsi, on dit qu'un flot est *de type Morse-Smale* si son ensemble non-errant est réduit à un nombre fini d'éléments critiques tous hyperboliques et s'il vérifie la transversalité forte.

Remarquons que cette définition exclut l'existence d'intersections homoclines, c'est-à-dire d'intersections entre la variété stable et la variété instable d'une même orbite périodique : Birkhoff a montré que ceci impliquerait l'existence d'une infinité d'orbite périodiques ([Bi68]).

Les flots de types Morse-Smale n'ont pas une dynamique non-errante très "chaotique" (nombre fini d'éléments critiques) mais leurs variétés invariantes, qui organisent la dynamique errante, s'avèrent très compliquées à démêler. En fait, les flots de types Morse-Smale n'auront pas de traitement particulier dans la suite.

Suspension de difféomorphisme d'Anosov du tore

La dynamique non-errante d'un flot hyperbolique peut-être bien plus compliquée que celle des flots de types gradient et Morse-Smale décrits ci-dessus. Les premiers exemples de flots hyperboliques avec un ensemble non-errant non-réduit à un nombre fini d'orbites et de singularités viennent naturellement comme suspensions de difféomorphismes hyperboliques de surfaces. L'exemple le plus simple à décrire est certainement la suspension d'un automorphisme linéaire d'Anosov du tore.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Tout d'abord, on remarque que le déterminant de A est égal à 1 et que l'automorphisme linéaire \tilde{f} de \mathbb{R}^2 donné par la matrice A passe au quotient en un automorphisme linéaire f du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (voir la figure 3 ci-dessous).

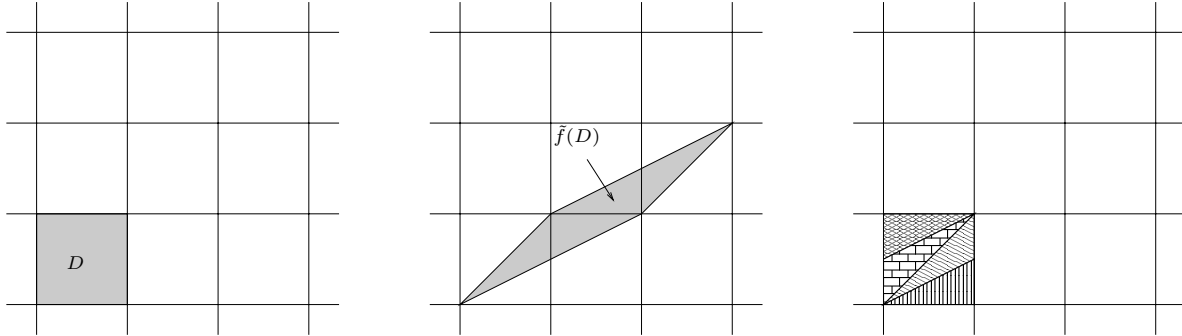


FIG. 3 – Un domaine fondamental D du revêtement \mathbb{R}^2 de \mathbb{T}^2 , l'image de D par \tilde{f} , puis $\tilde{f}(D)$ ramené par morceaux sur D par les automorphismes de revêtement

Ensuite, on vérifie que A a deux directions propres $y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x$ et $y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}x$ correspondant aux valeurs propres $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\mu = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. D'une part, les valeurs propres λ et μ sont respectivement strictement plus grande et strictement plus petite que 1 ; ceci montre que le tore \mathbb{T}^2 en entier admet une structure hyperbolique pour l'action de f . D'autre part, on montre facilement que tout point à coordonnées rationnelles est périodique sous l'action de f (il suffit d'utiliser le fait que A est à coefficients entiers). Ceci montre que l'ensemble non-errant de f est égal au tore \mathbb{T}^2 en entier et, en utilisant la caractérisation énoncée dans la partie précédente, que f est un difféomorphisme structurellement stable de \mathbb{T}^2 . Si on considère maintenant la suspension de f , on obtient un champ de vecteurs X structurellement stable sur une variété \mathcal{M} de dimension 3 (un fibré en \mathbb{T}^2 au-dessus de S^1). Tout point de \mathcal{M} est non-errant sous l'action de X et la variété \mathcal{M} admet une structure hyperbolique globale.

Un difféomorphisme f (resp. un flot X) sur une variété \mathcal{M} tel que \mathcal{M} en entier est un ensemble hyperbolique pour f (resp. pour X) est appelé *difféomorphisme ou flot d'Anosov*.

La dynamique d'un flot d'Anosov est le prototype de ce que l'on peut attendre d'une dynamique chaotique (et pourtant structurellement stable), c'est-à-dire sensible aux conditions initiales. En particulier, un tel flot est *expansif*, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que les orbites de deux points soit sont confondues, soit finissent toujours par se séparer d'une distance supérieure à α (dans le passé *ou* le futur) (c'est une conséquence directe de l'hyperbolicité). Autrement dit, deux points aussi proches que l'on veut (sur des orbites différentes) ont toujours des passés ou des futurs significativement différents.

De plus, un flot d'Anosov transitif mélange intimement des points dont les comportements sous l'action de la dynamique sont très différents : d'une part, un ensemble dense de points dont les orbites sont périodiques et, d'autre part, une orbite (non-périodique bien sûr) qui est dense dans la variété.

Le difféomorphisme d'Anosov et sa suspension définis ci-dessus possèdent une propriété supplémentaire importante : en remarquant que les directions propres de A sont de pentes irrationnelles, il n'est pas difficile de montrer que le f est topologiquement transitif, c'est-à-dire qu'il existe une orbite de f dense dans le tore \mathbb{T}^2 (voir, par exemple, [KaHa]) ; par

suite, le champ de vecteurs X est également topologiquement transitif.

En fait, la seule surface supportant un difféomorphisme d’Anosov est le tore \mathbb{T}^2 (la surface doit supporter le feuilletage non singulier par les variétés stables) et un théorème de Manning ([Mann]) affirme que tout difféomorphisme d’Anosov du tore est topologiquement transitif et conjugué à un automorphisme linéaire.

Le monde des difféomorphismes d’Anosov des surfaces, et par suite, l’ensemble des suspensions de tels difféomorphismes, est donc relativement peu étendu et bien maîtrisé. On verra bientôt que le monde des flots d’Anosov en dimension 3 est loin de se limiter à de telles suspensions.

Suspension du fer à cheval de Smale

Nous avons déjà cité Poincaré décrivant les conséquences d’une intersection *homocline* transverse entre la variété stable et la variété instable d’un point fixe pour un difféomorphisme de surface. L’éventualité de l’apparition d’intersections homoclines était apparue à Poincaré comme un obstacle lors de ses investigations sur la dynamique du système solaire ; cependant l’existence effective de telle intersections pour des “systèmes physiques” ou des dynamiques abstraites “non-anecdotiques” n’avait pas été montrée. En 67, Smale donne un modèle géométrique très simple d’un difféomorphisme sur la sphère S^2 laissant apparaître (de façon robuste) une intersection homocline : le fer à cheval (voir [Sm67]). Cet exemple, que nous allons décrire, s’avère être structurellement stable ; il a permis d’analyser bien plus avant le phénomène “intersection homocline transverse” et a par ailleurs convaincu que les idées sur les systèmes de type gradient seraient bien insuffisantes pour une étude des systèmes dynamiques génériques.

La suspension du fer à cheval va nous donner un exemple de flot structurellement stable en dimension 3, avec un ensemble non-errant qui n’est égal ni simplement à un nombre fini d’orbites périodiques, ni à la variété en entier. Cet exemple est particulièrement important ici puisque l’esprit de cette thèse consiste — très grossièrement — à voir tous les flots hyperboliques en dimension 3 comme construits par une procédure généralisant la construction de la suspension du fer à cheval.

Le fer à cheval de Smale est d’abord construit comme un difféomorphisme f d’un rectangle R du plan sur son image $f(R)$ (où $f(R) \cap R$ est composé de deux sous-rectangles de R). Plus précisément, on considère un rectangle R muni de ses deux feuilletages horizontaux et verticaux. L’action de f sur R consiste :

- à écraser R dans la direction horizontale et l’étirer dans la direction verticale,
- puis à courber le rectangle obtenu de façon à lui donner une forme de fer à cheval,
- enfin à reposer ce “fer à cheval” sur le rectangle initial R .

On demande simplement que les feuilletages horizontaux et verticaux soient préservés et, surtout, que $f(R)$ recoupe R selon deux composantes connexes : chacune de ces composantes connexes est à la fois un sous-rectangle vertical de R , c’est-à-dire un sous-rectangle qui coupe R de part en part dans la direction verticale, et un sous-rectangle horizontal de $f(R)$ (voir la figure 4).

On peut facilement réaliser f par une application qui est affine en restriction à l’ensemble $f^{-1}(f(R) \cap R)$. L’application f a un seul point fixe dans la composante de gauche

que nous noterons x (à cause des propriétés de contraction-dilatation des directions horizontales et verticales, x est point fixe hyperbolique selle).

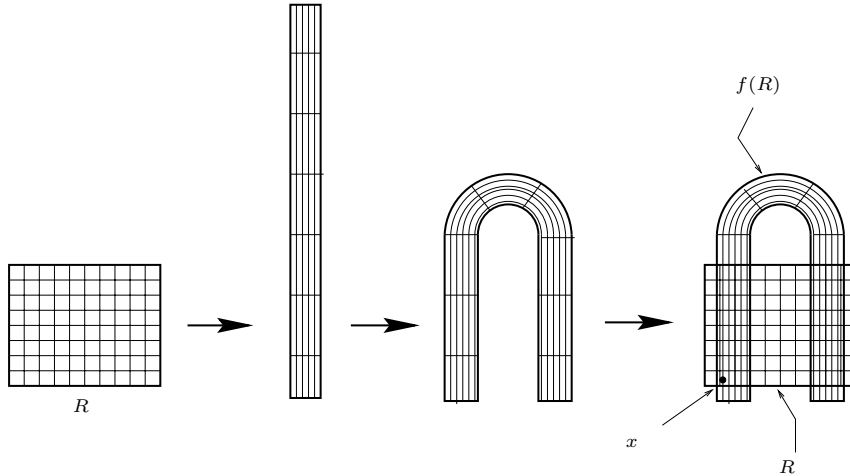


FIG. 4 – La construction du fer à cheval

On peut alors plonger l'union $R \cup f(R)$ sur la sphère S^2 et compléter f en un difféomorphisme globalement défini de S^2 sur S^2 . En fait, on peut compléter f de façon à ce que l'ensemble non-errant de f sur S^2 soit l'union d'un point fixe puits p , d'un point fixe source s et d'un ensemble inclus dans le maximal invariant $K = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(R)$ de R .

Il nous reste alors à analyser le comportement de f sur le maximal invariant K de R et tout d'abord à comprendre quel est ce maximal invariant. On cherche d'abord l'ensemble négativement invariant $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(R)$. On a défini f telle que $f(R)$ recoupe R selon deux sous-rectangles verticaux. Par suite, $f^2(R)$ recoupe de la même façon $f(R)$ selon deux sous-rectangle verticaux et, par conséquent, $f^2(R)$ recoupe R selon quatre sous-rectangles verticaux. On voit se profiler un procédé de cantorisation et, en utilisant de plus la contraction stricte de la direction horizontale, on montre effectivement que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(R)$ est le produit cartésien d'un ensemble de Cantor horizontal par un segment vertical de R . De même, on montre que $f^{-n}(R)$ recoupe R selon 2^n sous-rectangles horizontaux et que l'ensemble positivement invariant $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(R)$ est le produit cartésien d'un ensemble de Cantor vertical par un segment horizontal. On en déduit enfin que le maximal invariant K est le produit d'un ensemble de Cantor horizontal et d'un ensemble de Cantor vertical (voir figure 5).

L'hyperbolicité de f en restriction à K provient directement de la définition de f : f est affine sur K , dilate strictement la direction verticale et contracte uniformément la direction horizontale.

Ces propriétés de contraction-dilatation des directions horizontale et verticale nous montrent que les variétés stables et instables de K sont respectivement égales à

$$W^s(K) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f^{-n}(R) \quad \text{et} \quad W^u(K) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f^n(R)$$

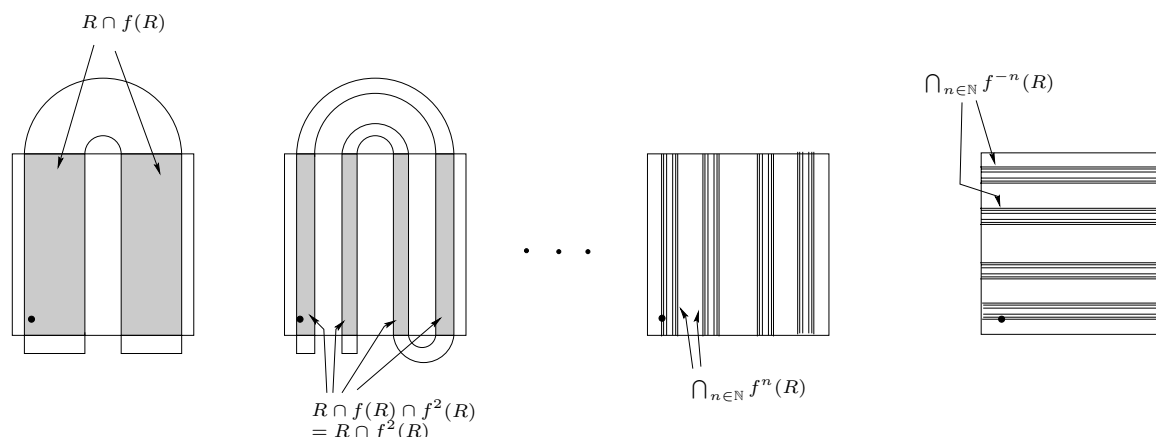


FIG. 5 – Les ensembles positivement et négativement invariant du rectangle du fer à cheval

Ce sont des laminations intersectant R selon les ensembles $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(R)$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(R)$ décrits ci-dessus. Dans la figure ci-dessous (figure 6), on n’esquisse qu’une seule feuille de chacune des laminations (essentiellement parce qu’il n’est pas très facile de dessiner un ensemble de Cantor de feuilles). Ces feuilles sont denses dans les laminations stable et instable comme toutes les autres feuilles. En fait, les feuilles esquissées sont celles qui portent le point fixe; ces feuilles auront un rôle spécial dans plusieurs parties de cette thèse.

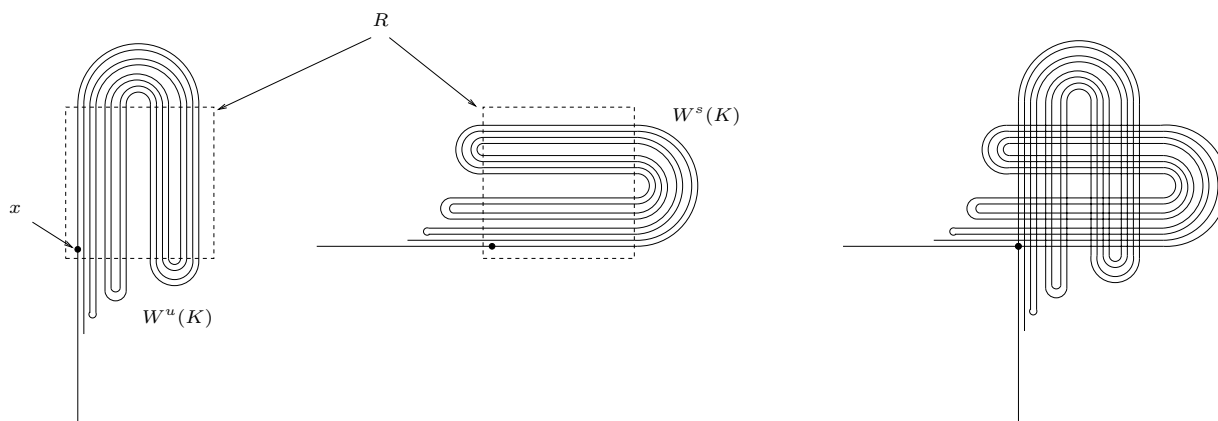


FIG. 6 – Les variétés invariantes du fer à cheval

On voit donc apparatre une infinité de points d’intersections homoclines des variétés stable et instable du point fixe x . On peut montrer que les orbites périodiques sont denses dans l’ensemble K , que K est transitif et égal à l’adhérence des points d’intersections homoclines de x .

Remarque Une méthode pour montrer cela consiste à prouver que la restriction de f à K est topologiquement conjuguée à l’homéomorphisme $\sigma : \{g,d\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{g,d\}^{\mathbb{Z}}$ défini par $(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) \mapsto (\dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots)$ où $b_i = a_{i+1}$. La conjugaison consiste à envoyer un

point x de K sur la suite $(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$ où $a_i = g$ si $f^i(x)$ est dans le sous-rectangle gauche de $f(R) \cap R$ et $a_i = d$ si $f^i(x)$ est dans le sous-rectangle droit. La densité des orbites périodiques et l'existence d'un orbite dense pour σ se montrent facilement (voir, par exemple, [Shu]).

L'ensemble K est ce que nous appelons une *pièce basique selle* du difféomorphisme f . On a déjà dit que l'ensemble non-errant de f est réduit à l'union de K , du point puits et du point source de f . L'ensemble non-errant de f est donc hyperbolique. Pour tous points x et y de K , tout point d'intersection de $W^s(x)$ et de $W^u(y)$ est dans K ; la transversalité forte est donc triviale et, finalement, f est structurellement stable.

La suspension du fer à cheval nous donne donc un exemple de flot hyperbolique en dimension 3 (précisément sur $S^2 \times S^1$) dont l'ensemble non-errant est constitué d'une pièce basique selle, d'une orbite périodique puits et d'une orbite périodique source: c'est le type de flot que nous avons appelé *flot de Smale*.

Flot géodésique sur une surface à courbure négative

Des exemples de flots hyperboliques sur une variété compacte de dimension 3, avec des dynamique riches, apparaissent très naturellement en mathématiques; ce sont les flots géodésiques de surfaces à courbure négative. Ce seront, par ailleurs, ici les premiers exemples de flots hyperboliques avec une dynamique bien plus riche qu'une dynamique de type gradient et qui ne sont pas des suspensions de difféomorphismes de surfaces.

On considère donc une surface S de genre supérieur ou égal à deux munie d'une métrique g à courbure constante (négative). Notons alors \mathcal{M} le fibré unitaire tangent à S qui est un fibré en cercles au-dessus de S et en particulier une variété compacte de dimension 3. On peut alors définir sur \mathcal{M} le flot géodésique associé à la métrique g : à un point (x, u) de \mathcal{M} (où x est un point de S et u un vecteur unitaire tangent de $T_x S$) et un temps t , on associe le point (x', u') où x' est le point de S où se trouve au temps t la géodésique partant à vitesse 1 de x au temps 0 avec la direction u et où u' est le vecteur unitaire tangent à cette géodésique en x' .

Anosov a montré que ce flot est un flot d'Anosov transitif sur \mathcal{M} (voir [Ano]). On peut le voir en considérant S comme un quotient du disque de Poincaré où l'on peut faire explicitement les calculs. Ceci nous fournit des exemples de flots hyperboliques en dimension 3 pour lesquels les orbites périodiques sont denses et qui ne sont pas des suspensions de difféomorphismes de surface.

Tous les exemples décrits ci-dessus sont à la base de l'étude des dynamiques hyperboliques. Je vais maintenant signaler, sans les décrire vraiment, trois exemples, qui ont révélé petit à petit la très grande richesse des flots hyperboliques en dimension 3.

Flot d'Anosov non-transitif

Nous avons dit précédemment que toute suspension de difféomorphisme d'Anosov de surface est topologiquement transitif. Par ailleurs, un théorème de Verjovsky ([Ver]) affirme

que tout flot d'Anosov en dimension plus grande que 4 est également topologiquement transitif. Étonnement, Franks et Williams ont par contre construit un exemple qui montre l'affirmation suivante (voir [FrWi]) :

Il existe un flot d'Anosov non-transitif sur une variété compacte de dimension 3.

L'ensemble non-errant du flot de Franks et Williams est constitué d'un attracteur hyperbolique transitif de dimension 2 et d'un répulseur hyperbolique transitif de dimension 2. On peut facilement généraliser cet exemple et construire des flots d'Anosov dont l'ensemble non-errant contient des pièces basiques selles (par exemple, voir [Bru]).

Flot d'Anosov transitif qui n'est (même à revêtement fini près) ni une suspension, ni un flot géodésique

La propriété d'être un flot d'Anosov est beaucoup plus contraignante que celle d'être un flot structurellement stable en général. (En particulier, la variété doit supporter deux feuilletage de codimension 1, transverses, dont toutes les feuilles sont des cylindres ou des plans et l'intersection de ces deux feuilletages doit être un flot expansif.)

Ces contraintes ont laissé espérer que les exemples de flots transitifs ci-dessus (suspension d'automorphisme du tore et flot géodésique d'une surface à courbure négative) étaient essentiellement les seuls. Barbot a en effet réussi à montrer que tout flot d'Anosov dont l'un des deux feuilletages faibles est de classe C^2 est, à revêtement fini près, topologiquement équivalent à un flots d'un des deux types ci-dessus ([Ba95]).

Cependant, la dimension 3 réserve bien des surprises et Bonatti et Langevin on construit un exemple de flot d'Anosov transitif tranverse à un tore et non-conjugué à une suspension, montrant ainsi ([BoLa]) :

Il existe un flot d'Anosov transitif en dimension 3 qui n'est conjugué à aucun revêtement fini de suspension d'automorphisme du tore ou de flot géodésique

Malgré les contraintes évoquées ci-dessus, le monde des flots d'Anosov en dimension 3, même transitifs, est donc vaste et mystérieux (sans comparaison en tout cas avec le monde restreint des difféomorphismes d'Anosov des surfaces).

Remarque Les flots d'Anosov sont, de loin, les flots hyperboliques les plus étudiés en dimension 3.

Nous n'avons pas évoqué ici la technique de construction d'exemples de flots par *chirurgies de Dehn* introduite par Handel et Thurston ([HaTh]), puis reprise par Goodman ([Goo]), puis Fried ([Fr83]).

Côté classification, signalons au moins une suite de résultats (voir, par exemple, [Ghy],[Ba95],[Ba96]) où une hypothèse sur la variété sous-jacente ou une hypothèse sur les feuilles faibles impliquent une forme très particulière du flot d'Anosov.

Signalons également l'étude des branchements des feuilletages des flots d'Anosov menée par Fenley (aboutissant dans [Fe98]), ainsi que l'étude des classes d'homotopie libre des orbites périodiques de tels flots par le même auteur ([Fe95],[Fe97]).

Flot hyperbolique portant tous les nœuds

Les orbites périodiques des flots de Smale (qui ne possèdent que des pièces basiques de codimension topologique au moins 2) ont beaucoup plus de liberté pour s'enlacer que celles des flots d'Anosov. En fait, une démonstration impressionnante de cette liberté et de la richesse des flots hyperboliques en dimension 3 a récemment été donnée dans [Ghr]. Ghrist y montre qu'il existe un champ de Smale X sur S^3 vérifiant la propriété suivante : *Pour tout entrelac à n brins Π de S^3 , il existe n orbites (périodiques) de X telles que l'union de ces orbites forme un entrelac isotope à Π .*

La construction de ce flot serait un peu longue à montrer, mais ce résultat me semble montrer toute la complexité que peut porter la classe d'équivalence topologique d'un flot.

Remarques

— En fait, Ghrist construit simplement une variété branchée (plus précisément, ce que l'on appelle un *template*; voir l'introduction de ces objets dans [BiWi]) portant un semi-flot dont les orbites périodiques vérifient la propriété ci-dessus. Cependant, il n'est pas dur d'épaissir le template par une opération inverse à celle qui a servi à les construire dans [BiWi]. On obtient alors un flot défini sur l'adhérence d'un ouvert U de \mathbb{R}^3 . Le maximal invariant de U est un ensemble hyperbolique selle dont les orbites périodiques vérifient la propriété désirée. On peut alors compléter ce flot en un flot de Smale de $S^3 \supset \mathbb{R}^3 \supset U$ en utilisant une fonction de Lyapunov dont la construction est explicitée dans [PS81].

— Pour ce qui est des nœuds réalisés par les orbites périodiques des flots sur S^3 , on renvoie au volume [GHS].

— Signalons que les orbites périodiques des flots de type Morse-Smale sur S^3 ne peuvent pas réaliser tous les nœuds ([Wad]), ce qui montre un peu plus la subtilité des dynamiques globales des flots hyperboliques en dimension 3.

0.3 Classification des flots hyperboliques en dimension 3

Voici donc esquissée l'ambiguïté des flots structurellement stables en dimension 3. Côté ange, l'ensemble des classes d'équivalence de dynamiques structurellement stables est dénombrable ce qui semble, par définition, rendre possible au moins l'énumération de ces dynamiques. Côté démon, les exemples ci-dessus montrent que la stabilité structurelle n'empêche ni l'ensemble non-errant, ni les variétés stables et instables, de prendre des formes qui semblent, au premier abord, "monstrueuses" : infinité d'orbites périodiques dans des classes d'homotopie libre différentes, infinité non-dénombrable d'orbites non-errantes, coexistence de tous les nœuds comme orbites périodiques,...

Nous allons adopter la démarche qui consiste à tenter de décrire l'action de chacun des flots hyperboliques, à équivalence topologique près, par des présentations combina-

toires finies (c'est-à-dire qu'on essaie effectivement de croire au raisonnement simpliste suivant : les classes d'équivalence topologique des flots structurellement stables forment un ensemble dénombrable, il doit "donc" être possible de décrire la dynamique de chaque classe par un élément de \mathbb{N}^k).

Ce point de vue a l'avantage d'être une approche systématique des flots hyperboliques en dimension 3. Il a l'inconvénient de ne pas apercevoir des résultats particuliers définitifs comme ceux, par exemple, de Ghys ou Barbot où la variété sous-jacente ou la différentiabilité du feuilletage stable d'un flot d'Anosov forcent (à peu de choses près) la classe d'équivalence topologique de ce flot (voir [Ghy],[Ba95]). De façon plus générale, certains flots qui apparaissent naturellement (flot géodésique d'une surface à courbure négative, suspensions) perdent tout statut particulier dans une présentation combinatoire systématique et peuvent même être très délicats à distinguer des autres flots (voir le cas des suspensions dans la suite).

Je voudrais maintenant décomposer le travail d'une classification à travers des descriptions combinatoires en plusieurs étapes. Supposons que l'on veuille classer un ensemble \mathcal{E} pour une certaine relation d'équivalence. On peut :

(1) *Exhiber des présentations combinatoires finies, à équivalence près, de tous les éléments de \mathcal{E} .* On associe à chaque élément e de \mathcal{E} des présentations combinatoires finies, qui ne dépendent que de la classe d'équivalence de e et telles que chaque présentation suffit à caractériser e à équivalence près.

Très formellement, on construit une relation entre les éléments de \mathcal{E} et les éléments d'un sous-ensemble \mathcal{C} de \mathbb{N}^k tel que :

- tout élément e de \mathcal{E} est en relation avec au moins un élément c de \mathcal{C} ,
- si e_1 est équivalent à e_2 et si e_1 est en relation avec c alors e_2 est en relation avec c ,
- si e_1 est en relation avec c et si e_2 est en relation avec c alors e_1 est équivalent à e_2 .

Par exemple, une variété de dimension 3 admet des présentations combinatoires finies, constituées d'un nombre de tétraèdres et d'une règle combinatoire de recollement de ces tétraèdres.

(2) *Déterminer quelles présentations finies abstraites sont réalisables.* Souvent, on a défini au point (1) un type de combinatoires qui décrit les éléments de \mathcal{E} à équivalence près, mais on ne sait pas lesquelles des combinatoires abstraites de ce type correspondent effectivement à des éléments de \mathcal{E} . On doit alors déterminer quelles présentations combinatoires abstraites sont réalisables par des éléments de \mathcal{E} .

Un bon exemple est celui de la classification des homéomorphismes pseudo-Anosov. On sait que de tels homéomorphismes sont caractérisés par la donnée combinatoire de leur action sur un graphe, mais il n'est pas facile de déterminer quels actions sur des graphes correspondent à des homéomorphismes pseudo-Anosov ; c'est le but de l'algorithme de Bestvina et Handel ([BeHa], voir aussi [Lo93]).

La réponse à (2) peut parfois être constructive : pour toute présentation réalisable, on peut parfois construire explicitement un élément de \mathcal{E} admettant cette présentation.

Ceci est intéressant lorsqu'on a une caractérisation abstraite des éléments de \mathcal{E} mais que l'on cerne mal qui sont ces éléments (comme, par exemple, pour les flots structurellement stables). Alors qu'une réponse abstraite aux points (1) et (2) permet seulement, *a priori*, d'énumérer les classes d'équivalence sans connaître réellement ce que l'on énumère, une réponse constructive à (2) permet de donner un certain nombre de modèles explicites de chaque classe d'équivalence.

(3) *Déterminer les présentations finies qui correspondent à des objets équivalents.* Le point (1) donne en général une infinité de présentations des éléments de \mathcal{E} . Jusqu'ici, on n'a donc fait que décrire, à équivalence près et d'une infinité de façons les éléments de \mathcal{E} . Pour réaliser effectivement une classification, il faut déterminer quelles présentations finies sont *équivalentes* c'est-à-dire sont des présentations finies d'une même classe d'équivalence de \mathcal{E} . On peut distinguer plusieurs façons plus ou moins pratiques de le faire :

(3 *faible*) *Énumérer les présentations finies d'un objet donné.* Cette étape consiste généralement à déterminer des changements élémentaires de présentations combinatoires tels que :

- un quelconque de ces changements appliqué à une présentation finie donne une présentation finie équivalente,
- deux présentations finies équivalentes se déduisent toujours l'une de l'autre par une suite finie de changements élémentaires.

On peut penser aux mouvements de Reidemeister pour les nœuds ou à la *strong shift equivalence* de Williams ([Wi74]). A ce stade, pour parler pompeusement, les présentations d'un objet donné sont *récurivement énumérables*.

(3 *fort*) *Décider si deux présentations finies sont équivalentes ou pas.* Il est souvent beaucoup plus difficile de donner une réponse à (3 *fort*) qu'à (3 *faible*) (on ne connaît, pour l'instant, d'algorithme ni pour décider si deux nœuds sont équivalents, ni pour décider si deux matrices donnent lieu à des dynamiques "strong shift" équivalentes). Un moyen d'obtenir (3 *fort*) est de borner *a priori* le nombre de changements élémentaires de (3 *faible*) servant à passer d'une présentation quelconque à une autre.

(3 *très fort*) *Présentations finies canoniques.* On peut parfois donner à (3 *fort*) une réponse d'un type particulièrement instructif. Ceci consiste à décrire un nombre fini de présentations canoniques de chaque classe d'équivalence et un algorithme qui, à une présentation quelconque, associe les présentations canoniques correspondantes. L'intérêt est qu'on a alors un nombre fini de moyens privilégiés de désigner chaque classe d'équivalence.

Pour les difféomorphismes structurellement stables des surfaces, le point (1) correspond au travail de Bonatti et Langevin ([BLJ, chapitres 1 à 5]). Le problème (2) a été partiellement traité par Bonatti et Jeandenans dans [BLJ]; nous donnerons une réponse

complète à ce problème, en utilisant les flots en dimension 3, au chapitre 4 de cette thèse. Enfin, la réponse au problème (*3 fort*) fait l'objet du chapitre 5 (en fait, on donne une réponse située entre (*3 fort*) et (*3 très fort*)). On peut donc dire que la classification des difféomorphismes hyperboliques des surfaces est maintenant complète.

Pour les champs de vecteurs hyperboliques en dimension 3, nous réaliserons (presque entièrement) le programme du point (*1*) (chapitre 1), nous donnerons une réponse constructive au problème (*2*) (chapitre 2) et une réponse (partielle) au problème (*3 faible*) (chapitre 3).

0.4 Présentation des résultats

0.4.1 Présentations finies des flots hyperboliques en dimension 3

Notre démarche consiste, comme annoncé, à d'abord analyser les dynamiques des flots hyperboliques en dimension 3 jusqu'à pouvoir en donner des descriptions combinatoires.

On ne considère d'abord que des *flots de Smale*, c'est-à-dire des flots dont toutes les pièces basiques sont soit des orbites isolées (éventuellement des singularités), soit des pièces basiques transversalement homéomorphes à des ensembles de Cantor. On verra dans le texte comment transformer des flots structurellement stables quelconques en flots de Smale. Si on appelle *ensembles selles* les ensembles hyperboliques de dimension topologique 1, dont les directions stables et instables fortes sont de dimension 1, alors l'ensemble non-errant d'un difféomorphisme de Smale est constitué de singularités, d'orbites périodiques puits ou sources et de pièces basiques selles.

Remarque On considère des flots de Smale car on veut, via une section locale de Poincaré, se ramener à la dynamique d'un difféomorphisme local de surface au voisinage d'un ensemble hyperbolique. Ceci n'est possible, *a priori*, que pour les ensembles hyperboliques transversalement totalement discontinus, c'est-à-dire pour les ensemble hyperboliques de dimension topologique 1.

Nous allons caractériser le germe d'un flot le long d'un ensemble selle saturé par le type géométrique d'une partition de Markov.

Si K est un ensemble hyperbolique saturé d'un champ de vecteurs X , une *partition de Markov* \mathcal{R} de K sera pour nous la donnée d'une section locale Σ de K et d'une collection finie de rectangles R_1, \dots, R_n dans Σ , coupant toute orbite de K et vérifiant certaines propriétés que nous allons préciser.

Tout d'abord, en dimension 3, on peut demander aux rectangles d'être des plongements topologiques de $[0,1] \times [0,1]$ dans Σ que $W^s(K)$ et $W^u(K)$ intersectent selon des segments dits respectivement *horizontaux* et *verticaux*. Si l'ensemble hyperbolique K est transversalement totalement discontinu, on peut demander aux rectangles de \mathcal{R} d'être disjoints.

Pour former une partition de Markov, les rectangles R_1, \dots, R_n doivent bien se comporter vis-à-vis de leurs images par l'application de premier retour f sur Σ . D'abord, le

domaine de définition de f doit contenir ces rectangles. Surtout, pour tout i et tout j , toute composante d'intersection de $R_i \cap f(R_j)$ doit être à la fois un sous-rectangle “vertical” de R_i et un sous-rectangle “horizontal” de $f(R_j)$ (on donnera une définition plus formelle dans le corps du texte ; pour l'instant, voir la figure 7).

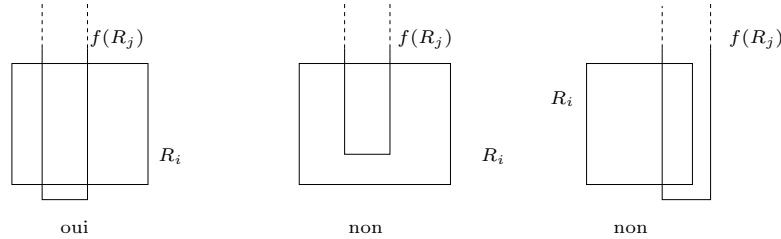


FIG. 7 – *Intersections autorisées ou pas par la définition de partition de Markov*

Le type géométrique d'une partition de Markov \mathcal{R} est une combinatoire (introduite par Bonatti et Langevin dans le cadre des difféomorphismes des surfaces) qui décrit l'ordre et le sens des intersections de l'union des rectangles R_i de la partition avec l'union de leurs images $f(R_j)$. Plutôt que de donner une définition formelle maintenant, disons :

- que les types géométriques des partitions 1 et 2 de la figure 8 (ce sont des partitions à un seul rectangle noté R) sont différents car les deux composantes d'intersections de $R \cap f(R)$ sont ordonnées de façon similaire mais ne sont pas orientées de la même façon,
- que les types géométriques des partitions 3 et 4 sont différents car les composantes d'intersections ne sont ordonnées de la même façon.

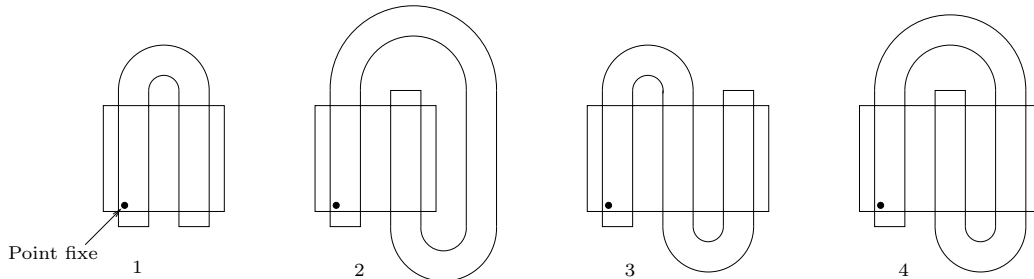


FIG. 8 – *Quatre partitions de Markov à un seul rectangle de types géométriques distincts*

Un ensemble selle admet toujours des partitions de Markov et il est maintenant classique que la *matrice d'incidence* d'une partition de Markov caractérise la classe d'équivalence topologique d'un flot en restriction à un ensemble hyperbolique selle (voir [Bow]). Cependant, la seule matrice d'incidence d'une partition de Markov ne caractérise la dynamique nulle part en dehors de l'ensemble selle recouvert par la partition considérée. On montrera que le type géométrique d'une partition de Markov caractérise, lui, la dynamique sur un voisinage de l'ensemble selle saturé considéré.

Proposition A *Soient K et L des ensembles selles saturés de champs de vecteurs X et Y . On suppose que K et L admettent des partitions de Markov de même type géométrique.*

Alors il existe des voisinages U et V de K et L tels que les restrictions à U et V de X et Y sont topologiquement équivalentes.

On peut même montrer qu'il y a équivalence topologique sur des voisinages invariants, mais on ne peut pas minorer la taille de ces voisinages. Or, il nous faudrait connaître la dynamique en restriction à un voisinage invariant explicite de K pour pouvoir reconstruire la dynamique globale de X . Nous allons formaliser ce problème de passage du local au global en introduisant une notion de germe.

Appelons *germe d'un champ X le long d'un compact invariant K* la classe du couple (X, K) pour la relation d'équivalence suivante: $(X, K) \sim (Y, L)$ s'il existe un voisinage U de K et un voisinage V de L tel que les restrictions de X et Y à U et V soient topologiquement équivalentes via un homéomorphisme envoyant K sur L . Nous noterons $[X, K]$ le germe de X le long de K .

La proposition A affirme que les germes de deux champs X et Y le long d'ensemble hyperboliques K et L sont égaux dès que K et L admettent des partitions de Markov de même type géométrique. Mais le germe d'un champ le long d'un ensemble selle saturé ne caractérise le flot, à équivalence topologique près, sur aucun voisinage invariant fixé (proposition 1.61). La raison à cela est que l'on peut compliquer à plaisir la variété qui porte le germe d'ensemble selle considéré, et cela aussi près que l'on veut de l'ensemble selle; on peut également compliquer à plaisir le plongement de ce germe dans une variété donnée (en quelque sorte, on peut nouer ce germe dans la variété).

Puisque l'on peut compliquer indéfiniment le plongement d'un germe, on va chercher à renverser le problème et à construire une variété à bord munie d'un flot transverse au bord qui est en un certain sens la plus simple parmi celles qui réalisent le germe $[X, K]$ comme ensemble selle d'un flot de Smale. Plus précisément :

Dfinition Soit X un champ de vecteur sur une variété compacte orientable de dimension 3 et K un ensemble selle de X . Nous appellerons *modèle du germe $[X, K]$* tout couple (N, Y) où N est une variété de dimension 3 orientable compacte à bord, et où Y est un champ de vecteur sur N transverse au bord, tels que :

- i) Le maximal invariant de Y dans N est un ensemble selle K_Y tel que le germe $[Y, K_Y]$ est égal au germe $[X, K]$.
- ii) Notons $\partial_1 N$ l'union des composantes connexes du bord de N où Y est rentrant dans N ; alors tout cercle plongé dans $\partial_1 N$, disjoint de $W^s(K_Y)$ borde un disque dans $\partial_1 N$ également disjoint de $W^s(K_Y)$.
- iii) Toute composante connexe de N contient au moins un point de K_Y .

Le résultat suivant a été montré en collaboration avec C. Bonatti :

Théorème B Étant donné K un ensemble selle saturé d'un champ de Smale X sur une variété compacte orientable de dimension 3, il existe un unique modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) de $[X, K]$ à équivalence topologique près.

Ce théorème nous donne un plongement canonique de tout germe de champ de vecteurs le long d'un ensemble selle. Il nous permet de passer de la connaissance locale d'une

dynamique (en germe le long d'un ensemble selle) à la connaissance d'une dynamique "semi-globale" canonique. La proposition A et le théorème B mis bout-à-bout montrent que le modèle du germe d'un flot le long d'un ensemble selle saturé est caractérisé, à équivalence topologique près, par un type géométrique.

De plus, certains voisinages particulièrement intéressants de K dans \mathcal{M} s'obtiennent facilement à partir du modèle de $[X, K]$:

La théorie de Smale (existence de filtrations) fournit des voisinages de K par des variétés compactes M à bords transverses à X , tel que K soit le maximal invariant de M , et que l'intersection de toute orbite avec M soit connexe. Nous appellerons *voisinage filtrant* un tel voisinage M . À équivalence topologique près, il n'existe qu'un nombre fini de voisinages filtrants de K dans \mathcal{M} .

La construction que nous effectuerons d'un modèle de $[X, K]$ donne en fait un moyen de reconstruire la restriction de X à tout voisinage filtrant M par un nombre fini de chirurgies topologiques simples. Ces chirurgies consistent à "compliquer" le modèle loin de l'ensemble K ; nous les appellerons des *attachements d'anses*.

Proposition C *Si M est un voisinage filtrant de K tel que toute composante connexe de M rencontre K , on peut passer de (\tilde{M}, \tilde{X}) à un couple topologiquement équivalent à (M, X) par un nombre fini d'attachements d'anses bien choisis.*

On verra que la classe d'équivalence topologique du résultat d'un attachement d'anse ne dépend que du choix de deux composantes connexes du bord d'entrée de \tilde{M} privé de la variété stable de \tilde{K} (après la chirurgie, ces deux composantes sont effectivement jointes par une anse). On donne alors une présentation finie de tout couple (M, X) où M est un voisinage filtrant d'un ensemble selle saturé K de X : cette présentation est la donnée du type géométrique d'une partition de Markov de K et d'un nombre fini de mots codant les composantes connexes du bord d'entrée de \tilde{M} privé de la variété stable de \tilde{K} sur lesquelles on "attache des anses".

On obtient ainsi des présentations finies des blocs fondamentaux à l'aide desquels se reconstruit la variété et le champ qu'elle porte ([Fr83],[deR],[Fr85]). De plus, ceci nous permet d'obtenir directement des présentations finies globales de nombreux champs hyperboliques.

Considérons ainsi un flot de Smale (\mathcal{M}, X) sans singularité. L'ensemble non-errant d'un tel flot est constitué de pièces basiques selles et d'orbites périodiques puits ou sources. On considère l'ensemble selle maximal K d'un tel flot, défini en considérant l'union K^0 des pièces basiques selles du flot, puis $K = W^s(K^0) \cap W^u(K^0)$. On verra que la classe d'équivalence topologique de (\mathcal{M}, X) est caractérisée par la classe d'équivalence de X en restriction à un voisinage filtrant M de K et par une classe d'homologie de chaque composante du bord de M (ces classes d'homologie sont celles qui sont non-nulles dans ∂M mais seront nulles dans \mathcal{M}).

On montrera alors comment coder de telles classes d'homologie, à l'aide encore du type géométrique d'une partition de Markov, au moins dans le cas où le modèle de K n'a que des composantes de bord de genre 1 (ce qui est équivalent à dire qu'il se plonge dans \mathcal{M}).

Une présentation finie de (\mathcal{M}, X) est dans ce cas obtenue comme un type géométrique T et un nombre fini de mots sur un alphabet défini par T , ces mots codant des classes d'homologie du bord du modèle.

Remarque Le comportement global des champs hyperboliques en dimension 3 s'avère ici presque opposé à celui des difféomorphismes hyperboliques des surfaces compactes. En effet, le principal résultat de [BLJ] peut s'énoncer sous la forme suivante : le germe d'un difféomorphisme de Smale f de surface compacte le long d'un ensemble selle saturé K caractérise la restriction de f , à conjugaison topologique près, à un voisinage invariant canonique $\Delta(f, K)$ que les auteurs appellent le *domaine* de K . L'analogie entre difféomorphismes hyperboliques des surfaces et champs hyperboliques en dimension 3 n'est donc que locale.

0.4.2 Réalisation de présentations combinatoires

Le type géométrique d'une partition de Markov est une information combinatoire décrivant l'ordre et l'orientation des composantes d'intersection des rectangles de la partition avec leurs images. On peut considérer abstraitement de telles combinatoires : des *types géométriques abstraits*. On exposera alors la preuve du théorème suivant (qui a été montré en collaboration avec C. Bonatti et J.L. Vieitez) :

Théorème D *Pour tout type géométrique abstrait T , il existe un modèle dont le maximal invariant admet une partition de Markov de type T .*

Tout modèle (au sens de la définition du paragraphe précédent) se complète facilement en un champ de Smale non singulier sur une variété compacte de dimension 3 sans bord, ce qui implique donc que tout type géométrique abstrait est le type d'une partition d'un ensemble selle saturé d'un flot de Smale non singulier.

Surtout, notre démonstration du théorème D sera constructive ; un peu plus précisément, nous donnerons une construction du modèle d'un type géométrique abstrait quelconque par une suite finie d'opérations élémentaires parmi les suivantes : produit cartésien de segments, passage au quotient par une relation d'équivalence affine, découpage le long de surfaces (constructibles par les opérations précédentes), recollement de variétés le long de parties de leurs bords.

On a donc maintenant un prototype explicite (en fait, un nombre infini de prototypes explicites) de chaque flot de Smale en dimension 3 : au modèle d'un type géométrique de l'ensemble selle maximal (construit par le théorème D), il suffit d'attacher un certain nombre d'anses et de coller des tores pleins munis d'orbites périodiques puits ou sources pour reconstruire la variété globale et le champ sur cette variété.

Remarque Remarquons que ce résultat est encore opposé à ce qui se passe pour les difféomorphismes des surfaces. Ainsi, Bonatti, Langevin et Jeandenans ont remarqué que de nombreux types géométriques abstraits n'étaient pas des types de partitions de Markov d'ensembles selles saturés de difféomorphismes de Smale de surfaces compactes (on précisera quels sont ces types géométriques, voir la partie 0.4.5, voir la suite de cette introduction).

0.4.3 Présentation combinatoires équivalentes

On a caractérisé et décrit chaque flot hyperbolique à l'aide de présentations combinatoires finies, essentiellement constituées d'un type géométrique. Mais un ensemble hyperbolique admet (sauf dans certains cas triviaux) une infinité de partitions de Markov de types géométriques différents. Un même flot hyperbolique admet donc généralement une infinité de présentations combinatoires différentes.

Pour aller au-delà d'une description des flots hyperboliques et réellement classer ces flots à équivalence topologique près, il faut déterminer quelles présentations correspondent au même flot. On a déjà fait remarquer qu'il existe plusieurs types de réponses plus ou moins efficaces à cette question (point (3) de la classification).

Puisque le type géométrique d'une partition de Markov (par exemple, de l'ensemble selle maximal) caractérise le cœur de la dynamique d'un flot de Smale, on s'attachera essentiellement à rechercher les types géométriques équivalents. Précisément, on dira que deux types géométriques sont *équivalents pour les flots* s'ils donnent lieu au même modèle (cette définition a un sens d'après la proposition A et les théorèmes B et D).

On sait que les diverses partitions de Markov (à rectangles disjoints) d'un ensemble selle d'un flot s'obtiennent les unes à partir des autres par une suite finie de changements élémentaires. Très brièvement, ces changements consistent à :

1) Casser un rectangles en deux sous-rectangles horizontaux ou verticaux.

1bis) L'opération inverse (qui consiste à regrouper certains rectangles quand cela est possible, c'est-à-dire quand les rectangles résultant du regroupement forment à nouveau une partition de Markov).

2) Dédoubler un rectangle (remplacer un rectangle R par deux copies de R placées "l'une derrière l'autre" quand on suit le flot).

2bis) L'opération inverse (c'est-à-dire supprimer un rectangle si celui-ci a un "double" placé derrière lui).

Une simple traduction de ces changements élémentaires en termes de types géométriques montre la proposition suivante :

Proposition E *Les types géométriques équivalents pour les flots à un type géométrique donné sont (récurivement) énumérables.*

Nous n'avons pour l'instant pas de moyen algorithmique de décider si deux types géométriques sont équivalents pour les flots. Par contre, nous décrirons un algorithme qui permet de classer les difféomorphismes structurellement stables des surfaces (voir ci-dessous, la partie 0.4.4). Je voudrais expliquer pourquoi, en dehors de son intérêt propre, une classification des difféomorphismes hyperboliques des surfaces peut être vue comme une réduction de la classification des flots hyperboliques en dimension 3 :

Le type géométrique d'une partition de Markov caractérise aussi bien, au voisinage d'un ensemble selle, un difféomorphisme de surface à conjugaison topologique près qu'un champ de vecteurs en dimension 3 à équivalence topologique près. De plus, deux partitions de Markov d'un même ensemble hyperbolique de difféomorphisme de surface se déduisent

l'une de l'autre par une suite finie de mouvements du type 1) et 1bis) définis ci-dessus. On peut donc voir la classification des difféomorphismes des surfaces comme une classification des germes de flots hyperboliques de dimension 3 le long d'ensemble selles saturé, mais pour une relation d'équivalence (engendrée par les mouvements 1) et 1bis)) plus rigide que l'équivalence topologique (engendrée, au niveau des types géométriques, par les mouvements 1), 1bis), 2) et 2bis)).

Plus précisément, si la partition \mathcal{R}' de K est déduite de la partition \mathcal{R} de K par un changement élémentaire de type 1) ou 1bis), si R et R' désignent les unions des rectangles des partitions \mathcal{R} et \mathcal{R}' , alors les intersections de R et R' avec K sont égales. Cela n'est pas vrai si \mathcal{R}' est déduite de \mathcal{R} par un changement élémentaire de type 2) ou 2bis). Ne changer de partition de Markov que par des mouvements 1) ou 1bis) pour un flot consiste donc à ne tracer des partitions de Markov que dans une section locale fixée. La classification des types géométriques pour l'équivalence induite par les difféomorphismes des surfaces peut être donc vue comme une classification (partielle) des couples constitués d'un germe de flot le long d'un ensemble hyperbolique K et d'une section de K .

Remarque La classification de ces couples n'est que "partielle" car tout type géométrique n'est pas réalisable pour les difféomorphismes de surfaces. Cependant, il me semble que cette restriction est plus technique que fondamentale.

J'aime bien voir ceci à travers l'analogie suivante : tout ensemble fini d'orbites périodiques d'un ensemble hyperbolique K d'un flot en dimension 3 forme un entrelac dans la variété ambiante. Choisir une section locale de K correspond, en quelque sorte, à mettre cet entrelac d'orbites périodiques sous forme de tresse. On en est ici au même point que pour la classification des tresses et des nœuds : on sait classifier les difféomorphismes hyperboliques des surfaces, mais, comme il y a une infinité de façons de voir un flot en dimension 3 comme la "suspension locale" d'un difféomorphisme de surface, on ne sait pas classifier les flots hyperbolique en dimension 3. (Cette analogie n'est qu'une analogie ; une classification des germes de flots n'impliquerait pas *a priori* une classification des nœuds.)

0.4.4 Algorithme de classification des difféomorphismes hyperboliques des surfaces

Pour les difféomorphismes hyperboliques des surfaces, le type géométrique d'une partition de Markov d'un ensemble selle saturé K caractérise le difféomorphisme sous-jacent f à conjugaison topologique près sur un voisinage invariant canonique $\Delta(f, K)$ de K ([BLJ]). On dira que deux types géométriques sont *équivalents pour les difféomorphismes* si ce sont les types géométriques de deux partitions de Markov d'un même ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme de Smale de surface compacte.

Pour tout ensemble hyperbolique saturé K d'un difféomorphisme de surface f , et pour tout entier p assez grand, on construira géométriquement un ensemble fini canonique $\mathcal{M}(f, K, p)$ (d'orbites) de partitions de Markov canoniquement associées à (f, K) (c'est-à-dire qui ne dépendent que de la classe de conjugaison de $f|_{\Delta(f, K)}$). En fait, l'entier p doit être plus grand qu'un certain entier $p_{\min}(f, K)$, qui est lui aussi canonique. Les

partitions de $\mathcal{M}(f, K, p)$ donnent lieu à un ensemble fini canonique de types géométriques $\mathcal{T}(f, K, p)$. Enfin, puisque tout type géométrique T d'une partition de K caractérise la classe de conjugaison de f sur $\Delta(f, K)$, on peut poser, pour tout un tel type géométrique, $\mathcal{T}(T, p) = \mathcal{T}(f, K, p)$. On montre le théorème suivant :

Théorème F *Soit \mathcal{T}_n l'ensemble des types géométriques réalisables (pour les difféomorphismes) transitifs à n rectangles.*

- Si $T \in \mathcal{T}_n$ alors $p_{\min}(T) \leq p_0(n) = 50n^2$,
- pour tout $p \geq p_0(n)$ la fonction $\Pi_p : \mathcal{T}_n \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ est récursive.
 $T \mapsto \mathcal{T}(T, p)$

L'ensemble $\mathcal{T}(T, p)$ étant, pour tout $p \geq p_{\min}(T)$, fini et canonique, le théorème F a pour corollaire immédiat :

Corollaire G *Il existe un algorithme fini qui décide si deux types géométriques sont équivalents pour les difféomorphismes ou pas.*

Le théorème F donne également un nouveau moyen de classifier les homéomorphismes pseudo-Anosov (voir l'introduction et l'appendice D du chapitre 5).

0.4.5 Champs de vecteurs en dimension 3 et suspensions de difféomorphismes de surfaces

Les résultats précédemment énoncés convainquent rapidement des différences entre les dynamiques globales des champs de vecteurs hyperboliques en dimension 3 et celles des difféomorphismes hyperboliques des surfaces. Pourtant, rappelons que l'opération de suspension associe à tout difféomorphisme de surface compacte un champ de vecteurs sur une variété de dimension 3. Il me semble donc naturel d'essayer de détecter, sur nos présentations finies, le fait qu'un flot hyperbolique en dimension 3 est ou n'est pas une suspension de difféomorphisme de surface.

Le problème global dépend trop de la variété qui porte la dynamique et de la façon dont cette dynamique y est plongée. Notre démarche ayant consisté à se ramener d'abord au germe d'un flot le long d'un ensemble selle saturé, on se pose la question plus précise suivante :

(*) *Comment lit-on que le germe d'un champ de vecteurs, en dimension 3, le long d'un ensemble selle saturé est, ou n'est pas, le germe de la suspension d'un difféomorphisme de Smale de surface le long d'un ensemble selle saturé ?*

Remarque Le terme *saturé* est, encore une fois, particulièrement important dans la formulation ci-dessus : on peut toujours plonger le germe d'un flot le long d'une pièce basique K comme germe d'une suspension le long d'un ensemble selle non-saturé. Mais K n'est alors pas isolé dans l'ensemble non-errant de la suspension et la dynamique de la pièce basique à l'intérieur de laquelle est alors plongé K ne reflète pas la dynamique de K .

Nous mènerons deux approches du problème. La première consiste à se demander si un germe de champ donné par un type géométrique T est le germe de la suspension d'un difféomorphisme de surface admettant ce type géométrique T . D'après la proposition A, ceci revient à déterminer si le type géométrique T est *réalisable pour les difféomorphismes* (des surfaces compactes), c'est-à-dire si le type géométrique T est le type géométrique d'une partition d'un ensemble selle saturé d'un difféomorphisme hyperbolique de surface compacte.

Nous allons montrer qu'un type est réalisable pour les difféomorphismes si et seulement si son genre est fini. Le *genre* d'un type géométrique, défini par Bonatti et Jeandenans, est le genre minimal d'une surface qui porte tous les itérés d'une partition de Markov de type T . La réalisabilité d'un type géométrique est donc caractérisée par un invariant simple.

De plus, on donne une caractérisation effective des types géométriques de genre fini. Cette caractérisation s'appuiera sur la surface Σ^u obtenue comme intersection du saturé par le flot d'une partition de Markov et du bord de sortie d'un voisinage filtrant quelconque. On verra que cette surface peut être reconstruite par recollement de rectangles le long de certains de leurs côtés selon une règle dictée par le type géométrique sous-jacent. Pour pouvoir énoncer la caractérisation, disons simplement que certains côtés des rectangles constituant Σ^u seront appelés *les toits des tours* de Σ^u et seront naturellement orientés (en fait, ces côtés sont simplement ceux sur lesquels sont recollés d'autres côtés de rectangles).

Précisément, on montre le théorème suivant :

Théorème H *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- *Le type géométrique T est réalisable pour les difféomorphismes.*
- *Le type géométrique T est de genre fini.*
- — *La surface abstraite Σ^u associée à T peut se plonger dans une union finie de tores T_1, \dots, T_n ,*
 - *il existe sur ces tores un nombre fini de cercles plongés disjoints C_1^u, \dots, C_l^u tels que l'intersection de l'union de ces cercles avec Σ^u soit exactement égale à l'union des toits des tours de Σ^u ,*
 - *chaque cercle C_i^u peut-être orienté de façon compatible avec les orientations des toits des tours de Σ^u qu'il contient.*

Remarque Bonatti et Jeandenans ont donné, dans [BLJ], une caractérisation des types géométriques de genre fini. L'utilisation des champs de vecteurs pour la démonstration de H en donne une caractérisation étonnamment rapide.

Le théorème H nous permet de donner une caractérisation abstraite des *types géométriques de suspensions*. Simplement, à différents types géométriques équivalents pour les flots sont associés différentes surfaces Σ^u ; les mouvements élémentaires permettant de passer d'un type géométrique à un autre type équivalent (proposition E) se traduisent en des mouvements élémentaires sur la surface Σ^u . On a alors le corollaire suivant (immédiat) du théorème H

Corollaire I *Soit T un type géométrique et soit Σ^u la surface de sortie associée. Alors T est un type géométrique de suspension s'il existe une surface de sortie $\Sigma^{u'}$ déduite de Σ^u par une suite finie de mouvements élémentaires et vérifiant la troisième condition du théorème H.*

Cette caractérisation des types géométriques de suspension n'est pour l'instant pas algorithmiquement décidable.

Une autre approche consiste à rechercher, comme l'a fait Fried pour les flots d'Anosov transitifs ([Fr82]), des *sections de Birkhoff*. Une section de Birkhoff d'un flot sur une variété compacte est une surface compacte à bord, dont le bord est constitué d'orbites périodiques du flot, qui est transverse à ce flot partout ailleurs et qui coupe tout segment d'orbite de longueur fixée. En quelque sorte, un champ de vecteurs admettant une section de Birkhoff "est une suspension sauf en un nombre fini d'orbites".

Nous dirons qu'un germe le long d'un ensemble selle saturé admet une section de Birkhoff dès que ce germe peut être réalisé comme germe d'un flot global (le long d'un ensemble selle saturé) admettant une section de Birkhoff.

Remarque Notre résultat sera assez différent de celui de Fried : pour les Anosov transitifs, il existe toujours des sections de Birkhoff alors que pour les pièces basiques de dimension 1, l'existence de section de Birkhoff est une condition très restrictive.

La caractérisation des germes qui admettent des sections de Birkhoff s'appuiera sur les *laminations d'entrée et de sortie* de ce germe. Les laminations d'entrée \mathcal{L}^s et de sortie \mathcal{L}^u associée au germe d'un flot le long d'un ensemble selle saturé K sont obtenues comme intersection des variétés stable et instable de K avec les bord d'entrée et de sortie d'un voisinage filtrant. Ce sont des laminations compactes, n'ayant qu'un nombre fini de feuilles compactes (qui sont naturellement orientées). De plus, toute demi-feuille non-compacte de \mathcal{L}^s ou \mathcal{L}^u spirale sur une feuille compacte.

On définira à partir de ces laminations deux graphes Γ^s et Γ^u . Brièvement, les sommets de ces graphes seront les feuilles compactes des laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u et une arête joindra deux sommets si une feuille non-compacte spirale sur les côtés droit et gauche des feuilles compactes correspondantes. On peut alors parler de la composante du bord du modèle de $[X, K]$ portant un sommet ou une composante connexe du graphe Γ^s ou Γ^u associé à $[X, K]$. On montrera alors le théorème suivant :

Théorème J *Soit (X, K) un ensemble selle saturé transitif et soit Γ^s et Γ^u les graphes associés aux laminations d'entrée et de sortie germe $[X, K]$. Notons (***) la propriété suivante :*

- (***) — *Tout sommet des graphes Γ^s et Γ^u est le sommet de départ d'au plus une arête et le sommet d'arrivée d'au plus une arête également (les composantes connexes de Γ^s et Γ^u sont donc soit des cycles orientés, soit des segments orientés),*
 — *le nombre de composantes non-cycliques de Γ^s est égal au nombre de composantes non-cycliques de Γ^u .*

- deux composantes connexes distinctes des graphes Γ^s et Γ^u sont toujours portées par des composantes connexes distinctes du bord du modèle de K ,
- toute composante du modèle de K portant une composante cyclique de Γ^s ou Γ^u est un tore et toute composante portant une composante non-cyclique est une sphère.

Alors, on a les deux implications suivantes :

- si le germe $[X, K]$ est un germe de suspension (de difféomorphisme hyperbolique de surface le long d'un ensemble selle saturé), alors (X, K) vérifie la condition (***) ,
- si (X, K) vérifie la condition (***) , alors le germe $[X, K]$ admet une section de Birkhoff.

On obtient ainsi une condition suffisante (et presque nécessaire) effective à l'existence de sections de Birkhoff. Cette condition peut être traduite en une condition portant sur la surface de sortie Σ^u qui est plus directement constructible que les laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u (cependant, ces laminations sont les objets naturels pour déterminer l'existence de sections de Birkhoff).

Assez devisé! J'espère que le lecteur n'est pas déjà lassé et pense qu'il est temps maintenant de goûter aux démonstrations.

Chapitre 1

Présentations combinatoires finies des flots hyperboliques en dimension 3

Ce chapitre est essentiellement tiré (à part la section 1.4) de l'article [BeBo] écrit en collaboration avec C. Bonatti.

Le but est ici de réaliser le premier pas d'une classification, à équivalence topologique globale près, des champs de vecteurs structurellement stables des variétés compactes orientables de dimension 3. Plus précisément, on veut ici donner un moyen d'extraire d'un couple (\mathcal{M}, X) une information combinatoire finie sur la topologie de la variété \mathcal{M} et sur la dynamique du flot de X , cette information caractérisant entièrement la classe d'équivalence topologique de X sur \mathcal{M} : si un autre champ hyperbolique Y sur une 3-variété \mathcal{N} partage la même information combinatoire, alors X et Y sont topologiquement équivalents. Nous appellerons *présentation combinatoire finie* de (\mathcal{M}, X) une telle information. Ce chapitre correspond donc à l'étape 1 de la classification comme défini dans l'introduction.

Rappelons que l'ensemble non-errant d'un champ axiome A se décompose en un nombre fini de *pièces basiques* qui sont les compacts transitifs maximaux. La dimension des directions stable et instable est, par définition, constante sur une pièce basique. Dans le cas des flots en dimension 3, les seules pièces basiques non réduites à une singularité ou une orbite isolée ont des directions stables faibles et instables faibles de dimension 2. Une telle pièce basique peut être :

- de dimension 1 ; ce que nous appelons une pièce basique *selle*, et qui, transversalement au champ, est un ensemble de Cantor,
- de dimension 2 ; la pièce basique est alors topologiquement une lamination de dimension 2 et dynamiquement un attracteur ou un répulseur hyperbolique,
- de dimension 3 ; la pièce basique est égale à la variété entière et le flot est un flot d'Anosov transitif.

Dans le cas des flots d'Anosov transitifs, un théorème de Fried ([Fr83]) semble conduire à des présentations finies. Ce théorème affirme en effet que tout flot d'Anosov transitif

est, à un nombre fini de chirurgies de Dehn sur des orbites périodiques près, la suspension d'un homéomorphisme pseudo-Anosov. Il suffirait alors de donner une présentation du pseudo-Anosov, de coder les orbites sur lesquelles on effectue les chirurgies de Dehn à travers cette présentation et de donner pour chaque chirurgies de Dehn les entiers (p, q) la caractérisant. De tels codages semblent possibles à l'aide de partitions de Markov.

Dans le cas des attracteurs ou répulseurs hyperboliques, des travaux de Williams ([Wi70]), puis de Christy ([Ch93]) montrent la voie d'une présentation finie du bassin d'attraction (ou de répulsion) de la pièce basique. Une telle pièce basique est en effet caractérisées par une surface branchée munie d'un semi-flot, qui peuvent être décrits par une combinatoire simple.

Notre point de vue sera en quelque sorte inverse. On ne considère au départ que des *flots de Smale* c'est-à-dire des flots dont toutes les pièces basiques non-triviales sont des pièces basiques *selles*, c'est-à-dire de dimension 1. On indiquera dans un appendice comment ramener tout flot hyperbolique à un flot de Smale.

On veut comprendre la dynamique *globale* d'un champ de Smale. On veut donc non seulement comprendre les dynamiques au voisinage des différentes pièces basiques, mais également la façon dont ces dynamiques interfèrent et donc la façon dont les variétés invariantes des différentes pièces basiques s'intersectent.

Rappelons pour cela que Smale a défini un pré-ordre sur l'ensemble des orbites non errantes: si x et y sont non errants, $x \prec y$ si $W^s(x) \cap W^u(y)$ est non vide. Les pièces basiques peuvent alors être définies comme les éléments de la partition de l'ensemble non errant par la relation d'équivalence $x \sim y$ si $x \prec y$ et $x \succ y$. Le pré-ordre ci-dessus induit alors un ordre partiel sur l'ensemble des pièces basiques: *l'ordre de Smale*.

Pour comprendre la dynamique globale, on ne se limitera pas aux pièces basiques selles, mais on considérera des ensembles *selles saturés* non nécessairement transitifs c'est-à-dire des compacts hyperboliques K de dimension 1 tels que $K = W^s(K) \cap W^u(K)$. Tout ensemble selle saturé est l'union d'un ensemble fini I de pièces basiques selles et de l'intersection de leurs variétés invariantes. Réciproquement une telle union est un compact selle saturé si I ne contient que des pièces basiques de même indice et si I est un intervalle pour l'ordre de Smale (c'est-à-dire que si deux pièces basiques sont dans I alors il en est de même pour toute pièce intermédiaire)(voir [BLJ], proposition 2.3.7).

Un exemple d'ensemble selle saturé d'un flot de Smale particulièrement intéressant est l'ensemble selle saturé maximal: l'union de toutes les pièces basiques non singulières et des intersections des variétés invariantes de ces pièces basiques.

Depuis Bowen, on sait que la restriction d'un flot à un ensemble selle saturé peut être décrite à équivalence topologique près par la *matrice d'incidence* d'une *partition de Markov*. Cependant, si deux flots hyperboliques décrits par des partitions de Markov ayant même matrice d'incidence sont topologiquement équivalents en restriction aux ensembles selles saturés considérés, *l'homéomorphisme réalisant l'équivalence ne peut en général s'étendre à aucun voisinage de ces ensembles selles*.

Pour les difféomorphismes de Smale des surfaces compactes, Bonatti et Langevin ont introduit une combinatoire permettant de décrire la dynamique globale à équivalence topologique près (voir [BLJ]). Si on considère une partition de Markov d'un ensemble *selle*

saturé constituée de “vrais” rectangles géométriques plongés dans la surface, on définit le *type géométrique* de cette partition qui décrit l’ordre et le sens des intersections des rectangles avec leurs images. Les auteurs montrent que le type géométrique caractérise la dynamique sur un voisinage invariant canonique (unique à conjugaison près) de K : le *domaine* de K . Ceci conduit à des présentations finies des difféomorphismes structurellement stables des surfaces compactes. Ceci a également pour conséquence que le germe d’un difféomorphisme f de surface compacte le long d’un ensemble selle saturé K caractérise f , à conjugaison topologique près, sur un voisinage invariant canonique de K .

Revenons aux flots en dimension 3. Nous appellerons *germe d’un champ X le long d’un compact invariant K* la classe du couple (X, K) pour la relation d’équivalence suivante : $(X, K) \sim (Y, L)$ s’il existe un voisinage U de K et un voisinage V de L tel que les restrictions de X et Y à U et V soient topologiquement équivalentes via un homéomorphisme envoyant K sur L . Nous noterons $[X, K]$ le germe de X le long de K .

Nous verrons (voir l’appendice) que le germe d’un champ (en dimension 3) le long d’un ensemble selle saturé K ne caractérise aucun voisinage invariant canonique (même à équivalence topologique près) :

pour tout voisinage invariant \mathcal{U} d’un ensemble selle saturé K , il existe une variété munie d’un champ de Smale Y possédant un ensemble selle L , tel que X et Y soient topologiquement équivalents en restriction à des petits voisinages de K et L , mais que L ne possède aucun voisinage invariant sur lequel Y soit topologiquement équivalent à la restriction de X à \mathcal{U} .

Pour contourner ce problème, nous montrons que le germe du champ X le long de l’ensemble selle saturé K détermine de façon unique, à équivalence topologique près, une variété à bord munie d’un flot transverse au bord qui est en un certain sens la plus simple parmi celles qui réalisent le germe $[X, K]$ comme ensemble selle d’un flot de Smale. Plus précisément :

Définition 1.1 *Soit X un champ de vecteur sur une variété compacte orientable de dimension 3 et K un ensemble selle de X . Nous appellerons modèle du germe $[X, K]$ tout couple (N, Y) où N est une variété de dimension 3 orientable compacte à bord, et où Y est un champ de vecteur sur N transverse au bord, tels que :*

i) Le maximal invariant de Y dans N est un ensemble selle K_Y tel que le germe $[Y, K_Y]$ est égal au germe $[X, K]$.

ii) Notons $\partial_1 N$ l’union des composantes connexes du bord de N où Y est rentrant dans N ; alors tout cercle plongé dans $\partial_1 N$, disjoint de $W^s(K_Y)$ borde un disque dans $\partial_1 N$ également disjoint de $W^s(K_Y)$.

iii) Toute composante connexe de N contient au moins un point de K_Y .

Remarque La condition *ii)* de la définition ci-dessus implique une condition analogue concernant l’union $\partial_2 N$ des composantes du bord de N où le champ est sortant de N et la variété instable de K_Y .

Le premier but de ce chapitre est de montrer :

Théorème 1.2 *tant donné K un ensemble selle saturé d'un champ de Smale X sur une variété compacte orientable de dimension 3, il existe un unique modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) de $[X, K]$ à équivalence topologique près.*

Remarque Le modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) peut être naturellement complété en une variété ouverte sans bord munie d'un flot complet. Si on note \tilde{K} le maximal invariant de \tilde{M} , l'ensemble selle saturé K possède alors un voisinage invariant dans \mathcal{M} topologiquement équivalent à un voisinage invariant de \tilde{K} dans cette variété ouverte.

On veut alors montrer que le modèle du germe d'un champ le long d'un ensemble selle admet une présentation combinatoire finie. Pour cela, on s'intéresse à des *partitions de Markov amples* de K , qui sont des partitions par des rectangles "géométriques" plongés dans une section transverse locale de K . Les intersections entre les rectangles d'une telle partition et leur premier retour sur la section sont codées par une combinatoire finie : le *type géométrique* de la partition, défini de façon analogue à celui de [BLJ]. Nous montrons alors que le type géométrique caractérise le modèle :

Théorème 1.3 *Soient deux champs de Smale X et Y sur deux variétés compactes orientables \mathcal{M} et \mathcal{N} de dimension 3 et soient K et L des ensembles selles saturés de X et Y .*

On suppose que K et L admettent des partitions de Markov de même type géométrique.

Alors les modèles de $[X, K]$ et de $[Y, L]$ sont topologiquement équivalents. En particulier, il existe des voisinages invariants de K et L en restriction auxquels les champs X et Y sont équivalents.

Soit K un ensemble selle saturé d'un flot de Smale X de \mathcal{M} . On sait maintenant donner des présentations combinatoires finies du modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) de K . On va en déduire des présentations de la restriction de X à des voisinages intéressants de K dans \mathcal{M} .

La théorie de Smale (existence de filtrations) fournit des voisinages de K par des variétés compactes M à bord transverse à X , tel que K soit le maximal invariant de M , et que toute orbite (positive ou négative) qui sort de M n'y rentre plus (en d'autres termes, l'intersection de toute orbite avec M est connexe) (voir, par exemple, [PS81]). Nous appellerons *voisinage filtrant* un tel voisinage M . La connaissance de la dynamique sur un voisinage filtrant suffit à déterminer la dynamique sur un voisinage invariant. D'autre part, nous verrons que K ne possède, dans \mathcal{M} , et à équivalence près, qu'un nombre fini de tels voisinages filtrants. Les voisinages filtrants sont les pièces naturelles du jeu de reconstruction de la variété globale \mathcal{M} munie du champ X (voir les travaux de J. Franks et K. de Rezende ([Fr83] et [deR]) qui visent à déterminer la topologie de la variété obtenue en recollant de tels voisinages filtrants).

La construction que nous effectuerons d'un modèle de $[X, K]$, montrera aussi un moyen de reconstruire, à partir de ce modèle, la restriction de X à tout voisinage filtrant M par un nombre fini de chirurgies topologiques simples loin de l'ensemble K . Nous appellerons *attachement d'anse* la chirurgie suivante : on considère deux disques disjoints sur le bord d'entrée de \tilde{M} dont les orbites positives sortent de \tilde{M} en temps fini. L'orbite de ces deux disques est alors topologiquement équivalente à l'union de deux cylindres pleins disjoints

$D^2 \times [0,1]$ munis du champ $\frac{\partial}{\partial t}$. On ôte alors ces deux cylindres pleins à \tilde{M} et on recolle les deux bords tangents ainsi créés. Remarquons que cela revient effectivement à attacher une anse au bord d'entrée de \tilde{M} (voir la partie 1.3.1).

On verra que la classe d'équivalence topologique du résultat d'un attachement d'anse sur des cercles C et C' ne dépend que de la composante connexe du bord d'entrée de \tilde{M} privé de la variété stable de \tilde{K} dans laquelle se trouve chacun des cercles C et C' .

Proposition 1.4 *Si M est un voisinage filtrant de K tel que toute composante connexe de M rencontre K , on peut passer de (\tilde{M}, \tilde{X}) à un couple topologiquement équivalent à (M, X) par un nombre fini d'attachement d'anses bien choisis.*

On donne alors une présentation finie de tout couple (M, X) où M est un voisinage filtrant d'un ensemble selle saturé K de X : cette présentation est la donnée du type géométrique d'une partition de Markov de K et d'un nombre fini de mots codant les composantes connexes, du bord d'entrée de \tilde{M} privé de la variété stable de \tilde{K} , contenant les cercles nécessaires aux attachements d'anses. Nous expliquerons comment réaliser un tel codage via le type géométrique de la partition de Markov (voir la partie 1.3.2) et montrerons que l'on obtient ainsi une présentation finie de tout voisinage filtrant de K (théorème 1.53)

Remarque Pour ne pas créer de confusion, signalons que les chirurgies que nous nommons *attachements d'anses* sont différentes de celles utilisées dans [Asi] et [Mor] (par ailleurs, le but de ces articles est dans l'esprit plus proche du but de notre chapitre 2 que du but du présent chapitre).

Enfin, on pourra donner des présentations globales de certains flots hyperboliques. Si (\mathcal{M}, X) est un flot de Smale sans singularité, l'ensemble non-errant de X est constitué de l'ensemble selle maximal K et d'un certain nombre fini d'orbites périodiques puits et sources. La variété \mathcal{M} est alors constitué d'un voisinage filtrant (en fait l'unique voisinage filtrant) M de K sur lequel on recolle des tores pleins contenant chacun une orbite puits ou sources. On montre qu'à équivalence topologique près, X ne dépend que de sa restriction à M et d'une classe d'homologie de chaque composante de bord de M (lemme 1.56). On montre alors, dans certains cas, comment coder les classes d'homologie du bord de M à l'aide, encore, du type géométrique d'une partition de Markov de K . On obtient ainsi, par exemple, des présentations finies des flots de Smale sans singularités, dont toutes les composantes de bord du modèle sont de genre 1 (proposition 1.60).

Tout flot hyperbolique peut être transformé en un flot de Smale par des opérations de type *dérivé d'Anosov*. Un problème consiste à définir une opération de inverse au dérivé d'Anosov de façon canonique. Ceci ramènerait la présentation de tout flot hyperbolique à la présentation d'un flot de Smale. Ceci permettrait en particulier d'obtenir des présentations finies des flots d'Anosov transitifs, à travers les présentations de flots de Smale décrites ci-dessus.

Dans la suite, sans qu'on le précise à chaque fois, les variétés seront compactes orientables et de dimension 3.

1.1 Modèle d'un ensemble selle

Le but de cette partie est la démonstration du théorème 1.2, c'est-à-dire de l'existence d'un modèle, unique à équivalence topologique près, du germe d'un champ de Smale X le long d'un ensemble selle saturé K .

Rappelons une dernière fois qu'un ensemble selle saturé est un ensemble sans singularité, hyperbolique, saturé, de dimension topologique 1 (transversalement au champ X , un tel ensemble est totalement discontinu) où les directions stables et instable fortes en tout point sont de dimension 1 (les directions stable et instable faibles sont donc de dimension 2).

1.1.1 Voisinages filtrants

Rappelons que l'ensemble non errant d'un flots de Smale X se décompose en un nombre fini de pièces basiques partiellement ordonnées par l'ordre de Smale.

D'après [Sm67] et [PS81], pour toute indexation $\{\Lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de l'ensemble des pièces basiques de X , croissante pour l'ordre de Smale, il existe une filtration $\{\Sigma_i\}_{0 \leq i \leq n}$ adaptée à cette indexation. Ceci signifie que :

- Les Σ_i sont des sous-variétés de dimension 3 compactes à bords. De plus, les Σ_i peuvent être choisies telles que X soit transverse à leur bord et rentrant dans Σ_i .

- On a $\Sigma_0 = \emptyset$, $\Sigma_n = \mathcal{M}$ et, pour tout i , $\Sigma_i \subset \text{int}(\Sigma_{i+1})$.

- Pour tout i , le maximal invariant de $\Sigma_i \setminus \text{int}(\Sigma_{i-1})$ est égal à Λ_i .

Pour tout ensemble selle saturé K de X , il existe une indexation $\{\Lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de l'ensemble des pièces basiques croissante pour l'ordre de Smale et telle que l'ensemble des pièces basiques de K soit un intervalle $\Lambda_k, \dots, \Lambda_l$ pour cette indexation (puisque l'ensemble des pièces basiques de K est un intervalle pour l'ordre de Smale). On montre alors facilement que K est le maximal invariant de $M = \Sigma_l \setminus \text{int}(\Sigma_{k-1})$: tout point de K a son α et son ω -limite dans M et son orbite ne peut donc sortir de M ; réciproquement, tout point du maximal invariant de M a son α et son ω -limite dans des pièces basiques de M et est donc dans l'intersection des variétés invariantes de ces pièces basiques, c'est-à-dire dans K .

Définition 1.5 *Un voisinage filtrant de K sera une sous-variété à bord M de \mathcal{M} dont le bord est transverse au champ X , telle que le maximal invariant de M soit K et telle que l'intersection de toute orbite de X avec M soit connexe.*

On appellera bord d'entrée de M et on notera $\partial_1 M$ l'union des composantes connexes du bord de M le long desquelles X est rentrant dans M . On définit de même le bord de sortie $\partial_2 M$ de M .

Remarques

- Cette définition permet aussi de considérer des voisinages filtrants d'ensembles selles de façon intrinsèque, sans référence à une variété ambiante sans bord : un *voisinage filtrant intrinsèque* de K sera une variété compacte à bords N , munie d'un champ Y transverse au bord, et telle que le maximal invariant de N pour le flot de Y soit un ensemble selle L tel que $[X, K] = [Y, L]$.

— Tout voisinage filtrant intrinsèque N d'un ensemble selle K , peut être plongé dans une variété \mathcal{M} , compacte, sans bord, munie d'une extension de Smale du champ de N tel que N soit un voisinage filtrant de K dans \mathcal{M} (voir, par exemple, [Fr83, corollaire 2.2] ou l'appendice). L'ensemble K est alors saturé dans \mathcal{M} .

— Ceci montre que, si K est un ensemble selle (non nécessairement saturé) admettant un voisinage isolant à bord transverse au champ, K peut être plongé comme ensemble saturé d'une variété sans bord.

Nous venons de voir que tout ensemble saturé possède au moins un voisinage filtrant. Le reste de cette sous-partie a pour but d'esquisser une démonstration de la proposition suivante (qui nous semble faire partie du folklore) :

Proposition 1.6 *Soit K un ensemble selle saturé d'un flot de Smale X sur une variété \mathcal{M} . Alors, il n'existe, à équivalence près, qu'un nombre fini de voisinage filtrants de K dans \mathcal{M} .*

Lemme 1.7 *tant fixée une indexation des pièces basiques de X croissante pour l'ordre de Smale et étant données deux filtrations associées à cette indexation, il existe une isotopie le long des orbites de X déformant une des deux filtrations en l'autre.*

Ide de la démonstration Si $\{\Sigma_i\}_{0 \leq i \leq n}$ et $\{\Sigma'_i\}_{0 \leq i \leq n}$ sont deux telles indexations, il suffit de montrer que l'orbite de tout point de $\partial\Sigma_i$ coupe $\partial\Sigma'_i$ en un point et un seul. Pour cela, on remarque $\partial\Sigma_i$ aussi bien que $\partial\Sigma'_i$ rencontre toute orbite dont l' α -limite est dans les $\Lambda_j, j > i$ et dont l' ω -limite est dans les $\Lambda_j, j < i$ et seulement ces orbites. \square

Démonstration de la proposition 1.6 Soit M un voisinage filtrant de K .

Remarquons d'abord que, pour toute pièce basique Λ de X qui n'est pas dans K , les deux propriétés suivantes s'excluent mutuellement :

— La variété stable de Λ rencontre M . Dans ce cas, on dira que Λ est inférieure à M .

— La variété instable de Λ rencontre M . Dans ce cas, on dira que Λ est supérieure à M .

(En effet, en utilisant l'hyperbolicité des points de Λ et en utilisant que, pour tous points p et q de Λ , $W^u(p)$ coupe $W^s(q)$, on obtient (voir [Sm67, lemme 7.1]) : si U est un ouvert contenant un point de $W^s(\Lambda)$ alors l' ω -limite de U contient $W^u(\Lambda)$. On en déduit que, si $W^s(\Lambda)$ et $W^u(\Lambda)$ coupent M , alors soit $\Lambda \subset M$, soit il existe une orbite dont l'intersection avec M n'est pas connexe.)

On note A , R et I (comme “attracteur”, “répulseur” et “indifférent”) les ensembles de pièces basiques strictement inférieures, strictement supérieures et indifférentes à M (par définition, les pièces basiques indifférentes à M sont celles qui ne sont ni dans K , ni dans A , ni dans R).

Lemme 1.8 *Il existe une complétion de l'ordre de Smale telle que A et R soient des intervalles et telle que $A \prec K \prec I \prec R$.*

Démonstration Le λ -lemma (voir, par exemple, [PaMe]) implique que toute pièce basique inférieure à une pièce basique inférieure à M est inférieure à M (de même en remplaçant inférieure par supérieure). On en déduit que A et R sont des intervalles.

Toute pièce basique inférieure (respectivement supérieure) à K est inférieure (respectivement supérieure) à M . En particulier, toute pièce basique de I est indifférente à celles de K , supérieure ou indifférente à celles de A et inférieure ou indifférente à celles de R . On peut donc réaliser la complétion souhaitée. \square

Considérons une filtration compatible avec un ordre donné par le lemme 1.8 et notons M_1 et M_2 respectivement le plus grand élément de cette filtration qui soit disjoint de K et le plus petit élément de cette filtration qui contienne K .

Le bord de M_1 rencontre en un et un seul point toute orbite dont l' α -limite est dans $K \cup R$ et dont l' ω -limite est dans A . Par définition de A , R et I , tout point de $\partial_2 M$ est dans ce cas. Donc il existe une isotopie de \mathcal{M} le long du flot qui déforme M en M' de façon à ce que $\partial_2 M'$ soit une union de composantes de ∂M_1 .

Le bord de M_2 rencontre en un et un seul point toute orbite dont l' ω -limite est dans $A \cup K$ et dont l' α -limite est dans R . Tout point de $\partial_1 M'$ est dans ce cas et le segment d'orbite qui va de ∂M_2 à $\partial_1 M'$ est disjoint de $\partial_2 M'$. Donc il existe une isotopie de \mathcal{M} le long du flot égale à l'identité au voisinage de $\partial_2 M'$ et qui déforme M' en M'' de façon à ce que $\partial_1 M''$ soit une union de composantes de ∂M_2 .

On en déduit que M'' est l'union de certaines composantes connexes de $M_2 \setminus M_1$. En remarquant que l'ensemble des ordres donnés par le lemme 1.8 est fini (c'est un ordre sur un ensemble fini), on en déduit la proposition. \square

1.1.2 Construction d'un modèle

On considère un champ de Smale X sur une variété compacte \mathcal{M} de dimension 3 et K un ensemble selle saturé de X . Pour construire un modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) , nous allons considérer un voisinage filtrant M de K dans \mathcal{M} et nous allons découper M le long de cylindres tangents au champ X , allant directement du bord d'entrée de M à son bord de sortie. Ces cylindres sont les orbites dans M de cercles plongés dans le bord d'entrée de M et disjoints de la variété stable de K . Ensuite, nous tuons les bords tangents ainsi créés en y collant des cylindres pleins $D^2 \times [0,1]$. Nous effectuerons cette chirurgie tant qu'il existera sur le bord d'entrée des cercles disjoints de $W^s(K)$ ne bordant pas un disque disjoint de $W^s(K)$. La preuve consiste essentiellement à montrer que le processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes.

On fixe donc un voisinage filtrant M de K tel que toute composante connexe de M contient au moins un point de K .

Nous avons d'abord besoin de montrer quelques propriétés de l'intersection de la variété stable de K avec le bord d'entrée de M .

Nous allons utiliser les variétés stables locales des points de K et de K lui-même. Pour ε assez petit, on notera $W_\varepsilon^s(x)$ la variété stable faible locale de x , c'est-à-dire la composante connexe de $W^s(x) \cap B(x, \varepsilon)$ contenant x (où $B(x, \varepsilon)$ est une boule pour une métrique adaptée à l'hyperbolicité de K). On définit de même $W_\varepsilon^{ss}(x)$, $W_\varepsilon^u(x)$ et $W_\varepsilon^{uu}(x)$.

D'autre part, nous allons utiliser les voisinages emboîtés suivant de K : pour tout $T \geq 0$, on note $M_T = \bigcap_{-T}^T X^t(M)$.

Remarques

1- L'égalité $K = \bigcap_{-\infty}^{\infty} X^t(M)$ et la compacité de M implique que, pour tout voisinage U de K , il existe T tel que $M_T \subset U$. Ainsi les voisinages M_T forment une base de voisinages compacts de K .

2- La frontière de M_T est inclus dans $X^T(\partial_1 M) \cup X^{-T}(\partial_2 M)$. En effet, la frontière de M_T est nécessairement dans l'adhérence de $\bigcup_{0 \leq t \leq T} X^t(\partial_1 M) \cup X^{-t}(\partial_2 M)$. D'autre part, comme X est transverse au bord de M et rentrant dans M le long de $\partial_1 M$, pour tout $t < T$, $X^t(\partial_1 M)$ est disjoint de $X^T(M)$. Et de façon similaire, pour tout $t < T$, $X^{-t}(\partial_2 M)$ est disjoint de $X^{-T}(M)$.

3- On en déduit que pour tout T , l'intersection de toute orbite de X avec M_T est connexe. En effet, si une orbite positive sort de M_T , elle sort par $X_{-T}(\partial_2 M)$ en un point x . Alors pour tout $t > 0$, $X^t(x)$ est dans $X_{-T+t}(\partial_2 M)$ qui n'est pas dans M_T . On traite de même le cas où c'est une orbite négative qui sort de M_T .

4- Pour tout T , $X^T(W^s(K) \cap \partial_1 M)$ et $X^{-T}(W^u(K) \cap \partial_2 M)$ sont inclus dans le bord de M_T . En effet, pour $x \in \partial_1 M$, le point $X^T(x)$ ne peut pas être dans l'intérieur de M_T , par définition de M_T . Par conséquent, soit $X^T(x)$ est dans le bord de M_T , soit l'orbite positive de x est sortie de M_T avant le temps T . Mais si x est aussi dans $W^s(K)$, son orbite ne positive ne peut pas sortir de M_T , sinon elle n'y reviendrait pas (point 3) et ne pourrait pas tendre vers K .

Lemme 1.9 *Soit M un voisinage filtrant de K . Pour tout réel strictement positif T , notons $M_T = \bigcap_{-T}^T X^t(M)$.*

Alors, pour tout ε , il existe T tel que $W^s(K) \cap M_T = W_\varepsilon^s(K) \cap M_T$.

Démonstration Remarquons qu'il suffit que M_T soit inclus dans la boule $B(K, \varepsilon)$ de rayon ε autour de K et que toute orbite qui en sorte ni revienne plus. Les premiers et troisième points de la remarque précédente permettent alors de conclure. \square

Lemme 1.10 *La variété stable de K induit sur le bord d'entrée de M une lamination \mathcal{L}^s de dimension 1 compacte.*

Démonstration Le fait que M soit un voisinage filtrant de K implique que l'ensemble $\bigcap_0^{+\infty} X^{-t}(M)$ est égale à $W^s(K) \cap M$ (car l'orbite positive de tout point de M dont l' α -limite n'est pas contenue dans K sort de M et n'y revient plus). On en déduit que $W^s(K) \cap M$ et, a fortiori, $W^s(K) \cap \partial_1 M$ est compact.

D'après [HPS], pour ε assez petit, la variété stable locale $W_\varepsilon^s(K)$ de K forme une lamination bidimensionnelle d'un voisinage $U \subset B(K, \varepsilon)$ de K .

Comme les M_T forment une base de voisinage de K , il existe T tel que M_T est inclus dans U . Ceci implique que $X^T(W^s(K) \cap \partial_1 M)$ est inclus dans U (point 4 de la remarque ci-dessus) et donc dans $W^s(K) \cap U$. De plus, $M_T \cap W^s(K) = M_T \cap W_\varepsilon^s(K)$: en effet, toute orbite qui sort de M_T n'y revient plus donc, si $x \in M_T \cap W^s(K)$, alors l'orbite positive de x ne sort jamais de M_T . Par conséquent, $X^T(W^s(K) \cap \partial_1 M)$ est inclus dans $U \cap W_\varepsilon^s(K)$.

On en déduit que $W^s(K) \cap \partial_1 M$ est l'image par X^{-T} de $X^T(\partial_1 M) \cap W_\varepsilon^s(K)$. Par ailleurs, $\partial_1 M$ est transverse au champ X . La surface compacte $X^T(\partial_1 M)$ est donc transverse à la lamination $W_\varepsilon^s(K)$. Par conséquent, $W^s(K)$ induit une lamination unidimensionnelle de $\partial_1 M$. \square

Nous allons maintenant avoir besoin de la notion de variété invariante *bord*, qui est fondamentale et sera réutilisée à plusieurs reprises dans les chapitres suivants. Remarquons qu'en dimension 3 chaque feuille de la variété instable d'un ensemble selle disconnecte localement la variété ambiante. On peut donc parler des deux côtés (locaux) d'une feuille de la lamination stable ou instable faible d'un ensemble selle (saturé).

Définition 1.11 *On dit qu'une feuille \mathcal{F} de $W^u(K)$ est bord si elle n'est accumulée par d'autres feuilles de $W^u(K)$ qu'au plus d'un seul côté. On qualifiera parfois une telle feuille de feuille u-bord. On a bien sûr une notion analogue de feuille s-bord.*

Remarquons qu'une feuille \mathcal{F} de $W^u(K)$ est bord si et seulement si il existe un segment σ transverse à \mathcal{F} , ayant une extrémité sur \mathcal{F} et d'intérieur disjoint de $W^u(K)$.

S. Newhouse et J. Palis ont prouvé le lemme suivant dans le cas des difféomorphismes des surfaces ([NePa]). Leur démonstration se transpose facilement au cas des flots en dimension 3 ; néanmoins comme ce lemme sera fondamental, nous en redonnons brièvement les arguments ci-dessous.

Lemme 1.12 (Newhouse, Palis) *Tout ensemble hyperbolique saturé d'un flot de Smale d'une variété compacte de dimension 3 orientable ne possède qu'un nombre fini de feuilles instables bords. De plus, ces feuilles sont toutes des variétés instables d'orbites périodiques.*

Remarques

— Selon qu'une feuille de $W^s(K)$ est la variété stable d'une orbite périodique ou non, elle est homéomorphe à un cylindre ou à un plan. Dans le premier cas, le flot induit alors sur ce cylindre un feuilletage avec une feuille fermée (l'orbite périodique) qui disconnecte le cylindre en deux composantes que nous appelons *séparatrices*. Ces séparatrices sont des cylindres feuilletés trivialement en droites par les orbites. Dans le second cas (feuille stable qui n'est pas la variété stable d'une orbite périodique), le feuilletage induit par le flot est un feuilletage trivial du plan en droites.

— La variété instable d'une orbite périodique est bord si et seulement si une des séparatrices stables de cette orbite est disjointe de K (en effet, toute orbite sur une séparatrice stable d'une orbite périodique u-bord spirale sur l'orbite périodique). . Nous dirons qu'une séparatrice disjointe de K est *libre*. Dans ce cas, l'intersection de cette séparatrice avec $\partial_1 M$ est une feuille compacte de la lamination \mathcal{L}^s (En effet, toute orbite sur cette séparatrice coupe transversalement $\partial_1 M$ en un et un seul point et l'espace des orbites sur cette séparatrice est un cercle).

Ide de la démonstration du lemme 1.12 Soit K un ensemble selle saturé d'un flot de Smale X . Rappelons que K admet une structure de produit local : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et tel que, si x et y sont dans une même boule B de diamètre δ , alors $W_\varepsilon^{uu}(x)$ coupe $W_\varepsilon^s(y)$ en un point et un seul (voir, par exemple, [Sm67]).

• Tout d'abord, on montre par l'absurde que l'ensemble des orbites périodiques s-bords de K est fini.

Dans le cas contraire, on aurait nécessairement une accumulation de telles orbites. On peut alors considérer trois orbites $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ et \mathcal{O}_3 périodiques s-bords de K coupant un même

ouvert de produit local U . Les orbites \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 et \mathcal{O}_3 étant périodiques, deux quelconques de ces orbites ne peuvent se situer ni sur une même feuille stable, ni sur une même feuille instable. Quitte à interchanger \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 et \mathcal{O}_3 , on a, dans U , le phénomène représenté à la figure 1.1, c'est à dire, les deux séparatrices instables de \mathcal{O}_2 intersectent les variétés stables de \mathcal{O}_1 ou \mathcal{O}_3 . Comme K est saturé, tout point d'intersection d'une séparatrice instable de \mathcal{O}_2 avec une séparatrice stable de \mathcal{O}_1 ou \mathcal{O}_3 est dans K . En particulier, aucune des séparatrices instable de \mathcal{O}_2 n'est libre, ce qui contredit la remarque ci-dessus et conduit à une absurdité.

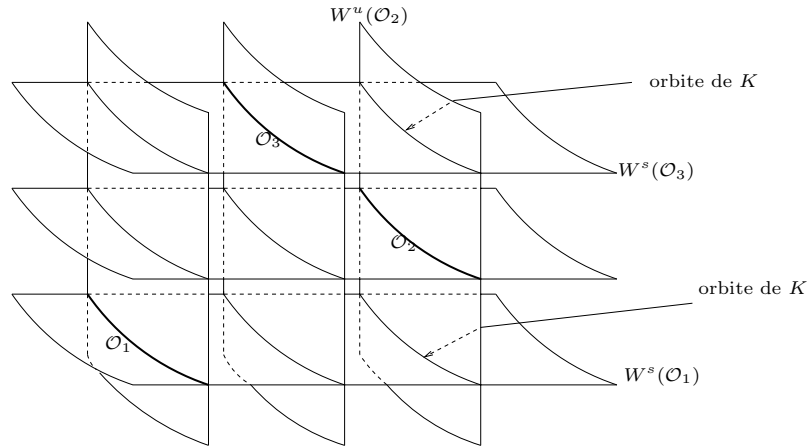


FIG. 1.1 – Trois orbites périodiques dans un voisinage à structure de produit local (la configuration n'est bien sûr toujours celle-là qu'à permutation de \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 , \mathcal{O}_3 près)

- On montre ensuite que, si \mathcal{O} est une orbite dont l'une des séparatrices instables est libre, alors \mathcal{O} est périodique.

En effet, pour un point quelconque x d'une orbite \mathcal{O} , on a une suite de temps $t_n \rightarrow +\infty$ tel que les $x_n \equiv X^{-t_n}(x)$ sont dans un voisinage de produit local U . Si \mathcal{O} a une séparatrice instable libre, le point précédent montre que les x_n sont alors situés dans au plus deux feuilles stables locales faibles. Quitte à extraire une sous-suite, les x_n sont dans une seule feuille stable locale faible. Mais une suite de points de la forme $X^{-t_n}(x)$ où $t_n \rightarrow +\infty$ ne peut rester dans une même feuille stable locale faible que si tout ces points se trouvent sur une orbite périodique, ce qui conclut.

- Enfin, on montre que toute feuille stable bord \mathcal{F} est la variété stable d'une orbite \mathcal{O} ayant une séparatrice instable libre.

En effet, soit \mathcal{F} une feuille s-bord et soit x un point de $\mathcal{F} \cap K$; il existe alors $\varepsilon > 0$ tel qu'une des séparatrices de $W_\varepsilon^{uu}(x)$ est disjointe de K (on appelle *séparatrice* de $W_\varepsilon^{uu}(x)$ les composantes de $W_\varepsilon^{uu}(x) \setminus \{x\}$). Par conséquent, si on a choisi ε assez petit, pour tout $t > 0$, $W_\varepsilon^{uu}(X^t(x)) \subset X^t(W_\varepsilon^{uu}(x))$ et l'une des deux composantes de $W_\varepsilon^{uu}(X^t(x))$ est donc disjointe de K .

Soit maintenant y un point de l' ω -limite de x . Si aucune des deux séparatrices de $W^{uu}(y)$ n'est disjointe de K , alors il existe $\tau > 0$ tel que chacune des deux séparatrices $W_{\frac{\delta}{2}}^{uu}(X^{-\tau}(y))$ intersecte K , disons en des points z_1 et z_2 . Hors, pour un certain $t_0 > 0$, les points $X^{t_0}(x)$ et $X^{-\tau}(y)$ distant de moins de $\frac{\delta}{2}$ et donc $X^{t_0}(x)$ et z_1 ainsi que $X^{t_0}(x)$ et

z_2 sont distant de moins de δ . Donc $W_\varepsilon^s(z_1)$ et $W_\varepsilon^s(z_2)$ coupent toute deux $W_\varepsilon^{uu}(X^{t_0}(x))$. Quitte à choisir δ petit par rapport à ε , les points d'intersections sont nécessairement dans chacune des deux séparatrices de $W_\varepsilon^{uu}(X^{t_0}(x))$. Comme K est saturé (et que z_1 et z_2 sont dans K), on en déduit que qu'aucune des deux séparatrices de $W_\varepsilon^{uu}(X^{t_0}(x))$ n'est disjointe de K , ce qui mène à une contradiction. Par conséquent, l'orbite \mathcal{O} a une séparatrice instable libre. \square

Lemme 1.13 *Toute feuille compacte de la lamination \mathcal{L}^s est l'intersection d'une séparatrice stable libre avec $\partial_1 M$. En particulier, \mathcal{L}^s ne possède qu'un nombre fini de feuilles compactes.*

Démonstration On a remarqué qu'une feuille de $W^s(K)$ qui ne contient pas d'orbite périodique est un plan trivialement feuilleté en droites par les orbites du flot. En particulier, une telle feuille de $W^s(K)$ ne contient pas de cercle transverse au champ.

Chaque feuille compacte de la lamination \mathcal{L}^s est donc une composante de l'intersection d'une des séparatrices de la variété stable d'une orbite périodique avec $\partial_1 M$. Puisque chaque séparatrice d'orbite périodique est un cylindre trivialement feuilleté en droites par les orbites, et puisque $\partial_1 M$ est transverse aux orbites, une telle composantes intersecte chaque orbite incluse dans la séparatrice. Ceci a deux implications :

— Chaque orbite n'intersectant $\partial_1 M$ qu'en au plus un seul point, il n'y a qu'une composante d'intersection entre une séparatrice de variété stable d'orbite périodique et $\partial_1 M$.

— Une telle séparatrice intersectant $\partial_1 M$ est disjointe de K (En effet, si il existait un point de K sur la séparatrice, l'orbite de ce point intersecterait $\partial_1 M$ ce qui est absurde) ; elle est donc libre.

Tout cercle dans \mathcal{L}^s est donc l'unique composante d'intersection d'une séparatrice stable d'une orbite périodique dont la variété stable est bord avec $\partial_1 M$. Il n'existe qu'un nombre fini de telles orbites et donc de telles séparatrices, ce qui conclut. \square

Lemme 1.14 *L'ensemble limite de toute demi-feuille de \mathcal{L}^s est exactement constitué d'une feuille compacte.*

(Il arrive que la lamination \mathcal{L}^s ne soit pas orientable, c'est pourquoi nous parlons simplement d'ensemble limite de demi-feuille plutôt que d' α et ω -limite.)

Remarque Si l'ensemble limite d'une demi-feuille d'une lamination d'une surface compacte contient un point d'une feuille compacte, alors il est égal à cette feuille compacte.

Démonstration Soit \mathcal{L} une feuille de \mathcal{L}^s , intersection de la variété stable d'un point x de K et de $\partial_1 M$ et soit y un point de \mathcal{L} . Notons γ le chemin disjoint de K , inclus dans $W^s(y) \cap M$, joignant y à un point x' de K , obtenu de la façon suivante : on suit l'orbite positive de y jusqu'à rencontrer un point y' appartenant à la variété stable locale de K , puis on suit le segment I de variété stable forte de y' jusqu'au premier point x' de K (voir figure 1.2).

La variété instable de x' est alors bord puisque le segment I de variété stable forte de x' est disjoint de $W^u(K)$. D'après le lemme déjà cité de Newhouse et Palis, cette feuille

— il existe une famille infinie de disques fermés de S deux-à-deux disjoints bordés par des cercles de Γ ,

— il existe une famille infinie de couronnes fermées dans S , deux-à-deux disjointes, chacune de ces couronnes étant bordée par deux cercles de Γ .

Démonstration Rappelons d'abord que pour toute surface compacte à bord il existe un entier N tel que, toute famille de N courbes fermées simples disjointes tracées sur cette surface possède deux courbes homotopes. On en déduit que la famille Γ possède une sous-famille infinie de courbes toutes homotopes entre-elles ; nous pouvons donc supposer que Γ possède déjà cette propriété. Quitte à se restreindre à une composante connexe de S contenant une sous-famille infinie de Γ , on peut supposer S connexe.

• Supposons d'abord que les courbes de Γ ne sont pas homotopes à zéro, et coupons la surface le long de l'une d'entre elles. On obtient ainsi une surface compacte à bord sur laquelle une sous famille infinie de Γ (que nous noterons encore Γ), est homotope à l'une des composantes γ_0 du bord. Cette famille est alors naturellement totalement ordonnée par l'inclusion des couronnes dont le bord est formé d'une de ses courbes et de γ_0 .

Il reste alors à remarquer qu'un ensemble E infini totalement ordonné contient une suite infinie croissante ou une suite infinie décroissante. Pour cela considérons $e_0 \in E$ tel que l'ensemble des points supérieurs à e_0 soit infini. Si cet ensemble n'est pas une suite décroissante, alors on peut choisir $e_1 > e_0$ tel que l'ensemble des points supérieurs à e_1 soit infini. On construit ainsi par récurrence la suite croissante, à moins que le procédé ne s'arrête...par une suite décroissante.

Les couronnes disjointes sont obtenues entre les courbes γ_{2i} et γ_{2i+1} de cette suite.

• Supposons désormais que les courbes de Γ sont toutes homotopes à zéro. Coupons la surface le long de l'une d'entre elles. Une des deux composantes obtenues contient une sous-famille infinie de Γ qui sont ou bien toutes homotopes à une composante du bord (auquel cas on est ramené au cas précédent), ou bien toutes homotopes à zéro. Cette surface n'étant pas la sphère chacune de ces courbes borde exactement un disque. Deux de ces disques ou bien sont disjoints ou bien l'un est inclus dans l'autre.

S'il existe une courbe γ_0 telle que l'ensemble des disques qui la contiennent est infini, alors ces disques sont totalement ordonnés par l'inclusion, et l'on achève de la même façon que le premier cas.

Sinon, pour toute courbe γ , l'ensemble des disques qui la contient est fini et notons $n(\gamma)$ son cardinal. Remarquons que les disques bordés par les courbes telles que $n(\gamma)$ ait une valeur donnée sont deux à deux disjoints : s'il existe n tel que l'ensemble des courbes γ telles que $n(\gamma) = n$ est infini, nous avons trouvé une famille infinie de disques disjoints. Sinon, on peut choisir par récurrence une suite γ_i telle que $n(\gamma_i) = i$, que le disque bordé par γ_{i+1} est inclus dans celui bordé par γ_i et contient une infinité de disques. On construit ainsi une suite de couronnes disjointes bordées par γ_{2i} et par γ_{2i+1} . \square

Lemme 1.16 *Toute famille de cercles plongés dans $\partial_1 M$, deux-à-deux disjoints, deux-à-deux non homotopes dans $\partial_1 M \setminus W^s(K)$ et dont aucun ne borde de disque dans $\partial_1 M \setminus W^s(K)$ est finie.*

Démonstration Supposons, au contraire, qu'il existe une famille $\{C_i\}$ infinie satisfaisant aux conditions du lemme 1.16. Chacun des disques et des couronnes donnés par

le lemme 1.15 doit rencontrer, par hypothèse sur la famille $\{C_i\}$, la lamination \mathcal{L}^s . Le lemme 1.14 montre alors que chacun de ces disques ou couronnes contient une feuille compacte de \mathcal{L}^s . Ces feuilles compactes étant en nombre fini (voir lemme 1.13), on obtient une contradiction. \square

En conséquence du lemme 1.16, nous pouvons choisir une famille $\{C_1, \dots, C_n\}$ maximale parmi les familles de cercles plongés dans $\partial_1 M$, deux-à-deux disjoints, deux-à-deux non homotopes dans $\partial_1 M \setminus W^s(K)$ et dont aucun ne borde de disque dans $\partial_1 M \setminus W^s(K)$. On peut, bien sûr, choisir les C_i différentiables.

En découpant $\partial_1 M$ le long des cercles C_i , on obtient une surface compacte avec $2n$ composantes de bords. Notons \tilde{S} la surface obtenue en collant un disque sur chacune de ces composantes de bord. Notons D_i^1 et D_i^2 les deux disques collés sur les composantes de bord correspondant à C_i . Les D_i^j sont des disques deux-à-deux disjoints.

De plus, les C_i étant tous disjoints de \mathcal{L}^s , la surface \tilde{S} est naturellement munie d'une lamination qu'on notera $\tilde{\mathcal{L}}^s$. Cette lamination est disjointe, par construction, de tous les disques D_i^j .

Lemme 1.17 *Tout cercle plongé dans \tilde{S} , et disjoint de $\tilde{\mathcal{L}}^s$, borde un disque disjoint de $\tilde{\mathcal{L}}^s$.*

Démonstration Soit \tilde{C} un tel cercle. Les disques D_i^j étant deux-à-deux disjoints et disjoints de la lamination $\tilde{\mathcal{L}}^s$, le cercle \tilde{C} est homotope dans $\tilde{S} \setminus \tilde{\mathcal{L}}^s$ à un cercle disjoint des D_i^j . Il correspond alors à un cercle C de $\partial_1 M$ disjoint de \mathcal{L}^s et disjoints des cercles C_i . La famille C_i étant maximale, on a une des deux situation suivantes :

— Soit C borde un disque dans $\partial_1 M \setminus \mathcal{L}^s$; ce disque est alors nécessairement disjoint des C_i (car C est disjoint des C_i et car les C_i ne sont pas homotopes à 0 dans $\partial_1 M \setminus \mathcal{L}^s$) et induit donc un disque sur \tilde{S} , bordé par \tilde{C} , et disjoint de $\tilde{\mathcal{L}}^s$.

— Soit il existe une couronne dans $\partial_1 M \setminus \mathcal{L}^s$ bordée par C et un des C_i ; cette couronne est alors disjointes des autres C_j (les C_j sont deux à deux non homotopes dans $\partial_1 M \setminus \mathcal{L}^s$). La réunion de cette couronne et d'un des disques D_i^1 ou D_i^2 induit alors un disque sur \tilde{S} , disjoint de $\tilde{\mathcal{L}}^s$, et bordé par \tilde{C} \square

Nous devons maintenant réaliser une chirurgie sur M munie de X , de manière à induire sur le bord d'entrée la chirurgie qui transforme $\partial_1 M$ en \tilde{S} . Nous avons pour cela besoin du lemme suivant que nous réutiliserons souvent dans la suite.

Lemme 1.18 *Soit N un voisinage filtrant d'un ensemble selle L d'un champ de Smale Y . Soit D un compact de $\partial_1 N$ disjoint de $W^s(L)$.*

L'orbite de D dans N est difféomorphe à $D \times [0,1]$ et le champ Y en restriction à cette orbite est équivalent au champ $\frac{\partial}{\partial t}$ où on a placé des coordonnées (x,t) sur $D \times [0,1]$.

Démonstration L'ensemble D est disjoint de $W^s(L)$ donc l'orbite de tout point de D coupe donc $\partial_2 N$ au bout d'un temps fini, strictement positif. Ce temps de sortie étant différentiable et D étant compact, on peut ramener le temps de sortie de tout point de D à 1, simplement en multipliant Y par une fonction différentiable strictement positive, ce qu'on appellera renormalisation de Y .

D'autre part, pour tout t_1 et t_2 distincts, et pour tous x_1 et x_2 dans D , on a $Y^{t_1}(x_1) \neq Y^{t_2}(x_2)$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $Y^{t_1-t_2}(x_1) = x_2 \in D \subset \partial_1 N$, ce qui contredit le fait que toute orbite coupe $\partial_1 N$ en un point et un seul (N est un voisinage filtrant).

L'application $(x,t) \mapsto \hat{Y}^t(x)$ (où \hat{Y} est la renormalisation du champ Y construite ci-dessus) réalise alors un difféomorphisme entre $D \times [0,1]$ et l'orbite de D dans N : c'est un difféomorphisme local, il est injectif grâce à la remarque précédente. Le champ $\frac{\partial}{\partial t}$ de $D \times [0,1]$ est envoyé par ce difféomorphisme sur le champ \hat{Y} . \square

Remarque Le lemme 1.18 a pour conséquence que, pour tout compact D de $\partial_1 N \setminus W^s(L)$ et tout difféomorphisme h de $\partial_1 N$ coïncidant avec l'identité hors de l'intérieur de D , on peut prolonger h en une équivalence topologique de (N,Y) vers lui-même. Cette équivalence est réalisée via le difféomorphisme, égal à l'identité sur le complémentaire de l'orbite de D , qui envoie $(x,t) \in \mathcal{O}(D) \simeq D \times [0,1]$ sur $(h(x),t) \in D \times [0,1]$.

Pour tout cercle C_i de la famille maximale choisie précédemment, l'orbite de C_i dans M est donc difféomorphe à $S^1 \times [0,1]$ via un difféomorphisme envoyant la restriction X sur $\frac{\partial}{\partial t}$ (quitte à multiplier X par une fonction différentiable strictement positive). Découpons M le long de ces cylindres. On obtient alors une variété de dimension 3 à bords et arêtes, possédant un bord d'entrée, un bord de sortie et $2n$ cylindres bords tangents allant du bord d'entrée au bord de sortie. Notons Γ_i^1 et Γ_i^2 les deux cylindres correspondants à l'orbite positive C_i .

Sur chaque cylindre Γ_i^j , on recolle le cylindre plein $D_i^j \times [0,1]$ muni du flot $\frac{\partial}{\partial t}$ via un difféomorphisme recollant les champs. Notons \tilde{M}^0 la variété à bord ainsi construite. C'est une variété munie par construction d'un champ \tilde{X} , transverse aux bords. Notons enfin \tilde{M} l'union des composantes connexes de \tilde{M}^0 contenant au moins un point du maximal invariant de \tilde{M}^0 .

Proposition 1.19 *Le couple (\tilde{M}, \tilde{X}) est un modèle de K .*

Démonstration Le maximal invariant \tilde{K} de \tilde{M} est par construction inclus dans \tilde{M}^0 privé de l'union des cylindres pleins $D_i^j \times [0,1]$, et la restriction de \tilde{X} à \tilde{M}^0 privée des $D_i^j \times [0,1]$ est égal (à renormalisation près) à la restriction de X à M privée de l'orbite des C_i . En particulier, le germe de \tilde{X} le long de \tilde{K} est égal au germe de X le long de K .

Le bord de \tilde{M} est, par construction, homéomorphe à la réunion de certaines composantes de \tilde{S} , via un homéomorphisme envoyant $W^s(\tilde{K}) \cap \partial_1 \tilde{M}$ sur $\tilde{\mathcal{L}}^s$. Par conséquent, tout cercle plongé sur $\partial_1 \tilde{M}$, disjoint de $W^s(\tilde{K})$ borde un disque sur $\partial_1 \tilde{M}$ disjoint de $W^s(\tilde{K})$.

Enfin, toute composante de \tilde{M} contient au moins un point de \tilde{K} car on a supposé que toute composante de M contient au moins un point de K . \square

Remarque Toute composante de $\partial_1 \tilde{M}$ rencontre $W^s(\tilde{K})$. En effet, s'il existait une composante S de $\partial_1 \tilde{M}$ disjointe de $W^s(\tilde{K})$, le saturé par le flot de S dans \tilde{M} serait une composante de \tilde{M} disjointe de \tilde{K} .

1.1.3 Unicité du modèle

On considère donc deux modèles (N, Y) et (O, Z) de (M, X) . On notera K_Y et K_Z leur maximaux invariants respectifs. On doit montrer que ces deux modèles sont globalement topologiquement équivalents.

Par hypothèse, il existe des voisinages U et V de K_Y et K_Z tels que les restrictions de Y et Z à U et V sont topologiquement équivalentes. On notera h un homéomorphisme réalisant cette équivalence. On voudrait étendre l'équivalence topologique aux saturés par les flots Y et Z de U et V . La difficulté essentielle sera que certaines orbites de Y ou Z peuvent entrer et sortir plusieurs fois des voisinages U et V .

Une autre difficulté est le fait que h soit une équivalence entre les restrictions de Y et Z au voisinages U et V n'implique pas, a priori, que $h(W^s(K_Y) \cap U) = W^s(K_Z) \cap V$.

Par contre, notons $W_U^s(K_Y)$ la variété stable locale de K_Y dans U , c'est à dire l'ensemble des points dont l'orbite positive ne sort pas de U (si U est assez petit, $W_U^s(K_Y)$ est inclus dans $W^s(K_Y)$) et définissons de même $W_V^s(K_Z)$; on a $h(W_U^s(K_Y)) = W_V^s(K_Z)$. (De même pour les variétés instables.)

Lemme 1.20 *Pour tout voisinage U_1 de K_Y suffisamment petit, on a $W_U^s(K_Y) \cap U_1 = W^s(K_Y) \cap U_1$. (De même pour la variété instable de K_Y et de même pour les variétés stables et instables de K_Z)*

Démonstration Remarquons d'abord que si un voisinage U_1 de K_Y possède la propriété requise, alors tout voisinage de K_Y inclus dans U_1 possède également cette propriété.

Il suffit alors de remarquer que tout voisinage $U_1 \subset U$ tel que toute orbite qui sort de U_1 n'y rentre plus convient. D'après les remarques de la page 49, le voisinage $N_T \equiv \bigcap_{-T}^T Y^t(N)$ vérifient ces propriétés pour T assez grand. \square

Corollaire 1.21 *Pour U_2 assez petit, on a $h(W^s(K_Y) \cap U_2) = W^s(K_Z) \cap h(U_2)$ et $h(W^u(K_Y) \cap U_2) = W^u(K_Z) \cap h(U_2)$.*

Démonstration tant donnés U_1 et V_1 (dont l'existence est montrée par le lemme 1.20) tels que $W_U^s(K_Y) \cap U_1 = W^s(K_Y) \cap U_1$, $W_U^s(K_Z) \cap V_1 = W^s(K_Z) \cap V_1$ et de même pour les variétés instables, il suffit de choisir U_2 tel que $U_2 \subset U_1$ et $h(U_2) \subset V_1$. \square

Lemme 1.22 *Il existe des voisinages compacts U' et V' de K_Y et K_Z tels que :*

*i) Les restrictions de Y et Z à U' et V' sont topologiquement équivalentes.
ii) L'intersection de toute orbite de Y dans N avec U' est connexe (donc est un intervalle de cette orbite). De même, l'intersection de toute orbite de Z dans O avec V' est connexe.*

iii) D'après le point précédent chaque orbite a au plus un point d'entrée et un point de sortie dans U' ou V' . Notons respectivement $\partial_1 U'$, $\partial_2 U'$, $\partial_1 V'$ et $\partial_2 V'$ les ensembles des points d'entrée et de sortie dans U' et V' . Alors ces quatre ensembles sont compacts.

Démonstration Choisissons maintenant T assez grand pour que $U_2 = N_T$ vérifie la propriété du corollaire 1.21. On pose $V_2 = h(U_2)$. On a donc $h(W^s(K_Y) \cap U_2) = W^s(K_Z) \cap V_2$ et $h(W^u(K_Y) \cap U_2) = W^u(K_Z) \cap V_2$.

D'après le point 3 de la remarque page 49, le bord de $U_2 = N_T$ est l'union des deux compacts $\partial_1 U_2 = U_2 \cap Y^T(\partial_1 N)$ et $\partial_2 U_2 = U_2 \cap Y^{-T}(\partial_2 N)$. Le flot entre dans U_2 par $\partial_1 U_2$ et en sort par $\partial_2 U_2$. L'intersection d'une orbite de Y dans N avec U_2 est connexe d'après les remarques du début de cette partie.

L'image V_2 de U_2 par h est un voisinage de K_Y dont le bord est constitué de $\partial_1 V_2 = h(\partial_1 U_2)$ et de $\partial_2 V_2 = h(\partial_2 U_2)$. Le flot entre dans V_2 par $\partial_1 V_2$ et en sort par $\partial_2 V_2$.

On sait que $\partial_1 U_2 \subset Y^T(\partial_1 N)$ est disjoint de $W^u(K_Y)$ et que, de même, $\partial_2 U_2$ est disjoint de $W^s(K_Y)$. Par conséquent, $\partial_1 V_2$ est disjoint de $W^u(K_Z)$ et $\partial_2 V_2$ est disjoint de $W^s(K_Z)$. L'orbite négative de tout point de $\partial_1 V_2$ sort par $\partial_1 O$. Par compacité de $\partial_1 V_2$, le temps de sortie est borné; soit alors $-T$ un minorant de ce temps de sortie.

De même, l'orbite positive de tout point de $\partial_2 V_2$ sort par $\partial_2 O$. Par compacité de $\partial_2 V_2$, le temps de sortie est borné; quitte à augmenter T , c'est un majorant de ce temps de sortie.

En remarquant le temps de sortie par $\partial_1 O$ des orbites négative tend vers $-\infty$ quand on s'approche de $W^u(K_Z)$, on montre qu'il existe un voisinage compact F de $W^u(K_Z) \cap \partial_2 V_2$ tel que le segment d'orbite négative de 0 à $-2T$ de tout point de F est disjoint de $\partial_1 O$. Ceci implique que l'orbite positive de tout point de F est disjointe de $\partial_1 V_2$ et donc de V_2 .

De même il existe un voisinage compact E de $W^s(K_Z) \cap \partial_1 V_2$ tel que l'orbite négative de tout point de E soit disjointe de $\partial_2 V_2$ et donc de V_2 .

On enlève de V_2 l'ensemble des points dont l'orbite positive dans V_2 sort de V_2 par $\partial_2 V_2 \setminus F$ et l'ensemble des points dont l'orbite négative dans V_2 sort par $\partial_1 V_2 \setminus E$. Notons V_3 l'ensemble ainsi obtenu.

Remarquons que V_3 est un voisinage de K_Z : en effet, F est un voisinage de $W^u(K_Z)$ dans $\partial_2 V_2$, donc l'orbite positive de tout point suffisamment proche de K_Z , si elle sort de V_2 , sort en fait de V_2 par F ; de même, l'orbite négative de tout point suffisamment proche de K_Z , si elle sort de V_2 , sort en fait de V_2 par E .

Pour montrer que V_3 est compact, il suffit de voir qu'on a ôté à V_2 des parties ouvertes: Soit x un point de V_2 dont l'orbite positive sort de V_2 mais pas par F . Soit un temps t tel que $Z^t(x)$ soit hors de V_2 et que le segment d'orbite entre x et $Z^t(x)$ ne rencontre pas F . Il existe un voisinage de x tel que pour tout point y dans ce voisinage, $Z^t(y)$ soit hors de V_2 et tel que le segment d'orbite entre y et $Z^t(y)$ soit disjoint de F . Ce voisinage de x est disjoint de V_3 . De même pour les points x dont l'orbite négative sort de V_2 mais pas par E .

Les bords d'entrée et de sortie de V_3 sont $\partial_1 V_3 = \partial_1 V_2 \cap V_3$ et $\partial_2 V_3 = \partial_2 V_2 \cap V_3$. Ce sont donc deux compacts.

Tout point de V_3 dont l'orbite positive sort de V_3 sort par F . Son orbite positive intersecte donc V_3 en un segment. De même pour l'orbite négative. Donc toute orbite de Z intersecte V_3 en un segment.

Notons alors $U_3 = h^{-1}(V_3)$. Toute orbite de Y intersecte U_3 en un segment et bien sûr, $\partial_1 U_3$ et $\partial_2 U_3$ sont compacts, ce qui conclut la démonstration en posant $U' = U_3$ et $V' = V_3$. \square

Lemme 1.23 *Soient U' et V' des voisinages compacts de K_Y et K_Z contenus dans les intérieurs de N et O et vérifiant les conditions i), ii) et iii) du lemme 1.22. On peut prolonger l'équivalence h aux saturés \hat{U} et \hat{V} des voisinages U' et V' par les flots de Y et Z .*

Démonstration Notons \hat{U} et \hat{V} les saturés respectivement par Y et Z de voisinages U' et V' donnés par le lemme 1.22. Le voisinage invariant \hat{U} se décompose en trois parties :

- le voisinage U' ,
- l'ensemble $\mathcal{O}^-(U')$ des points dont l'orbite positive coupe le bord d'entrée $\partial_1 U'$,
- l'ensemble $\mathcal{O}^+(U')$ des points dont l'orbite négative coupe le bord de sortie $\partial_2 U'$.

Comme l'intersection de toute orbite de Y avec U' est connexe, on a $U' \cap \mathcal{O}^-(U') = \partial_1 U'$, $U' \cap \mathcal{O}^+(U') = \partial_2 U'$ et $\mathcal{O}^-(U') \cap \mathcal{O}^+(U') = \partial_1 U' \cap \partial_2 U'$.

Par une démonstration analogue à celle du lemme 1.18, en utilisant l'existence et l'unicité du temps de sortie de l'orbite négative d'un point de $\mathcal{O}^-(U')$ par $\partial_1 N$, on montre que $\mathcal{O}^-(U')$ est homéomorphe au produit $\partial_1 U' \times [0,1]$ via un homéomorphisme envoyant la restriction de Y (à renormalisation près), sur le champ $\frac{\partial}{\partial t}$ (le temps de sortie est strictement positif car U' est inclus dans l'intérieur de N).

De même, $\mathcal{O}^+(U')$ muni de la restriction de Y est topologiquement équivalent à $(\partial_2 U' \times [0,1], \frac{\partial}{\partial t})$.

On peut de même définir $\mathcal{O}^-(V')$ et $\mathcal{O}^+(V')$. On a bien sûr les mêmes propriétés en remplaçant U' par V' . En particulier, $\mathcal{O}^-(V')$ est topologiquement équivalent à $\partial_1 V' \times [0,1]$ muni du champ $\frac{\partial}{\partial t}$. L'équivalence h se prolonge alors de $\mathcal{O}^-(U')$ en envoyant $(x,t) \in \partial_1 U' \times [0,1]$ sur $(h(x),t) \in \partial_1 V' \times [0,1]$. De même de $\mathcal{O}^+(U')$ dans $\mathcal{O}^+(V')$. \square

Nous aurons besoin dans la suite de la variante suivante du lemme 1.23 :

Lemme 1.24 *On suppose que l'on a deux voisinages compacts U' et V' de K_Y et K_Z inclus respectivement dans les intérieurs de N et O tels que :*

- l'intersection de toute orbite de Y dans N avec U' est connexe,
- l'intersection de toute orbite de Z dans O avec V' est connexe,
- il existe un homéomorphisme h de U' sur V' conjuguant Y et Z .

Alors h se prolonge en un homéomorphisme réalisant une équivalence topologique entre Y et Z définie sur les saturés de U' et V' par les flots de Y et Z .

Démonstration On multiplie Y par une fonction C^1 définie sur N , positive, égale à 1 sur U' et nulle exactement sur le bord de N . On note \tilde{Y} le champ obtenu. On note de même \tilde{Z} , le champ obtenu en multipliant Z par une fonction C^1 définie sur O , positive, égale à 1 sur V' et nulle exactement sur le bord de O . Les flots de \tilde{Y} et \tilde{Z} dans N et O sont complets.

Nous pouvons prolonger l'homéomorphisme de conjugaison h aux saturés de U' et V' par les flots de \tilde{Y} et \tilde{Z} : pour tout point x du saturé de U' , il existe un réel t et un point x' de U' tel que $x = \tilde{Y}^t(x')$; on définit alors naturellement \tilde{h} en x par $\tilde{h}(x) = \tilde{Z}^t(h(x'))$. Ceci ne dépend pas du couple (x',t) tel que $x = \tilde{Y}^t(x')$ choisi car h est une conjugaison et car l'intersection de toute orbite de Y donc de \tilde{Y} avec U' est connexe. Le prolongement de h ainsi défini envoie le saturé de U' pour la flot de \tilde{Y} sur le saturé de V' pour le flot de

\tilde{Z} . Ces saturés coïncident avec les saturés de U' et V' pour les flots de Y et Z intersectés avec $\text{int}(N)$ et $\text{int}(O)$.

Pour un point x du saturé de U' , l'orbite positive de x pour \tilde{Y} :

— soit coïncide avec l'orbite positive de x pour Y si cette dernière orbite positive ne sort pas de N ,

— soit tend vers l'unique point intersection de l'orbite positive de x pour Y avec $\partial_2 N$.

On a les propriétés analogue pour les orbites négatives de \tilde{Y} et Y (avec $\partial_1 N$) et pour les orbites positives et négatives de \tilde{Z} et Z .

On en déduit que \tilde{h} se prolonge par continuité en une équivalence topologique entre Y et Z définie sur les saturés dans N et O de U' et V' (pour les flots de Y et Z). \square

Remarque Notons $\partial_1 \hat{U}$ l'intersection du voisinage \hat{U} donné par le lemme 1.23 avec $\partial_1 N$. On peut choisir un voisinage A de $W^s(K_Y) \cap \partial_1 N$ inclus dans $\partial_1 \hat{U}$ tel que A soit une sous-surface compacte à bords de $\partial_1 N$ dont toute composante connexe contienne au moins un point de la lamination $W^s(K_Y) \cap \partial_1 N$. En considérant \hat{U} privé de l'orbite dans N du complémentaire de A dans $\partial_1 N$ et l'image par h de ce voisinage, on peut se ramener au cas où \hat{U} et \hat{V} sont des voisinages de K_Y et K_Z invariants dans N et O et dont les intersections avec $\partial_1 N$ et $\partial_1 O$ sont des surfaces compactes.

Le lemme suivant termine la démonstration du théorème 1.2.

Lemme 1.25 *Soient deux modèles (N, Y) et (O, Z) tels qu'il existe des voisinages \hat{U} et \hat{V} de K_Y et K_Z , invariants dans N et O , tels que que les restrictions de Y et Z à \hat{U} et \hat{V} sont équivalentes et tels que les intersections de \hat{U} et \hat{V} avec $\partial_1 N$ et $\partial_1 O$ sont des surfaces compactes dont toute composante connexe rencontre respectivement $W^s(K_Y)$ et $W^s(K_Z)$.*

Alors l'équivalence sur \hat{U} et \hat{V} de Y et Z se prolonge en une équivalence globale de N dans O .

Démonstration L'ensemble $\hat{U} \cap \partial_1 N$ est, par hypothèse, une sous-surface compacte à bord de $\partial_1 N$. Chaque composante du bord de cette surface borde, par définition d'un modèle, dans $\partial_1 N$ un disque disjoint de $W^s(K_Y)$ et un seul. L'intérieur de ce disque est disjoint de \hat{U} : ceci car toute composante de $\hat{U} \cap \partial_1 N$ est, a priori, soit incluse, soit disjointe de ce disque et car chaque composante contient un point de $W^s(K_Y)$. Ceci montre par ailleurs que les disques disjoints de $W^s(K_Y)$ bordés par les composantes de bord de $\hat{U} \cap \partial_1 N$ sont deux à deux disjoints.

Soit h un homéomorphisme réalisant l'équivalence entre les restrictions de Y et Z à \hat{U} et \hat{V} . Les composantes de bord de $\hat{V} \cap \partial_1 O$ bordent des disques deux à deux disjoints et disjoints de $W^s(K_Z)$ (pour la même raison que pour \hat{U} dans $\partial_1 N$). On obtient une équivalence globale en recollant l'équivalence réalisée par h de \tilde{U} sur \tilde{V} à une équivalence sur les cylindres pleins constitués par les orbites des disques de $\partial_1 N$ et $\partial_1 O$ complémentaire de \hat{U} et \hat{V} (donnée par le lemme 1.18). \square

Remarques

— Il n'existe bien qu'une seule façon de recoller des copies de $(D^2 \times [0, 1], \frac{\partial}{\partial t})$ sur des bords tangents disjoints des variétés invariantes. En effet, si on recolle un disque sur

chacune des composantes de bord d'une surface compacte à bord, cela de deux manières différentes, les résultats sont des surfaces difféomorphes via un difféomorphisme égal à l'identité hors d'un voisinage arbitrairement petit des cercles de recollement ; on conclut grâce à la remarque suivant 1.18.

— Nous avons défini le modèle en particulier par la propriété “tout cercle sur le bord d'entrée, disjoint de la variété stable borde un disque dans la face d'entrée, également disjoint de la variété stable”. Il aurait été équivalent d'utiliser la même propriété pour des cercles sur le bord de sortie disjoints de la variété instable.

En effet, tout cercle sur le bord de sortie, disjoint de la variété instable, se projette, par orbite négative en un cercle sur le bord d'entrée, disjoint de la variété stable. Si ce cercle borde un disque disjoint de la variété stable, il suffit de projeter ce dernier disque sur le bord de sortie via son orbite positive.

1.2 Type géométrique : présentation finie du modèle

Dans cette section, on définit une combinatoire décrivant les intersections des rectangles d'une partition de Markov avec leurs images : le type géométrique. On montre alors que deux ensembles selles saturés admettant des partitions de même type géométrique ont même germe et, par conséquent, ont des modèles topologiquement équivalents.

1.2.1 Type géométrique d'une partition de Markov

Pour un ensemble selle saturé K d'un champ X , Bowen a remarqué (voir [Bow]) qu'il existe une *section locale* au sens suivant : on appellera *section locale* d'un ensemble selle K simplement une surface Σ compacte, éventuellement à bords, non nécessairement connexe, transverse au champ, telle que toute orbite de K coupe Σ et telle que le bord de Σ soit disjoint de K .

L'application de premier retour sur une telle section locale n'est bien sûr que partiellement définie.

Remarque Rappelons que, si toute orbite de K rencontre Σ , alors toute orbite positive de K et toute orbite négative de K rencontre Σ .

Définition 1.26 Nous appellerons *rectangle* R un plongement h de classe C^1 de $I \times J$ dans une section locale de K , où I et J sont deux segments non triviaux de \mathbb{R} .

Cette définition correspond à la notion “géométrique” de rectangles, mais on fera attention qu'elle est assez différente de la notion habituelle de rectangle d'une partition de Markov (par exemple adoptée par Bowen).

Le *bord horizontal* de R (on dira aussi le *bord stable*) sera $\partial^s R = h(I \times \partial J)$ et son *bord vertical* (on dira aussi son *bord instable*) sera $\partial^u R = h(\partial I \times J)$.

Convention On supposera toujours un tel rectangle R muni de deux feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u de classe C^0 , à feuilles C^1 , triviaux, transverses l'un à l'autre, invariants par l'application

de premier retour sur Σ et tels que $\partial^s R$ soit constitué de deux feuilles de \mathcal{F}^s et $\partial^u R$ soit constitué de deux feuilles de \mathcal{F}^u .

Les feuilles de \mathcal{F}^s seront dites *horizontales* et celles de \mathcal{F}^u *verticales*.

Remarque En particulier, toute feuille de \mathcal{F}^s dans R est un segment qui joint les deux côtés instables de R et toute feuille de \mathcal{F}^u est un segment qui joint les deux côtés stables de R .

On appellera *sous-rectangle horizontal* de R tout rectangle H inclus dans R tel que $\partial^u H$ soit inclus dans $\partial^u R$ et tel que $\partial^s H$ soit constitué de deux feuilles du feuilletage \mathcal{F}^s de R . De même, on appellera *sous-rectangle vertical* de R tout rectangle V inclus dans R tel que $\partial^s V$ soit inclus dans $\partial^s R$ et tel que $\partial^u H$ soit constitué de deux feuilles du feuilletage \mathcal{F}^u de R .

On dira d'un rectangle que c'est un rectangle *ample* si ses côtés stables sont disjoints de $W^s(K)$ et si ses côtés instables sont disjoints de $W^u(K)$. En particulier, le bord d'un rectangle ample est disjoint de K .

tant donné une section locale Σ de K et un rectangle R dans Σ , on dira que le premier retour de R est *bien défini* si l'orbite positive de tout point de R recoupe Σ et si le premier retour des points se fait en temps continu (il suffit pour cela que le premier retour de R soit disjoint du bord de Σ). Un rectangle contenant un point de K et de diamètre suffisamment petit possède toujours cette propriété (car K est inclus dans l'intérieur de Σ).

Si R possède cette propriété, on peut renormaliser le champ (c'est-à-dire le multiplier par une fonction C^1 strictement positive) de façon à ce que l'application de premier retour, que l'on note f , coïncide avec le temps 1 du flot en restriction à R .

Définition 1.27 On appellera alors *cube associé au rectangle R* l'ensemble C constitué de l'union des segments d'orbites entre un point de R et son premier retour (c'est-à-dire, après la renormalisation décrite ci-dessus, $C = \bigcup_0^1 X^t(R)$).

Définition 1.28 On appellera *partition de Markov ample de K* la donnée d'une section locale Σ de K et d'une collection finie de rectangles disjoints (amples) R_1, \dots, R_n dans Σ tels que :

— $K \cap \Sigma$ soit recouvert par l'union des intérieurs des R_i , chaque rectangle R_i contient un point de K et K est le maximal invariant de l'union des cubes associés aux R_i ,

— Pour tous i , le premier retour de R_i sur Σ est bien défini; notons le $f(R_i)$.

— Pour tous i et j , l'intersection $f(R_i) \cap R_j$ a un nombre fini de composantes. Chacune de ces composantes est un à la fois un sous-rectangle horizontal de $f(R_i)$ et un sous-rectangle vertical de R_j . De plus, on exige que $\partial^u R_j$ soit disjoint de cette intersection ainsi que $\partial^s f(R_j)$. (voir figure 1.3)

— Il existe une métrique sur Σ telle que pour tout x appartenant à un R_i tel que $f(x)$ soit dans un R_j , tout vecteur tangent en x à \mathcal{F}^s soit contracté par f et tout vecteur tangent en x à \mathcal{F}^u soit dilaté par f .

Remarque L'adjectif *ample* traduit essentiellement le fait que $K \cap \Sigma$ est inclus dans l'intérieur des rectangles de la partition. au chapitre 3, on définira des partitions ajustées qui sont plus pratiques dans certaines situations. Dans ce chapitre, on n'utilise que des partitions amples et on oubliera parfois de le préciser.

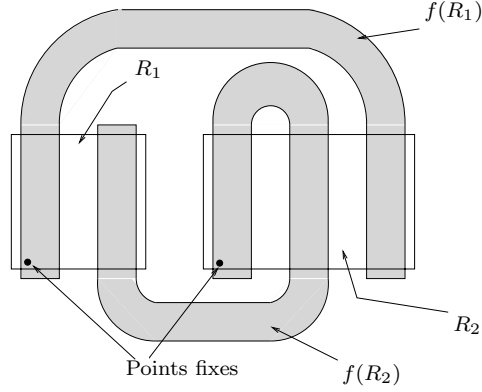


FIG. 1.3 – Une partition de Markov ample

Remarques

— Les propriétés de contraction et de dilatation exigées dans la définition impliquent que toute feuille de \mathcal{F}^s passant par un point de K est un segment de feuille de $W^s(K)$ et que toute feuille de \mathcal{F}^u passant par un point de K est un segment de feuille de $W^u(K)$. En particulier, si R_i est un rectangle d'une partition de Markov alors toute composante connexe d'intersection d'une feuille de $W^s(K)$ avec R_i est un segment joignant les deux côtés instables de R_i et toute composante connexe d'intersection d'une feuille de $W^u(K)$ avec R_i est un segment joignant les deux côtés stables de R_i .

— Pour tout point x d'un rectangle R , on note $W_R^s(x)$ la feuille du feuilletage \mathcal{F}^s de R contenant x . C'est aussi, d'après le point précédent de la remarque, la composante connexe de $W^s(x) \cap R$ contenant x . La propriété "toute composante connexe de $f(R_i) \cap R_j$ est à la fois un sous-rectangle horizontal de $f(R_i)$ et un sous-rectangle vertical de R_j " peut alors se traduire de la façon suivante: pour tout $x \in R_i$ tel que $f(x) \in R_j$, on a $f(W_{R_i}^s(x)) \subset W_{R_j}^s(x)$ et $f(W_{R_i}^u(x)) \supset W_{R_j}^u(x)$.

— Chaque composante C de $R \cap f(R)$ contient un point de K . En effet, C est alors à la fois un sous-rectangle horizontal de $f(R_i)$ et un sous-rectangle vertical de R_j pour un certain couple (i, j) . Mais R_i contient un point de K par hypothèse et tout sous-rectangle horizontal de $f(R_i)$ est donc traversé par une feuille de $W^u(K)$ et, de même, R_j contient un point de K par hypothèse et tout sous-rectangle vertical de R_j est donc traversé par une feuille de $W^s(K)$. Chaque composante de $R \cap f(R)$ contient donc un point de $W^s(K) \cap W^u(K) = K$.

Lemme 1.29 Soit \mathcal{R} une partition de Markov ample de K , alors l'union U des cubes associés aux rectangles de \mathcal{R} est un voisinage de K .

Démonstration Le résultat de ce lemme traduit l'intérêt, pour nous, de considérer des partitions amples. Notons $R = \cup_i R_i$; on sait que $K \cap \Sigma$ est inclus dans l'intérieur de R .

Pour tout point x de $K \setminus \Sigma$, appartient à un segment d'orbites d'extrémités dans Σ et d'intérieur disjoint de Σ . Notons x_0 l'origine de ce segment ; il appartient à l'intérieur de R . Le point x appartient alors à l'intérieur de $U = \cup_0^1 X^t(R)$. Si x est un point de $K \cap \Sigma$, alors x appartient à $\text{int}(R) \cap \text{int}(f(R))$. Un voisinage de x est obtenu par $\bigcup_0^\varepsilon X^t(R) \cup (\bigcup_{-\varepsilon}^0 X^t(f(R))) \subset U$. \square

Dans la suite, quand on considérera une partition de Markov $\mathcal{R} = \{R_i\}$, on sous-entendra la donnée de Σ sur laquelle sont tracés les R_i et telle que les premiers retours des R_i sur Σ soient bien définis.

En adaptant légèrement les résultats de la littérature ([Bow],[BiWi]) à notre définition, on obtient :

Proposition 1.30 *Il existe des partitions de Markov amples de K .*

Schma de démonstration

- Comme déjà dit, Bowen a prouvé qu'il existe une section locale Σ de tout ensemble selle K . La propriété de produit local se traduit dans $K \cap \Sigma$, comme suit : il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que, pour tous x et y dans $K \cap \Sigma$ distants de moins de δ , l'intersection $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^s(y) \cap \Sigma$ est constitué d'un point et d'un seul noté $[x,y]$.

Bowen définit alors un *rectangle* simplement comme un sous-ensemble R de $K \cap \Sigma$, de diamètre inférieur à δ et ayant une structure produit, c'est-à-dire, si x et y sont dans R alors $[x,y]$ est aussi dans R . Pour un rectangle R et un point x de R , on note alors $W_R^s(x) = W_\varepsilon^s(x) \cap R$.

Une partition de Markov d'un ensemble selle K est, dans ce cadre, un recouvrement de $K \cap \Sigma$ par des rectangles disjoint vérifiant :

$$\text{si } x \in R_i \text{ et } f(x) \in R_j, \text{ alors } f(W_{R_i}^s(x)) \subset W_{R_j}^s(x) \text{ et } f(W_{R_i}^u(x)) \supset W_{R_j}^u(x)$$

Bowen montre alors (par exemple, dans [Bow]) l'existence de telles partitions de Markov dont les rectangles ont un diamètre arbitrairement petit.

- La construction de Bowen est valable en toute dimension. Pour un flot en dimension 3, Birman et Williams ([BiWi], démonstration du lemme 2.3) en déduisent l'existence de partitions de Markov par des rectangles disjoints "géométriques", c'est-à-dire des plongement dans Σ de $I \times J$ où I et J sont des segments. Comme les partitions de Markov seront notre outil principal et comme la construction de Birman et Williams n'est pas très classique, nous reprenons ici cette construction.

Considérons une partition R_1, \dots, R_k au sens de Bowen. Quitte à prendre une partition de diamètre plus petit, on peut supposer que l'application de premier retour f sur Σ est bien définie sur un voisinage *connexe* de chaque R_i .

Pour tout point x de K , remarquons que $W_\varepsilon^s(x) \cap \Sigma$ est un (ou plusieurs) segments. On utilise cet ordre pour poser les définitions suivantes :

Soit R un sous-rectangle d'un R_j . L'ensemble stable $W_R^s(x)$ est *connexe pour l'ordre* si, pour tout point $c \in W_\varepsilon^s(x)$ situé entre deux points de a et b de $W_\varepsilon^s(x) \cap R$, alors c est aussi dans R . Remarquons que cette propriété ne dépend pas de x dans R de par la

structure produit de R . Un rectangle R est alors dit *cellulaire* si les ensembles $W_R^s(x)$ et $W_R^u(x)$ sont connexes pour l'ordre pour tout x dans R .

Remarque Il est important de remarquer que, puisque les rectangles de Bowen sont des produits cartésiens, si R est un sous-rectangle cellulaire maximal de R_j , alors ses ensembles stables $W_R^s(x)$ et instables $W_R^u(x)$ sont des segments connexes pour l'ordre maximaux dans $W_{R_j}^s(x)$.

On considère maintenant la collection R'_1, \dots, R'_n de tous les sous-rectangles cellulaires maximaux des rectangles R_1, \dots, R_k . Grâce à la remarque ci-dessus, ce sont des rectangles disjoints.

Par ailleurs, l'application f de retour sur Σ est un difféomorphisme local qui préserve donc la connexité et l'ordre sur les segments. Comme f est définie sur un voisinage connexe de chaque R'_i , si $x \in R'_i$ et $f(x) \in R'_k \subset R_j$, alors $f(W_{R'_i}^u(x))$ contient le connexe pour l'ordre maximal de $W_{R'_k}^u(f(x))$, donc contient $W_{R'_k}^u(x)$.

Les rectangles (toujours au sens de Bowen) R'_1, \dots, R'_n forment donc une nouvelle partition de Markov de K . L'avantage de cette partition est que, pour tout $x \in R'_k$, l'ensemble $W_{R'_k}^s(x)$ est l'intersection de K et d'un seul sous-segment de $W_\varepsilon^s(x) \cap \Sigma$.

Maintenant, il existe un voisinage U de $K \cap \Sigma$ dans Σ muni de deux feuilletages transverse \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u , invariants par f et tels que les vecteurs tangents aux feuilles de \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont respectivement uniformément contractés et uniformément dilatés par f (voir, par exemple, [PaTa, chapitre 2.3]). Ces feuilletages prolongent bien sûr les laminations $W^s(K) \cap \Sigma$ et $W^u(K) \cap \Sigma$. Quitte à changer la partition de départ R_1, \dots, R_k en une partition plus fine, on peut supposer que U contient un ouvert connexe autour de chaque R'_i et que les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u forment un bifeuilletage produit sur chacun de ces ouverts connexes.

On considère alors, pour tout i , “l'enveloppe convexe” pour les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u de R'_i . On note R''_i ce convexe; puisque R'_i est cellulaire, R''_i est un plongement dans Σ d'un produit de segments $I \times J$, feuilletés horizontalement par \mathcal{F}^s et verticalement par \mathcal{F}^u . Comme les rectangles R'_1, \dots, R'_n forment une partition au sens de Bowen, il vient facilement que toute composante connexe de $f(R''_i) \cap R''_j$ est à la fois un sous-rectangle vertical de R''_j et un sous-rectangle horizontal de $f(R''_i)$.

- Les rectangles R''_1, \dots, R''_n forment une partition de Markov selon la définition 1.28, à ceci près que rectangles R''_i ne sont pas des voisinages de $K \cap \Sigma$. En fait, les côtés de R''_i sont systématiquement des segments de $W_\varepsilon^s(K) \cap \Sigma$ et $W_\varepsilon^u(K) \cap \Sigma$.

Remarque Au chapitre 3, on dira que la collection des $\{R''_i\}$ est une partition *ajustée*.

Il nous suffit “d'augmenter” un peu les R''_i pour remédier à ce dernier problème :

Pour $\alpha > 0$ assez petit, et pour tout i , on considère le rectangle ample \tilde{R}_i , contenant R''_i et dont les côtés sont les segments de \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u situés à la distance α des côtés de R''_i . Il est important de prendre le même α pour tous les rectangles.

L'union des \tilde{R}_i forme bien sûr un voisinage de $K \cap \Sigma$ et, pour α assez petit, les différents \tilde{R}_i sont disjoints.

Les propriétés de contraction-dilatation des feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u par f impliquent qu'il existe $\lambda < 1$ tel que $f(\tilde{R}_i)$ est le rectangle ample contenant $f(R_i'')$ et dont les côtés sont les segments de \mathcal{F}^s situés à la distance $\frac{\alpha}{\lambda}$ des côtés stables de R_i'' et les segments de \mathcal{F}^u situés à la distance $\lambda\alpha$ des côtés instables de R_i'' . De ceci et du fait que toute composante connexe de $f(R_i'') \cap R_j''$ est à la fois un sous-rectangle vertical de R_j'' et un sous-rectangle horizontal de $f(R_i'')$, on déduit : que toute composante connexe de $f(\tilde{R}_i) \cap \tilde{R}_j$ est à la fois un sous-rectangle vertical de \tilde{R}_j et un sous-rectangle horizontal de $f(\tilde{R}_i)$ et que cette composante d'intersection est disjointe de $\partial^s \tilde{R}_j$ et de $\partial^u f(\tilde{R}_i)$ (voir la figure 1.4). On en déduit que la collection de rectangles $\{\tilde{R}_i\}$ forme une partition ample de K . \square

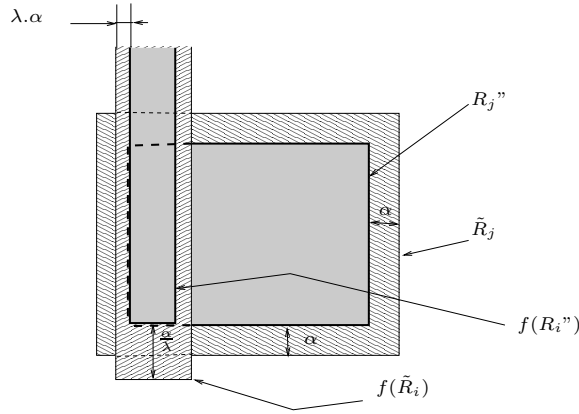


FIG. 1.4 – Si $\{R_i''\}$ est markovienne alors “l’augmentation” $\{\tilde{R}_i\}$ de cette collection de rectangle l’est aussi.

On ne va retenir d’une partition de Markov que la façon dont chaque $f(R_i)$ coupe les différents R_j , c’est à dire selon combien de sous-rectangles verticaux, lesquels, dans quel ordre et dans quels sens.

Définition 1.31 On appellera type géométrique abstrait la donnée de :

- Un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ deux entiers $h_i, v_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $\sum_i h_i = \sum_i v_i$
- Une application Φ de l’ensemble $\{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, h_i\}\}$ dans l’ensemble $\{k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, v_k\}\} \times \{-, +\}$, induisant une bijection par “oubli des signes”

On explique à présent comment associer un type géométrique à une partition de Markov : Par hypothèse, la variété \mathcal{M} est orientable. Tout rectangle est donc muni d’une orientation induite (une orientation directe du rectangle suivi de celle du flot est l’orientation ambiante). Le choix d’une orientation des verticales d’un rectangle induit alors une orientation des horizontales (l’orientation des horizontales suivies de celle des verticales donne l’orientation du rectangle).

Définition 1.32 Soit $\mathcal{R} = \{R_i\}$ une partition de Markov (ample) et un choix des orientations des horizontales et des verticales. Le type géométrique de \mathcal{R} est un type géométrique abstrait comme défini ci-dessus tel que :

- n est le nombre de rectangles de \mathcal{R}
- Pour tout $i \leq n$, h_i est le nombre de composantes connexes de l'intersection de $f(R_i)$ avec l'union des R_j . Ces composantes connexes sont, par définition d'une partition de Markov, l'image de sous-rectangles horizontaux de R_i . On notera $H_i^1 \cdots H_i^{h_i}$ ces sous-rectangles numérotés dans l'ordre induit par l'orientation des verticales de R_i .
- De même, pour tout $k \leq n$, v_k est le nombre de composantes connexes de l'intersection de R_k avec l'union des $f(R_j)$. On notera $V_k^1 \cdots V_k^{v_k}$ ces sous-rectangles verticaux de R_k numérotés dans l'ordre induit par l'orientation horizontales de ce rectangle.
- Chaque sous-rectangle horizontal H_i^j de R_i est envoyé par f sur un sous-rectangle vertical V_k^l de R_k . L'application Φ envoie alors (i,j) sur $((k,l),\varepsilon)$ où $\varepsilon = +1$ si l'orientation des verticales de $f(H_i^j)$ coïncide avec celle des verticales de V_k^l et $\varepsilon = -1$ sinon.

Exemples :

Le type géométrique du fer à cheval de Smale (partition 1 de la figure 8) est :

$$\begin{aligned} n &= 1, \\ h_1 &= v_1 = 2, \\ \Phi(1,1) &= ((1,1),+), \quad \Phi(1,2) = ((1,2),-). \end{aligned}$$

Le type géométrique de la partition de Markov de la figure 1.3 est :

$$\begin{aligned} n &= 2 \\ h_1 &= 2, \quad h_2 = 3, \quad v_1 = 2, \quad v_2 = 3, \\ \Phi(1,1) &= ((1,1),+), \quad \Phi(1,2) = ((2,3),-), \\ \Phi(2,1) &= ((2,1),+), \quad \Phi(2,2) = ((2,2),-), \quad \Phi(2,3) = ((1,2),+). \end{aligned}$$

Remarque A une collection de rectangles formant une partition de Markov n'est pas associé un type géométrique unique. Le type géométrique d'une partition de Markov dépend en effet du choix d'une indexation des rectangles et d'orientation des côtés de ces rectangles.

1.2.2 Le type géométrique caractérise le modèle

L'unicité du modèle d'un germe de champ de vecteurs le long d'un ensemble selle saturé (théorème 1.2) implique que le théorème 1.3 est une conséquence directe de la proposition suivante :

Proposition 1.33 *Soit K et L des ensemble selles saturés de champs X et Y . On suppose que K et L admettent des partitions de Markov amples \mathcal{R} et \mathcal{S} de même type géométrique.*

Alors il existe un homéomorphisme h de l'union des cubes associés à \mathcal{R} sur l'union des cubes associés à \mathcal{S} , conjuguant une renormalisation de X à une renormalisation de Y . En particulier, les germes de X et Y le long de K et L sont égaux.

De plus, l'image par h du rectangle feuilleté R_i de \mathcal{R} est le rectangle feuilleté S_i de \mathcal{S} , et h préserve les orientations des horizontales et des verticales de ces rectangles.

La notion d'application markovienne et le lemme 1.35 sont de légères adaptations d'une notion et d'un résultat de [BLJ].

Définition 1.34 On appellera application markovienne unidimensionnelle toute application g telle que :

- l'image de g est une union finie de segments I_1, \dots, I_n disjoints orientés,
- l'ensemble de définition de g est une union finie de sous-segments J_i^j ($1 \leq j \leq n_i$) des I_i disjoints deux à deux et disjoints des extrémités des I_i , indexés de façon compatible avec l'orientation des I_i ,
- g est un homéomorphisme de chaque J_i^j sur un des I_k ,
- le maximal invariant $\bigcap_{n=0}^{+\infty} g^{-n}(\cup_i I_i)$ est d'intérieur vide.

On définit le *type combinatoire* σ d'une telle application markovienne g dans le même esprit qu'a été défini le type géométrique : c'est une "bijection signée" qui à chaque couple (i, j) associe un couple (k, ε) où $g(J_i^j) = I_k$ et où $\varepsilon = \pm$ suivant que g est croissante ou décroissante sur J_i^j .

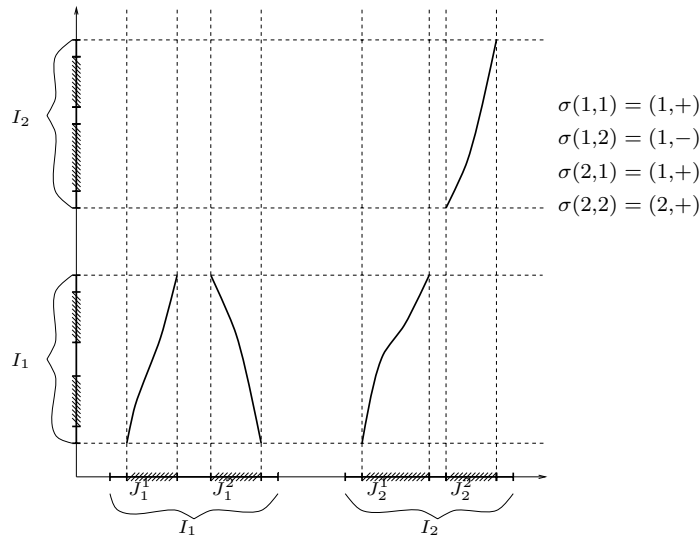


FIG. 1.5 – Un exemple de graphe d'application markovienne unidimensionnelle

Proposition 1.35 Soient g et g' deux application markoviennes. On note I_1, \dots, I_n et I'_1, \dots, I'_n les intervalles images de g et g' et J_i^j et $J'_i{}^j$ leurs intervalles de définition. On suppose que g et g' sont de même type.

Alors g et g' sont topologiquement conjuguées via un homéomorphisme envoyant l'intervalle orienté I_i sur l'intervalle orienté I'_i .

Démonstration On notera $\mathcal{I} = \cup_i I_i$, $\mathcal{I}' = \cup_i I'_i$, $\mathcal{J} = \cup_{i,j} J_i^j$ et $\mathcal{J}' = \cup_{i,j} J'_i{}^j$.

Pour tout i , $I_i \setminus \mathcal{J}$ et $I'_i \setminus \mathcal{J}'$ ont même nombre de composantes, qui sont toutes des intervalles. Chaque intervalle de $I_i \setminus \mathcal{J}$ est de même nature que l'intervalle ayant la même position dans $I'_i \setminus \mathcal{J}'$ (en fait, les intervalles de $I_i \setminus \mathcal{J}$ sont tous ouverts sauf le premier J_i^0 et le dernier $J_i^{n_i}$ qui sont semi-ouverts).

On peut donc choisir un homéomorphisme croissant de $I_i \setminus \mathcal{J}$ sur $I'_i \setminus \mathcal{J}'$. Notons h_0 l'homéomorphisme défini de $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ dans $\mathcal{I}' \setminus \mathcal{J}'$ ainsi obtenu.

On note $\mathcal{O}_0 = \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ et on remarque que $g^{-1}(\mathcal{O}_0)$ est disjoint de \mathcal{O}_0 et donc que les $g^{-i}(\mathcal{O}_0)$ sont deux à deux disjoints. Pour chaque i , $g^{-i}(\mathcal{O}_0)$ est une union d'intervalles, ouverts ou semi-ouverts. Les extrémités fermées des intervalles semi-ouverts se recollent sur des extrémités ouvertes d'intervalles de $g^{-(i-1)}(\mathcal{O}_0)$. On note $\mathcal{O}_k = \bigcup_0^k g^{-i}(\mathcal{O}_0) = \mathcal{O}_0 \sqcup g^{-1}(\mathcal{O}_{k-1})$ et on construit une conjugaison entre g et g' sur chaque \mathcal{O}_k par récurrence sur k .

L'homéomorphisme h_0 a été fixé. Supposons donc h_{k-1} construit et soit alors x dans \mathcal{O}_k .

- Si x est dans $\mathcal{O}_0 = \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ alors on pose $h_k(x) = h_0(x)$.
- Sinon $g(x)$ est dans \mathcal{O}_{k-1} et x est dans un des J_i^j . Comme g et g' ont même type, si $I_k = g(J_i^j)$, alors g' induit un homéomorphisme de $J_i^{j'}$ dans I'_k . Soit donc $h_k(x)$ le seul point de $J_i^{j'}$ tel que $g'(x) = h_{k-1}(g(x))$.

Par construction, h_k est un homéomorphisme sur chaque sous-intervalle de \mathcal{O}_k . Il est croissant par récurrence, les J_i^j et les $J_i^{j'}$ étant ordonnés de la même façon et les restrictions de g et g' à ces sous-intervalles étant simultanément croissantes ou décroissantes. Ces deux propriétés montrent par ailleurs que h_k est continu aux extrémités des intervalles semi-ouverts de $g^{-i}(\mathcal{O}_0)$: une bijection croissante d'une union d'intervalles est continue.

Par hypothèse, $\bigcap_0^\infty g^{-n}(\mathcal{J})$ est d'intérieur vide, c'est à dire que \mathcal{O}_∞ est dense dans \mathcal{I} . Comme toute bijection croissante d'une partie dense d'un intervalle dans une partie dense d'un intervalle se prolonge par continuité en un homéomorphisme entre les intervalles, h_∞ se prolonge en un homéomorphisme h de \mathcal{I} sur \mathcal{I}' conjuguant g à g' . \square

Démonstration de la proposition 1.33 Considérons donc deux transversales Σ et $\tilde{\Sigma}$ de K et L contenant deux partitions de Markov $\mathcal{R} = \{R_i\}$ et $\mathcal{S} = \{S_i\}$ de K et L de même type géométrique. On notera $R = \cup_i R_i$ et $S = \cup_i S_i$.

Notons \hat{X}^t et \hat{Y}^t les temps t des flots de renormalisations de X et Y faites de façon à ce que les temps de retour des points de \mathcal{R} et \mathcal{S} sur Σ et $\tilde{\Sigma}$ soient tous égaux à 1. On notera φ et ψ les applications de premier retour sur Σ et $\tilde{\Sigma}$ restreintes respectivement à l'ensemble des points de R dont le premier retour sur Σ est dans R et à l'ensemble des points de S dont le premier retour sur Σ est dans S .

On notera U et V l'union des cubes associés aux rectangles de \mathcal{R} et \mathcal{S} . Enfin, on note \mathcal{F}^s , \mathcal{F}^u , $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ les feuilletages stables et instables dont sont munis R et S .

En quotientant R par \mathcal{F}^s , on obtient un espace homéomorphe à une union de segments disjoints et par passage au quotient de φ une application markovienne unidimensionnelle φ^u définis sur cette union de segments.

On obtient par le même passage au quotient pour ψ une application markovienne ψ^u de même type combinatoire que φ^u (car \mathcal{R} et \mathcal{S} ont même type géométrique). D'après la proposition 1.35, les applications markoviennes, φ^u et ψ^u sont donc conjuguées via un homéomorphisme h^u .

En considérant cette fois, φ^{-1} et ψ^{-1} , et en quotientant par les feuilletages instables, on obtient également des applications markoviennes unidimensionnelles φ^s et ψ^s conjuguées via un homéomorphisme h^s .

Les feuilletages \mathcal{F}^s , \mathcal{F}^u , $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ construisent des coordonnées globales sur R et S . On peut donc définir h de R dans S comme l'application associant à x de coordonnées x_s et x_u l'unique point y de coordonnées $h^s(x_s)$ et $h^u(x_u)$. Alors h est un homéomorphisme.

De plus, notons H_i^j et V_k^l les sous-rectangles horizontaux et verticaux fondamentaux de \mathcal{R} et \tilde{H}_i^j et \tilde{V}_k^l les sous-rectangles horizontaux et verticaux fondamentaux de \mathcal{S} . Les propriétés des conjugantes h^s et h^u construites à la proposition précédente impliquent que, pour tous i, j, k, l , l'homéomorphisme h envoie H_i^j sur \tilde{H}_i^j et V_k^l sur \tilde{V}_k^l .

Il reste à montrer que h conjugue φ à ψ . Pour tous i et j et pour tout x de H_i^j , on doit donc montrer que $h(\varphi(x)) = \psi(h(x))$. On note $y = \varphi(x)$ et on note k, l les entiers tels que $y \in V_k^l$.

D'une part, comme h^u est conjugué φ^u à ψ^u , les points $h(\varphi(x))$ et $\psi(h(x))$ sont sur une même feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$.

D'autre part, comme h^s conjugue φ^s à ψ^s , les points $\psi^{-1}(h(y))$ et $h(\varphi^{-1}(y))$ sont sur une même feuille v de $\tilde{\mathcal{F}}^u$, c'est-à-dire les points $\psi^{-1}(h(\varphi(x)))$ et $h(x)$ sont sur une même feuille v de $\tilde{\mathcal{F}}^u$. *A priori*, $\psi(v)$ peut contenir plus d'une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^u$. Cependant, les points $h(\varphi(x))$ et $\psi(h(x))$ sont tout deux dans \tilde{V}_k^l et $\psi(v)$ ne contient qu'une seule feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ dans \tilde{V}_k^l . Donc les points $h(\varphi(x))$ et $\psi(h(x))$ sont sur une même feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^u$.

Comme $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ forment des coordonnées globales sur S , on en déduit que les points $h(\varphi(x))$ et $\psi(h(x))$ sont égaux, et, par suite, h conjugue φ à ψ .

La conjugaison entre φ et ψ implique que l'on peut définir l'application continue $H : U \rightarrow V$ qui à tout point $\hat{X}^t(x)$, $x \in R$, $t \in [0, 1]$ associe $\hat{Y}^t(h(x))$. Cette application est un homéomorphisme qui réalise une conjugaison entre les flots (renormalisés) \hat{X}^t et \hat{Y}^t .

Pour achever la preuve de la proposition, il nous suffit de rappeler que les cubes associés à une partition de Markov ample de K forment un voisinage de K (lemme 1.29). \square

1.2.3 équivalences du modèle et partitions de Markov

La proposition 1.33 et le théorème 1.2 impliquent que deux modèles dont les maximaux invariants admettent des partitions de Markov \mathcal{R} et \mathcal{S} de même type géométrique sont globalement topologiquement équivalent via un homéomorphisme h . Cependant, rien n'indique que l'on peut choisir h de façon à ce que l'image de la partition \mathcal{R} soit la partition \mathcal{S} (car le lemme 1.22 utilisé pour montrer 1.2 réduit les voisinages sur lesquels on a l'équivalence a priori). Ceci est d'ailleurs a priori impossible sans hypothèse supplémentaire sur les partitions \mathcal{R} et \mathcal{S} . Nous allons montrer qu'une hypothèse supplémentaire convenable est que l'intersection de toute orbite avec l'union des cubes associés aux rectangles de \mathcal{R} soit connexe. Plus précisément, nous allons montrer les deux propositions suivantes :

Proposition 1.36 *Soit X un champ de Smale et M un voisinage filtrant d'un ensemble selle saturé K de X . Il existe des partitions de Markov (amples) de K dont l'union des cubes est incluse dans l'intérieur de M et tel que l'intersection de toute orbite de X dans M avec l'union des cubes est connexe.*

Remarque La propriété "l'intersection des cubes avec de toute orbite de X dans M est connexe" est en fait indépendante du choix du voisinage isolant M . En effet, M étant un voisinage isolant, toute orbite qui en sort n'y revient plus.

Définition 1.37 *Une partition de Markov \mathcal{R} telle que l'intersection de l'union des cubes associés à R avec toute orbite du flot est connexe sera dite essentielle.*

Proposition 1.38 *Soient deux modèles (N, Y, K_Y) et (O, Z, K_Z) tels que K_Y et K_Z possèdent dans N et O des partitions \mathcal{R} et \mathcal{S} amples essentielles et de même type géométrique.*

Alors toute conjugaison entre des renormalisations de Y et Z définie de l'union des cubes de \mathcal{R} dans l'union des cubes de \mathcal{S} se prolonge en une équivalence topologique entre (N, Y, K_Y) et (O, Z, K_Z) .

Remarque Il existe des partitions de K non essentielles dans \mathcal{M} et il existe des partitions de K qui ne sont incluses dans aucun voisinage filtrant de K .

Caractériser le germe d'un ensemble selle K par le type géométrique d'une partition essentielle n'est *a priori* "moralement" pas très satisfaisant : on caractérise une dynamique locale autour de K par un objet dont la définition demande d'aller voir ce qui se passe loin de K (pour tester si l'intersection des cubes avec toute orbite est connexe, il faut suivre les orbites dans toute la variété).

Cependant, nous montrerons au chapitre 2, corollaire 2.2 que, si T est le type géométrique T d'une partition de K dans \mathcal{M} , il existe une partition essentielle de K dans le modèle de $[X, K]$ de type géométrique T . Tant qu'on reste dans un modèle, on peut donc ne pas avoir de scrupule à demander à un type géométrique d'être celui d'une partition essentielle.

Démonstration de la proposition 1.36 On considère d'abord une partition $\mathcal{R} = \{R_i\}$ de K dans l'intérieur de M (il en existe car il existe des partitions n'ayant que des rectangles de diamètre aussi petit que l'on veut). Rappelons que les rectangles de \mathcal{R} sont dessinés sur une section locale de K que nous noterons Σ et notons f l'application de premier retour sur Σ . On notera également R l'union des R_i .

Nous appellerons *raffinement* de la partition \mathcal{R} une partition de K dont les rectangles sont des sous-rectangles des rectangles de \mathcal{R} (c'est-à-dire sont inclus dans les R_i avec des bords inclus dans les feuilles des feuilletages horizontaux et verticaux des R_i). On remarque que les prototypes de raffinement de \mathcal{R} sont les partitions dont les rectangles sont les composantes connexes de $\bigcap_{-P}^N f^n(R)$ pour P et N entier fixés.

Lemme 1.39 *Il existe un raffinement \mathcal{R}' de \mathcal{R} et un temps $T \geq 0$ tel que pour tout point x de $f(R') \setminus R'$, $X^T(x)$ est hors de M .*

Démonstration Grâce aux propriétés des voisinages filtrants, il suffit de montrer qu'on a un raffinement \mathcal{R}' tel que $\text{adh}(f(R') \setminus R')$ soit disjoint de $W^s(K)$. En effet, l'orbite positive de tout point de $\text{adh}(f(R') \setminus R')$ sortira alors de M en temps fini (ce temps étant continu par rapport au point) ; par compacité de $\text{adh}(f(R') \setminus R')$ on obtiendra la propriété demandée par le lemme.

Notons C l'union des cubes associés à \mathcal{R} . Nous avons construit (voir lemme 1.20) un voisinage U de K tel que $W_C^s(K) \cap U = W^s(K) \cap U$.

Soit \mathcal{R}' un raffinement de \mathcal{R} tel que l'union des cubes associés à \mathcal{R}' soit incluse dans U . L'ensemble $\text{adh}(f(R') \setminus R')$ est une union de sous-rectangles horizontaux de $f(R')$ disjointe de K . Chaque composante de $f(R')$ est un rectangle contenant un point de K qui est donc traversé de bas en haut par une feuille de \mathcal{F}^u qui est dans $W^u(K)$. Chaque composante de $\text{adh}(f(R') \setminus R')$ est donc traversée par une feuille de \mathcal{F}^u qui est dans $W^u(K)$.

Toute feuille de $W^s(K)$ qui rencontrerait une composante de $\text{adh}(f(R') \setminus R')$ contiendrait une feuille entière de \mathcal{F}^s qui intersecterait toute feuille de \mathcal{F}^u de cette composante. Ceci est impossible puisque $\text{adh}(f(R') \setminus R')$ est disjoint de K et $K = W^s(K) \cap W^u(K)$. \square

Remarque Dans le cas d'un voisinage filtrant intrinsèque (voir la remarque suivant 1.5), la même démonstration prouve "Il existe un raffinement \mathcal{R}' de \mathcal{R} et un temps T tel que pour tout point x de $f(R') \setminus R'$, $X^T(x)$ n'est plus défini".

On considère un raffinement \mathcal{R}' et un temps T donné par le lemme précédent. Considérons le raffinement \mathcal{R}'' de \mathcal{R}' dont les rectangles sont les composantes connexes de $R'' = \bigcap_{-T}^0 f^n(R')$.

Lemme 1.40 *Pour tout point x appartenant à $f(R'') \setminus R''$ et tout temps t strictement positif, $X^t(x)$ n'est pas dans R'' .*

Démonstration Le point x est dans $f(R'') \setminus R''$ donc $f^{T-1}(x)$ est défini et est dans R' , mais $f^T(x)$ n'est pas dans R' . Si il existait un temps $i \leq T$ (entier via la renormalisation habituelle puisque $f^T(x)$ est défini) tel que $X^i(x)$ soit dans R'' alors pour tout j tel que $i \leq j \leq i + T$, $f^j(x)$ serait défini et appartiendrait à R' . En particulier, $f^T(x)$ serait dans R' , ce qui est impossible.

Remarquons que $y = f^T(x)$ est dans $f(R') \setminus R'$. Par définition de R' et de T , pour tout $t \geq T$, $X^t(y)$ n'est pas dans M et donc, a fortiori, n'est pas dans R' . Par conséquent, comme $X^t(y) = X^T(X^t(x))$, pour tout $t \geq T$, $X^t(x)$ n'est pas dans R'' (car, si z est dans R'' , alors, par définition de R'' , $X^T(z) = f^T(z)$ est dans R'). \square

(Fin de la démonstration de la proposition 1.36) Le lemme précédent montre que toute orbite positive qui sort des cubes de \mathcal{R}'' n'y rentre plus. Supposons que l'orbite négative d'un point x sorte des cubes de \mathcal{R}'' en un point y puis y rentre à nouveau en un point z . Alors l'orbite positive de z sortirait des cubes puis y rentrerait à nouveau en y . On obtient une contradiction. La partition \mathcal{R}'' est donc essentielle. \square

Démonstration de la proposition 1.38 Le lemme 1.24 prouve que toute conjugaison entre des renormalisations de Y et Z définie de l'union des cubes de \mathcal{R} dans l'union des

cubes de \mathcal{S} se prolonge en une équivalence topologique définie sur les saturés dans N et O des partitions \mathcal{R} et \mathcal{S} .

D'après le lemme 1.25, il suffit donc de prouver que les intersections de ces saturés avec les bords de N et O sont des surfaces compactes à bord, ce que fait le lemme ci-dessous. \square

Lemme 1.41 *Soit M un voisinage filtrant d'un ensemble selle K d'un champ X et $\mathcal{R} = \{R_i\}$ une partition ample essentielle de K . Alors l'intersection Σ^u du saturé de \mathcal{R} avec $\partial_2 M$ est une surface compacte à bord.*

Démonstration Rappelons que les rectangles de \mathcal{R} sont dessinés sur une section locale de K que nous noterons Σ et notons f l'application de premier retour sur Σ . On notera également R l'union des R_i .

Par définition d'une partition de Markov, $f(R) \cap R$ est constituée d'un nombre fini de sous-rectangles horizontaux (compacts) de $f(R)$, donc $f(R) \setminus R$ est une union finie de sous-rectangles "semi-ouverts" disjoints de $f(R)$ (c'est-à-dire de sous-rectangle privé d'un ou plusieurs de leurs côtés) : notons A_j ces composantes.

Puisque la partition \mathcal{R} est supposée essentielle, l'orbite positive de tout point d'un A_j est disjointe de R donc :

- coupe $\partial_2 M$ (en un et un seul point),
- est disjointe de l'orbite des autres A_i .

Notons B_j l'ensemble des points de sortie sur $\partial_2 M$ des points de A_j . L'intersection du saturé des R_i avec $\partial_2 M$ est égal à l'union des B_j . On en est réduit à montrer que l'union Σ^u des B_j forme une surface à bord.

Notons \bar{A}_j l'adhérence de A_j . L'image par f d'un côtés de \bar{A}_j appartenant à $\bar{A}_j \setminus A_j$ est incluse dans l'un des côtés stables d'un R_i donc d'un A_k . L'orbite positive de tout segment côté de \bar{A}_j appartenant à $\bar{A}_j \setminus A_j$ vient donc, au bout d'un temps 1, s'insérer dans l'orbite positive d'un côté d'un A_k .

L'union des B_j est donc homéomorphe à l'ensemble obtenu en recollant les rectangles compacts disjoints \bar{A}_j par l'homéomorphisme, induit par f , recollant l'union des côtés $\bar{A}_j \setminus A_j$ sur des segments du bord stable des A_j . Comme on sait de plus que l'union des B_j est incluse dans une surface compacte, une telle union de rectangles recollés par certains de leurs côtés est nécessairement une surface compacte (voir figure 1.6). \square

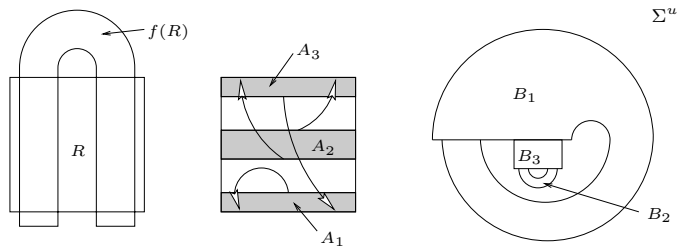


FIG. 1.6 – L'intersection Σ^u du saturé par les orbites du flot de l'union des rectangles d'une partition ample essentielle avec le bord de sortie d'un voisinage filtrant

Nous utiliserons à nouveau dans les sections et chapitres suivants l'intersection du saturé par le flot de l'union des rectangles d'une partition essentielle avec le bord de sortie d'un voisinage filtrant. On notera Σ^u cette intersection dont on vient de montré qu'elle est une surface compacte à bord. Nous avons en fait montré un procédé de reconstruction de Σ^u qu'énonce le lemme suivant :

Lemme 1.42 *Soit Σ^u surface de sortie associée à une partition de Markov ample essentielle \mathcal{R} . Notons R l'union des rectangles de \mathcal{R} , notons $A \equiv R \setminus f^{-1}(R)$ et \bar{A} l'adhérence de A .*

Alors \bar{A} est une union de sous-rectangles horizontaux de \mathcal{R} et $\bar{A} \setminus A$ est constitué de côtés horizontaux de ces sous-rectangles.

De plus, la surface Σ^u est homéomorphe à l'ensemble obtenu en considérant \bar{A} et en recollant, par f , les côtés horizontaux de \bar{A} qui ne sont pas dans A sur les côtés horizontaux de \bar{A} qui sont dans A .

Appendice : partitions de Markov essentielles

Nous avons vu l'existence et l'intérêt des partitions de Markov essentielles d'un ensemble selle saturé. Le but de cet appendice est d'en éclaircir la définition. Plus précisément, une partition \mathcal{R} est la donnée d'une section Σ et d'une collections de rectangles dans Σ . C'est à la fois les rectangles et Σ qui définissent les cubes associés à \mathcal{R} . On veut montrer que le fait que \mathcal{R} soit essentielle ne dépend en fait pas de Σ .

Notons R l'union des rectangles d'une partition ample $\mathcal{R} = \{\Sigma, \{R_i\}\}$. La partition \mathcal{R} est essentielle signifie que l'orbite positive de tout point de $f(R) \setminus R$ ne revient jamais couper R .

Notons P l'application de premier retour partiellement définie de R sur R . Rappelons qu'on note f l'application de premier retour (définie en tout point) de R sur Σ . Bien sûr $f^{-1}(R) \cap R$ est inclus dans le domaine de définition $\text{Dom}(P)$ de P .

Remarque La partition $\mathcal{R} = \{\Sigma, \{R_i\}\}$ est essentielle si et seulement si le domaine de définition $\text{Dom}(P)$ est égal à $f^{-1}(R) \cap R$. En effet, la partition est essentielle si et seulement si il n'existe pas d'orbite dont l'intersection avec les cubes est disconnexe ; c'est-à-dire s'il n'existe aucun segment d'orbite d'intérieur disjoint des cubes, à extrémités sur la face de sortie $f(R) \setminus R$ des cubes et sur la face d'entrée contenue dans R des cubes. Autrement dit, la partition est essentielle si et seulement si il n'existe aucun point $x \in R$ tel que $f(x) \notin R$ mais tel que P soit défini en x .

Proposition 1.43 *Soit $\{\Sigma, \{R_i\}\}$ une partition de Markov de K (ample) essentielle et soit $\tilde{\Sigma}$ une autre transversale contenant les R_i tel que $\{\tilde{\Sigma}, \{R_i\}\}$ soit aussi une partition de Markov de K . Alors $\{\tilde{\Sigma}, \{R_i\}\}$ est une partition de Markov essentielle de K .*

Démonstration On note R l'union des rectangles R_i . On note f , \tilde{f} et P les applications de premier retour de R sur Σ , $\tilde{\Sigma}$ et R respectivement.

On a vu que $\tilde{f}^{-1}(R) \cap R$ est inclus dans le domaine $Dom(P)$ de P . D'après la remarque ci-dessus, nous savons que $f^{-1}(R) \cap R$ est égal à $Dom(P)$ et nous devons montrer que $\tilde{f}^{-1}(R) \cap R$ est égal à $Dom(P)$.

On commence par remarquer que chaque composante C de $Dom(P)$ contient un point x de K . En effet, $Dom(P)$ est égal à $f^{-1}(R) \cap R$ et la remarque suivant la définition de partition de Markov ample conclut. Puisque $K \cap \tilde{\Sigma}$ est le maximal invariant de R sous l'action de \tilde{f} , le point x appartient nécessairement à $\tilde{f}^{-1}(R) \cap R$.

On s'intéresse maintenant à la composante connexe \tilde{C} de $\tilde{f}^{-1}(R_i) \cap R_j$ contenant x . On a bien sûr $\tilde{C} \subset C$ et on veut montrer l'égalité. Par définition d'une partition de Markov, les composantes C et \tilde{C} sont toutes deux des sous-rectangles horizontaux de R_j . Pour montrer l'égalité des composantes C et \tilde{C} , il suffit donc de montrer que le bord stable de \tilde{C} est inclus dans celui de C . Cependant, \tilde{f}^{-1} coïncide avec P^{-1} sur $R \cap \tilde{f}(R)$ et donc, *a fortiori* sur $(\partial^s R_i \cap \tilde{f}(R_j)) \subset (\partial^s R_i \cap P(R_j))$. Le bord stable $\tilde{f}^{-1}(\partial^s R_i) \cap R_j$ de \tilde{C} est donc inclus dans le bord stable $P^{-1}(\partial^s R_i) \cap R_j$ de C ce qui conclut.

On a donc montré que toute C de $Dom(P)$ est incluse dans $\tilde{f}^{-1}(R) \cap R$ ce qui conclut la preuve. \square

Un argument similaire montre la proposition suivante qui nous permet de donner une définition intrinsèque (sans référence à une transversale) d'une partition essentielle :

Proposition 1.44 *Une famille de rectangles disjoints $\{R_i\}$ transverses au flot admet une transversale Σ qui en fait une partition essentielle de K si et seulement si :*

- l'application de premier retour P de $R = \cup_i R_i$ sur R est définie sur un nombre fini de sous-rectangles horizontaux disjoints et disjoints du bord horizontal des R_i vers une union finie de sous-rectangles verticaux disjoints et disjoints des bords verticaux des R_i .
- le maximal invariant de P est égal à $K \cap R$
- P ainsi que le temps de retour sur R est continue et différentiable
- P laisse invariant les feuilletages horizontaux et verticaux des R_i et possède les propriétés de contraction et dilatation de ces feuilletages.

1.3 Du modèle aux voisinages filtrants du champ initial

Dans cette partie, nous montrons qu'on peut revenir du modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) au champ initial X en restriction à un voisinage isolant M quelconque de K par un nombre fini de chirurgies topologiques simples : des attachements d'anses. Nous verrons qu'un attachement d'anse est déterminé, à équivalence topologique près, par deux composantes connexes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$. Nous montrerons alors comment coder une composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ par une combinatoire finie. On en déduit une présentation finie de tout voisinage isolant à bord transverse de K .

1.3.1 Attachements d'anses

La construction que nous avons effectuée du modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) de $[X, K]$ nous indique également comment revenir par des chirurgies simples sur \tilde{M} à notre couple (M, X) initial, au moins à équivalence topologique près (pourvu que toute composante connexe de M rencontre K).

Soient C et C' deux cercles sur $\partial_1 \tilde{M}$, disjoints de $W^s(K)$ (on note K le maximal invariant de \tilde{M} en accord avec la première propriété d'un modèle de $[X, K]$). Supposons que C et C' bordent sur $\partial_1 \tilde{M}$ deux disques D et D' , disjoints l'un de l'autre, et tout deux disjoints de $W^s(K)$.

Les orbites de D et D' dans \tilde{M} munies de la restriction de \tilde{X} sont topologiquement équivalentes, via un difféomorphisme, à deux copies disjointes de $D^2 \times [0, 1]$ muni du champ $\frac{\partial}{\partial t}$. Si on ôte ces deux cylindres pleins à \tilde{M} , on obtient une variété avec un bord d'entrée, un bord de sortie et deux cylindres $S^1 \times [0, 1]$ tangents (sur lesquels la restriction de X est équivalente à $\frac{\partial}{\partial t}$). On peut alors recoller ces deux cylindres tangents l'un sur l'autre de façon à recoller les champs et à obtenir une variété orientable (il n'existe qu'une seule façon de le faire à équivalence topologique près, par une remarque analogue à celle suivant 1.25). On obtient une nouvelle variété munie d'un champ transverse aux bords.

Définition 1.45 On appellera l'opération précédemment décrite *attachement d'anse sur les cercles C et C'* .

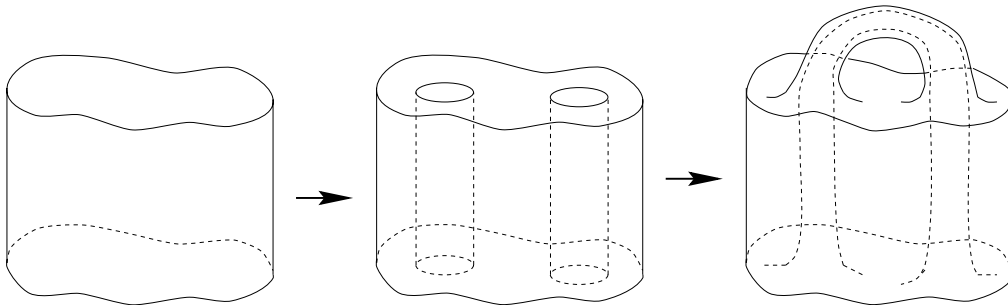


FIG. 1.7 – *Attachement d'une anse*

Lemme 1.46 *La classe d'équivalence topologique d'un attachement d'anse ne dépend que des composantes connexes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ dans lesquelles se trouvent les deux cercles sur lesquels on effectue cet attachement d'anse.*

Démonstration Soient C_1 et C_2 deux cercles dans une même composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ bordant des disques D_1 et D_2 disjoints de $W^s(K)$ et soient C'_1 et C'_2 deux cercles également dans une même composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ et bordant des disques D'_1 et D'_2 disjoints de $W^s(K)$ et disjoints respectivement de D_1 et D_2 .

Il existe deux compacts D et D' sur $\partial_1 \tilde{M}$, disjoints de $W^s(K)$ et tels que D contienne D_1 et D_2 dans son intérieur et D' contienne D'_1 et D'_2 dans son intérieur. Il existe alors

deux difféomorphismes h et h de D et D' , égaux à l'identité sur des voisinages de ∂D et $\partial D'$ envoyant D_1 sur D_2 et D'_1 sur D'_2 . On conclut grâce à la remarque suivant 1.18. \square

On remarque qu'on peut effectuer simultanément plusieurs attachements d'anses pourvu que les disques sur $\partial_1 \tilde{M}$ concernés soient disjoints. On peut donc effectuer toute suite finie d'attachements d'anses sur des cercles disjoints dans un ordre arbitraire.

On peut maintenant montrer la proposition 1.4, c'est-à-dire montrer qu'on passe du modèle au voisinage filtrant initial par un nombre fini d'attachements d'anses :

Démonstration de la proposition 1.4 Rappelons que, dans la sous-partie 1.1.2, on est passé, d'un voisinage filtrant quelconque M de K à \tilde{M}^0 :

— \tilde{M}^0 est un voisinage filtrant intrinsèque de K , union disjointe du modèle \tilde{M} et d'un nombre de composantes M_1, \dots, M_k ne rencontrant pas K .

— Pour cela, nous avons découpé M le long des orbites des cercles C_1, \dots, C_n d'une famille maximale finie donnée par le lemme 1.16 puis nous avons collé des copies de $(D^2 \times [0,1], \frac{\partial}{\partial t})$ sur les $2n$ bords tangents créés.

On remarque que ces opérations sont exactement les chirurgies inverses aux attachements d'anses sur les n couples de cercles $((C_1^1, C_1^2), \dots, (C_n^1, C_n^2))$ de $\partial_1 \tilde{M}^0$ images des cercles C_1, \dots, C_n . On peut donc passer de (\tilde{M}^0, \tilde{X}) à (M, X) par n attachements d'anses sur les couples de cercles $((C_1^1, C_1^2), \dots, (C_n^1, C_n^2))$.

D'autre part, les composantes M_1, \dots, M_k sont des copies de $S^2 \times [0,1]$: en effet, tout cercle sur le bord d'entrée d'une telle composante borde un disque (voir le lemme 1.17) et on conclut par le lemme 1.18.

Toute composante de M rencontrant K on en déduit qu'il existe une composante M_i et un couple (C_j^1, C_j^2) tel que (quitte à échanger C_j^1 et C_j^2), le cercle C_j^1 soit sur le bord d'entrée de \tilde{M} et le cercle C_j^2 soit sur le bord d'entrée de M_i . Quitte à changer l'indexation, on supposera que $i = k$. Notons \tilde{M}^1 le résultat de l'attachement d'anse sur les cercles C_j^1 et C_j^2 .

On remarque alors :

— que (\tilde{M}^1, \tilde{X}) est topologiquement équivalente à (\tilde{M}, \tilde{X}) (la somme connexe d'une surface avec une sphère redonne la surface initiale),

— (M, X) est obtenu à partir de $(\tilde{M}^1 \cup M_1 \cup \dots \cup M_{k-1}, \tilde{X})$ par moins de n attachement d'anses.

Par récurrence, on en déduit donc qu'on peut passer de (\tilde{M}, \tilde{X}) à (M, X) par moins de n attachement d'anses bien choisis. \square

1.3.2 Codage des composantes connexes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ et présentation finie des voisinages filtrants

tant donné un ensemble selle saturé K d'un champ de Smale X , le théorème 1.3 montre que le type géométrique d'une partition de Markov de K constitue à lui seul une présentation finie du modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) de $[X, K]$. Pour obtenir une présentation finie d'un

voisinage filtrant M quelconque de K (tel que toute composante de M rencontre K), il nous reste donc à coder les attachements d'anses nécessaires pour passer de \tilde{M} à M .

Nous avons vu que les attachements d'anses ne dépendent que des composantes connexes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ contenant les cercles sur lesquels on les effectue. Un *codage* sera donc une surjection d'un ensemble dénombrable de mots finis d'un alphabet fini sur l'ensemble des composantes connexes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$.

Pour construire un tel codage, nous allons considérer une partition ample essentielle $\mathcal{R} = \{R_i\}$ de K incluse dans \tilde{M} . On supposera de plus, pour simplifier la procédure de codage, que \mathcal{R} est génératrice, c'est-à-dire que pour tous i et j , $f(R_i)$ a au plus une composante d'intersection avec R_j . L'alphabet considéré dépendra alors du type géométrique de \mathcal{R} .

Nous montrerons ensuite qu'étant donné une autre partition de Markov \mathcal{S} de K essentielle, génératrice, incluse dans \tilde{M} et de même type géométrique que \mathcal{R} , il existe une équivalence topologique globale de (\tilde{M}, \tilde{X}) tel que pour tout mot de notre alphabet, la composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ codée via \mathcal{S} soit l'image par cette équivalence de la composante codée via \mathcal{R} . Notre codage ne dépend, en ce sens, à équivalence topologique près, pas de la partition choisie, mais seulement de son type géométrique.

Une présentation finie de (M, X) sera alors la donnée du type géométrique d'une partition essentielle, génératrice de K incluse dans \tilde{M} , et d'un nombre fini de mots de notre alphabet fini correspondant aux attachements d'anses.

Nous noterons R l'union des rectangles R_i . Notons Σ la section locale de K qui vient avec \mathcal{R} et f l'application de premier retour sur Σ .

Lemme 1.47 *Soit C une composante connexe d'un rectangle R_i privé de l'union des variétés invariantes de K . L'orbite de C ne coupe qu'une seule composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$.*

Démonstration L'orbite de tout point de C coupe $\partial_1 \tilde{M}$ transversalement et en un point et un seul. L'application qui a un point de C associe l'intersection de son orbite avec $\partial_1 \tilde{M}$ est donc bien définie et continue. Ceci assure la connexité de l'intersection de l'orbite de C avec $\partial_1 \tilde{M}$. Cette intersection est bien sûr disjointe de $W^s(K)$. \square

Lemme 1.48 *L'orbite positive de toute composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ coupe $R \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$.*

Démonstration L'orbite positive de tout point de $W^s(K) \cap \partial_1 \tilde{M}$ intersecte l'intérieur de R . L'orbite de tout point de $\partial_1 \tilde{M}$ suffisamment proche de $W^s(K)$ intersecte donc R (bien sûr hors de $W^s(K)$ et de $W^u(K)$), ce qui montre le lemme. \square

Rappelons que, par définition d'une partition de Markov ample, $R_i \cap f^{-1}(R)$ est constitué de h_i sous-rectangles horizontaux disjoints et disjoints de $\partial^s R_i$ où h_i est donné par le type géométrique de \mathcal{R} . L'ensemble $R_i \setminus f^{-1}(R)$ est donc une union de $h_i + 1$ sous-rectangles horizontaux; nous numérotons ces sous-rectangles horizontaux de 1 à $h_i + 1$ de façon compatible avec l'orientation choisie des verticales. De même, $R_i \setminus f(R)$ est une

union de $v_i + 1$ sous-rectangles verticaux, que nous numérotons de façon compatible avec l'orientation des horizontales.

De plus, comme \mathcal{R} a été supposée essentielle, $R_i \setminus f^{-1}(R)$ est disjoint de $W^s(K)$ et $R_i \setminus f(R)$ est disjoint de $W^u(K)$.

Définition 1.49 *Pour tout point x tel que :*

- x est dans la v^{ieme} composante de $R_{i_0} \setminus f(R)$,
- pour tout k compris entre 0 et N , $f^k(x) \in R_{i_k}$,
- $f^N(x)$ est dans la h^{ieme} composante de $R_{i_N} \setminus f^{-1}(R)$,

nous dirons que l'orbite de x admet l'itinéraire $(v, i_0, i_1, \dots, i_N, h)$.

Remarque L'orbite de tout point de x de $R \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$ admet un unique itinéraire. En effet, x n'appartient ni à $W^s(K)$, ni à $W^u(K)$, l'intersection de l'orbite de x pour le flot avec R est donc finie. De plus, \mathcal{R} est essentielle donc cette orbite correspond à un intervalle dans \mathbb{Z} pour l'application de premier retour f .

Proposition 1.50 *Soit \mathcal{R} une partition de K ample essentielle, génératrice et incluse dans \tilde{M} . Soient deux points x et y de $R \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$ dont les orbites admettent le même itinéraire.*

Alors les orbites de x et y intersectent $\partial_1 \tilde{M}$ en des points appartenant à la même composante connexe C de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$.

Définition 1.51 *Nous dirons alors que l'itinéraire commun des orbites de x et de y est un code de C .*

Démonstration Notons $(v, i_0, i_1, \dots, i_N, h)$ l'itinéraire commun des orbites de x et de y . Notons x' et y' les premiers points d'intersection (pour le temps) des orbites de x et de y avec R . Par définition, en notant V la v^{ieme} composante de $R_{i_0} \setminus f(R)$ et H la h^{ieme} composante de $R_{i_N} \setminus f^{-1}(R)$, les points x' et y' appartiennent tous deux à $V \cap (\bigcap_0^N f^{-k}(R_{i_k})) \cap f^{-N}(H)$.

L'intersection $\bigcap_0^N f^{-k}(R_{i_k})$ est un sous-rectangle horizontal de R_{i_0} . La composante H est un sous-rectangle horizontal de R_{i_N} donc $(\bigcap_0^N f^{-k}(R_{i_k})) \cap f^{-N}(H)$ est un sous-rectangle horizontal de R_{i_0} . La composante V est un sous-rectangle vertical de R_{i_0} donc $V \cap (\bigcap_0^N f^{-k}(R_{i_k})) \cap f^{-N}(H)$ est un sous-rectangle de R_{i_0} et, en particulier, est connexe.

D'autre part, pour tout point z de $V \cap (\bigcap_0^N f^{-k}(R_{i_k})) \cap f^{-N}(H)$, ni $f^{-1}(z)$, ni $f^{N+1}(z)$ ne sont dans R donc x n'est ni dans $W^s(K)$, ni dans $W^u(K)$ (la partition est essentielle). L'intersection $V \cap (\bigcap_0^N f^{-k}(R_{i_k})) \cap f^{-N}(H)$ est donc incluse dans une composante connexe de $R \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$. On conclut via le lemme 1.47. \square

Définition 1.52 *Soient X un flot de Smale, K un ensemble selle saturé de X et M un voisinage filtrant de X tel que toute composante de M rencontre K . On note (\tilde{M}, \tilde{X}) le modèle de $[X, K]$. On notera encore K le maximal invariant de \tilde{M} .*

Soient maintenant $(C_1, C'_1), \dots, (C_n, C'_n)$, n couples de cercles plongés dans $\partial_1 \tilde{M}$, disjoints de $W^s(K)$, bordant, sur $\partial_1 \tilde{M}$, des disques deux-à-deux disjoints et disjoints de $W^s(K)$ et tels que les attachements d'anses sur les couples (C_i, C'_i) transforment \tilde{M} en M .

Soit enfin \mathcal{R} une partition de Markov de K ample essentielle, génératrice incluse dans \tilde{M} .

Une présentation finie de (M, X) sera la donnée :

- d'un type géométrique de \mathcal{R} ,
- de n couple d'itinéraires (I_i, I'_i) , tel que, pour tout i , I_i et I'_i sont des codes des composantes connexes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ contenant C_i et C'_i .

Remarques

— Comme nous l'avons déjà annoncé, on montrera, qu'étant donné le type géométrique T d'une partition de Markov \mathcal{R} de K , il existe toujours, dans le modèle de K , une partition essentielle de type T (ceci sera le corollaire 2.2 du chapitre 2). Le mot "essentielle" n'est donc pas une restriction dans la définition ci-dessus.

— Si M possède une composante connexe ne rencontrant pas K , notons M^0 l'union des composantes connexes de M rencontrant K . Nous appellerons présentation finie de M , toute présentation finie de M^0 complétée par la donnée du genre du bord d'entrée de chacune des composantes de $M \setminus M^0$.

Théorème 1.53 *Tout voisinage filtrant M d'un ensemble selle saturé K d'un champ X admet une présentation finie.*

Deux voisinages filtrants M et N d'ensembles selle saturés K et L de champs X et Y admettant la même présentation sont globalement topologiquement équivalents.

Démonstration Nous savons, d'après la proposition 1.36, que le modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) contient une partition essentielle \mathcal{R} de K . On peut toujours se ramener à une partition essentielle génératrice simplement en considérant $R \cap f(R)$.

Notons M^0 l'union des composantes connexes de M rencontrant K . La proposition 1.4 montre que, pour passer (\tilde{M}, \tilde{X}) à (M^0, X) (à équivalence topologique près) par un nombre fini d'attachement d'anses qui ne dépendent que des composantes connexes dans $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ des cercles sur lesquels on les effectue. Le lemme 1.48 montre que toute composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ admet (au moins) un code. Ceci et la remarque précédente achève la démonstration de la première affirmation du théorème.

Pour montrer la seconde affirmation, remarquons d'abord que l'équivalence est donnée par le lemme 1.18 sur les composantes de M et N ne rencontrant pas K et L . On supposera donc désormais que toute composante de M et N rencontre respectivement K ou L .

Il existe, par hypothèse, deux partitions \mathcal{R} et \mathcal{S} de K et L , essentielles, génératrices et incluses dans \tilde{M} et \tilde{N} et de même type géométrique. La proposition 1.33 montre qu'il existe un homéomorphisme h défini des cubes associés à \mathcal{R} et \mathcal{S} réalisant une conjugaison entre des renormalisations de X et Y et envoyant le rectangle orienté R_i sur le rectangle orienté S_i . La proposition 1.38 montre que h s'étend en une équivalence topologique globale de \tilde{M} dans \tilde{N} .

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de voir que l'image par h d'une composante connexe C de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$ codée via \mathcal{R} par un itinéraire I est codée dans \tilde{N} par l'itinéraire I via \mathcal{S} . Pour cela, il suffit de considérer un point x de C dont l'orbite admet I comme itinéraire. L'image par h de l'orbite de x admet alors le même itinéraire car h respecte la numérotation des rectangles et des sous-rectangles des R_i et S_i . \square

Remarque La remarque suivant la définition 1.5 montre que le théorème précédent donne en fait une présentation finie de tout voisinage isolant d'ensemble selle dont le bord est transverse au champ. En effet, un tel voisinage est en effet un voisinage filtrant intrinsèque.

1.4 Présentations finies globales de champs de Smale

Les parties précédentes indiquent comment caractériser par une combinatoire finie la restriction d'un flot de Smale à un voisinage filtrant d'ensemble selle saturé. Si l'on ne considère que des flots de Smale sans singularités, nous allons voir que la classe d'équivalence topologique globale du flot est caractérisée par la donnée d'une présentation finie d'un voisinage filtrant de *l'ensemble selle maximal* et d'une classe d'homologie de chaque composante de bord de ce voisinage. On montrera alors comment coder les classes d'homologie, du bord de certains voisinages filtrants, une fois encore à l'aide d'un type géométrique. Ceci donnera lieu à des présentations finies globales de flots de Smale sans singularité.

Considérons donc un champ de Smale sans singularité X sur une variété compacte \mathcal{M} de dimension 3. L'ensemble non-errant de X est constitué de pièces basiques de type selles et d'un nombre fini d'orbites périodiques puits ou sources. On note K^0 l'union de toutes pièces basiques selles de X (c'est-à-dire les pièces basiques dont les directions stable et instables faibles sont de dimension 2) et on définit alors *l'ensemble selle maximal* K de X comme le saturé de K^0 , c'est-à-dire $K = W^s(K^0) \cap W^u(K^0)$.

On note M le voisinage filtrant de K dans \mathcal{M} obtenu en ôtant à \mathcal{M} un tore plein autour de chaque orbite périodique puits ou source (pour que M soit effectivement un voisinage filtrant de K , il suffit que les tores pleins que l'on ôte soient suffisamment fins autour des orbites puits et sources et que leurs bords soient transverses à X).

Remarque En fait, M est, à équivalence topologique près, le seul voisinage filtrant de K dans \mathcal{M} (il suffit de reprendre la preuve de la proposition 1.6).

On sait donner des présentations finies des voisinages filtrants tels que M et on veut donc maintenant voir comment reconstruire \mathcal{M} à partir de M .

Définition 1.54 *Appelons tore plein puits tout tore plein orienté N muni d'un champ Y transverse au bord de N et tel que le maximal invariant de N pour Y soit simplement une orbite périodique hyperbolique puits (alors nécessairement homotope à l'âme du tore plein).*

Il n'existe, à équivalence topologique près, qu'un seul tore plein puits (lemme de Grobman-Hartman, voir, par exemple, [PaMe]). On définit bien sûr de même un *tore plein source*.

Soit (N, Y) un tore plein puits et soit γ un cercle dans ∂N qui ne borde pas de disque dans ∂N mais qui borde un disque D dans N . Cette propriété caractérise le cercle non-orienté γ à homotopie près. De plus, on peut choisir D transverse à Y (il suffit de

se ramener au modèle linéaire, encore une fois grâce au lemme de Grobman-Hartman). L'orientation de N et celle du champ Y munissent D d'une orientation (par exemple, décidons qu'une base directe de D suivit du vecteur Y doit donner une base directe de N). On munit alors γ de son orientation comme bord de D .

Définition 1.55 *On dit alors que la classe d'homologie de γ (orienté) est la classe d'homologie privilégiée de ∂N . On définit de même la classe d'homologie privilégiée du bord d'un tore plein source.*

Le couple (\mathcal{M}, X) est obtenu, à partir de (M, X) , en recollant un tore plein source sur chaque composante de $\partial_1 M$ et un tore plein puits sur chaque composante de $\partial_2 M$. Il nous reste à voir comment influe la façon dont on recolle les tores pleins puits et sources sur M .

Lemme 1.56 *On considère un voisinage filtrant M d'un ensemble selle d'un champ X et on suppose que $\partial_2 M$ possède une composante connexe de genre 1 que l'on note T . On considère d'autre part un tore plein puits (N, Y) .*

On recolle N à M , de deux façons, grâce à deux difféomorphismes préservant l'orientation $f_1, f_2 : \partial N \rightarrow T$. On note $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, X_1$ et X_2 les variétés et les champs ainsi construits.

Alors (M_1, X_1) et (M_2, X_2) sont topologiquement équivalents dès que f_1 et f_2 envoient la classe d'homologie privilégiée de ∂N sur la même classe d'homologie de T .

Démonstration Supposons donc que f_1 et f_2 envoient la classe d'homologie privilégiée de ∂N sur la même classe d'homologie de T , et faisons deux remarques :

— Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que $f = f_2^{-1} \circ f_1 : \partial N \rightarrow \partial N$ se prolonge en une équivalence topologique de (N, Y) dans (N, Y) . C'est ce que nous allons faire.

— On peut toujours remplacer f par un difféomorphisme qui lui est isotope (c'est une conséquence de la stabilité structurelle, on peut aussi le montrer "à la main").

Nous utilisons les variétés stables fortes (locales) des points de l'orbite périodique puits \mathcal{O} de N . Ce sont des disques qui feuilletent trivialement N et induisent sur ∂N un feuilletage trivial en cercles \mathcal{F} . Les feuilles de \mathcal{F} , pourvu qu'on les munissent de la bonne orientation, sont dans la classe d'homologie privilégiée du bord de N (puisque, par définition, chaque feuille de \mathcal{F} borde un disque dans N).

Le difféomorphisme f envoie le feuilletage \mathcal{F} sur un feuilletage trivial en cercles \mathcal{F}' . L'orientation des feuilles de \mathcal{F} (induite par l'orientation de la classe d'homologie privilégiée) induit une orientation des feuilles de \mathcal{F}' . De l'hypothèse sur f_1 et f_2 , on déduit que les feuilles orientées de \mathcal{F}' sont homologues à celles de \mathcal{F} . Via une isotopie, on peut donc supposer que f préserve \mathcal{F} feuille à feuille.

On pose alors, pour tout $x \in \partial N$ et tout $t \geq 0$, $\tilde{f}(Y^t(x)) = Y^t(f(x))$ (ce qui ne pose pas de problème car toute orbite ne coupe ∂N qu'une seule fois). On prolonge ainsi f en $\tilde{f} : N \setminus \mathcal{O} \rightarrow N \setminus \mathcal{O}$. Comme f préserve \mathcal{F} feuille à feuille et que \tilde{f} conjugue Y à lui-même, \tilde{f} préserve une à une les variétés stables fortes des points de \mathcal{O} . Par suite, \tilde{f} se prolonge donc par continuité sur \mathcal{O} en une conjugaison entre Y et lui-même. \square

Le lemme précédent montre que pour donner une présentation de tout flot de Smale sans singularité, il nous suffit de savoir coder toute classe d'homologie du bord d'un voisinage filtrant de l'ensemble selle maximal. Nous allons maintenant expliquer comment faire cela, encore à l'aide d'un type géométrique, dans le cas où toutes les composantes de bord du modèle sont des tores.

Jetant donné un champ X et un voisinage filtrant M d'un ensemble selle saturé de X , rappelons que le saturé par le flot de l'union des rectangles d'une partition essentielle $\mathcal{R} = \{R_i\}$ de K trace sur $\partial_2 M$ une surface compacte à bord (lemme 1.41), que nous notons Σ^u . De plus, l'énoncé 1.42 donne une méthode pour reconstruire Σ^u . Extrayons de cet énoncé ce dont on a besoin ici :

Notons comme d'habitude R l'union des rectangles de \mathcal{R} et f l'application de premier retour sur R . Alors l'adhérence de $R_i \setminus f^{-1}(R)$ est une union de sous-rectangles de R_i que nous noterons $\bar{A}_i^0, \dots, \bar{A}_i^{h_i}$ où :

- \bar{A}_i^0 est en dessous de H_i^1 ,
- $\bar{A}_i^{h_i}$ est au-dessus de $H_i^{h_i}$,
- \bar{A}_i^j est entre H_i^j et H_i^{j+1} si $j \neq 0, h_i$.

Alors Σ^u est homéomorphe à une surface obtenue en considérant l'union disjointe de tous les \bar{A}_i^j (c'est-à-dire $i \leq n$ et $0 \leq j \leq h_i$) et en recollant certains côtés horizontaux sur d'autres (lemme 1.42).

Ce qui nous importe ici est que les recollements effectués préservent les horizontales des \bar{A}_i^j . On peut donc poser la définition suivante :

Notation 1.57 On définit le graphe \mathcal{G}^u comme obtenu en passant au quotient de la surface Σ^u par la direction horizontale des \bar{A}_i^j . On notera e_i^j l'arête de \mathcal{G}^u induite par le passage au quotient de \bar{A}_i^j par sa direction horizontale (voir figure 1.8).

Remarquons que les verticales de chaque sous-rectangles \bar{A}_i^j sont naturellement orientées par l'orientation des verticales de R_i . Ceci induit une orientation de chaque arête du graphe \mathcal{G}^u .

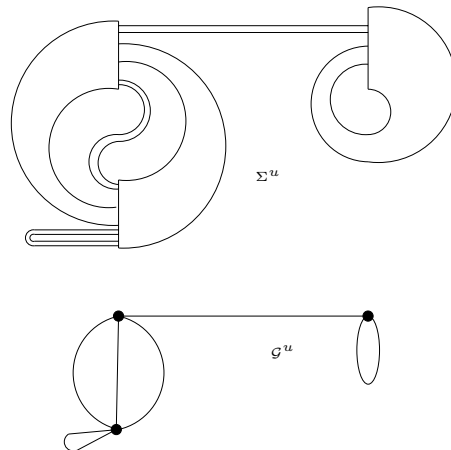


FIG. 1.8 – La surface de sortie Σ^u d'une partition essentielle et le graphe \mathcal{G}^u associé

Par construction, la surface Σ^u se rétracte sur le graphe \mathcal{G}^u . Par ailleurs, rappelons que la surface Σ^u est plongée canoniquement dans le bord de sortie du modèle de T d'après

la proposition 1.38. Par conséquent, \mathcal{G}^u est canoniquement plongé dans le bord de sortie du modèle de T . Ceci nous permet de poser la définition suivante :

Définition 1.58 Soit (\tilde{M}, \tilde{X}) un modèle et soit T le type géométrique d'une partition ample essentielle du maximal invariant de (\tilde{M}, \tilde{X}) . On appellera présentation (relative à T) d'un cercle orienté γ de $\partial_2 \tilde{M}$ une suite finie de triplets $(i_1, j_1, \varepsilon_1), \dots, (i_l, j_l, \varepsilon_l)$ tels que :

- pour tout $k \leq l$, on a $i_k \leq n$, $0 \leq j_k \leq h_{i_k}$ et $\varepsilon_k = \pm$
- la suite des arêtes $\varepsilon_k e_{i_k}^{j_k}$ forme un cycle de \mathcal{G}^u ,
- les cercles orientés C et γ sont homologues dans $\partial_2 \tilde{M}$.

On définit de même un graphe \mathcal{G}^s en passant au quotient de la surface Σ^s par les directions verticales des sous-rectangles la composant. Ce graphe nous permet de définir des présentations finies des cercles de $\partial_1 \tilde{M}$.

On suppose maintenant que toutes les composantes du modèle de K sont des tores. Ceci implique que (M, X) est ce modèle. En effet, (M, X) se déduit du modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) par un certain nombre d'attachements d'anses (d'après la partie précédente) ; on remarque alors que tout attachement d'anse sur (\tilde{M}, \tilde{X}) donne forcément lieu à une composante de bord de genre plus grand que 2, ce qui conclut. Par conséquent, (\mathcal{M}, X) est obtenue en recollant des tores pleins puits et sources sur le bord du modèle de K . Ceci permet enfin de poser la définition suivante :

Définition 1.59 Soit (\mathcal{M}, X) une variété compacte et un champ de Smale sans singularités. On note K l'ensemble selle maximal de X et on suppose que toutes les composantes de bord du modèle (\tilde{M}, \tilde{X}) de $[X, K]$ sont des tores. Alors (\mathcal{M}, X) est obtenue en recollant des tores pleins puits ou source sur (\tilde{M}, \tilde{X}) . On note $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ les classes d'homologie du bord de \tilde{M} que l'on recolle sur les classe d'homologie privilégiées des tores pleins puits ou sources.

Une présentation finie de (\mathcal{M}, X) sera la donnée du type géométrique T d'une partition ample essentielle de K et une présentation finie, relative à T , de chacun des classes d'homologie $\gamma_1, \dots, \gamma_r$.

La proposition suivante résulte de ce qui précède :

Proposition 1.60 Tout champ de Smale (\mathcal{M}, X) sans singularités et telles que toutes les composantes de bord du modèle de l'ensemble selle maximal sont des tores admet une présentation finie comme ci-dessus.

Si deux champs (\mathcal{M}, X) et (\mathcal{N}, Y) vérifient les hypothèses ci-dessus et ont une présentation finie commune alors ils sont globalement topologiquement équivalents.

Autres flots de Smale

L'obtention de présentation des autres flots de Smale est souvent plus laborieuse :

— Remarquons tout de même que la prise en compte de champs de Smale comportant des singularités puits ou sources ne change rien aux présentations finies obtenues. En effet, un voisinage filtrant de l'ensemble selle maximal est alors obtenu en ôtant un tore

plein autour de chaque orbite périodique puits ou source et une boule autour de chaque singularité puits ou source. Comme le mapping class group d'une sphère est trivial, il n'existe qu'une seule façon de recoller une boule comportant une singularité puits ou source sur un voisinage filtrant.

— Par contre, la prise en compte de singularité selles serait très laborieuse. Considérons par exemple un singularité dont la variété stable est de dimension 2. Cette variété stable trace sur le bord de sortie d'un voisinage filtrant M de l'ensemble selle maximal K un cercle γ qui intersecte transversalement la lamination $\mathcal{L}^u \equiv W^u(K) \cap \partial_2 M$. Il faudrait alors coder la position de γ dans $\partial_2 M$ et la forme de son intersection avec \mathcal{L}^u . On voit se profiler une combinatoire assez proche d'un type géométrique...

— Considérons enfin des flots de Smale sans singularités mais tels que certaines composantes du modèle \tilde{M} de l'ensemble selle maximal K sont des sphères. Alors, si M est un voisinage filtrant de K dans \mathcal{M} , certains cercles du bord de M ne sont pas homotopes à des cycles du graphe \mathcal{G}^u associés à une partition essentielle. D'autre part, \mathcal{G}^u n'a pas de plongement canonique dans le bord de M . On peut dans certains cas (peut-être dans tous) contourner le problème en ne codant pas des cercles des bord d'entrée et de sortie, mais des suites de segments alternativement dans les bords d'entrée et de sortie, joints par des segment d'orbites passant du bord d'entrée au bord de sortie.

Appendice A. Flots hyperboliques, flots de Smale et dérivé d'Anosov

Smale a introduit une opération ([Sm67]) dite de *dérivé d'Anosov*, qui permet, par extension de son domaine d'application initial, de transformer tout flot hyperbolique (en dimension 3) en un flot de Smale. Cette opération a, en particulier, été reprise dans le cas des flots en dimension 3 par Birman et Williams ([BiWi]).

Soit (\mathcal{M}, X) un champ d'Anosov en dimension 3 et soit \mathcal{O} une orbite périodique de X . On considère une surface de Poincaré locale Σ transverse à \mathcal{O} . On peut supposer que Σ n'intersecte \mathcal{O} qu'en un seul point x . L'application de premier retour sur Σ est alors définie sur un voisinage U de x . Quitte à réduire la taille de U , l'application f est conjugué à la dynamique linéaire d'une selle située en x . On dessine, comme d'habitude la direction stable horizontale et la direction instable verticale. Pour simplifier et quitte à changer \mathcal{O} , on suppose de plus, que les valeurs propres de f en x sont positives.

On considère alors $f' : U \rightarrow f(U)$ préservant les directions stables de f une à une, possédant une source en x et deux selles x_1 et x_2 situées de part et d'autre de x sur l'horizontale passant par x , et telle que les autres points sont errants. On peut demander à f' de coïncider avec f sur le bord de U (voir figure 1.9).

On note \mathcal{U} l'union des segments d'orbites de X compris entre un point de U et son retour dans $f(U)$. Comme f et f' coïncident au bord de U , on peut considérer un champ X' sur \mathcal{M} tel que :

- X' coïncide avec X en dehors de \mathcal{U} ,
- X' coïncide avec la suspension de f' sur \mathcal{U} .

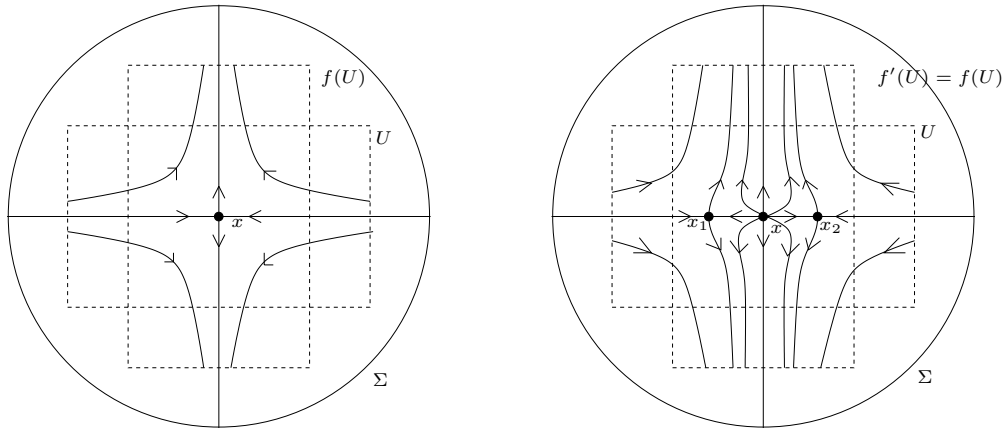


FIG. 1.9 – Les applications de retour locale pour l’Anosov de départ et le dérivé d’Anosov

Alors (voir [Wi70] ou [FrRo]) :

- \mathcal{O} est une orbite périodique source pour le champ X' ,
- le maximal invariant Λ (pour X') du complémentaire d’un petit voisinage de \mathcal{O} admet une structure hyperbolique avec une direction stable et une direction instable non-triviale,
- Λ est transitif (c’est donc un attracteur hyperbolique).

Par conséquent, X' est structurellement stable (et il y a un ouvert de champs autour de X' vérifiant les propriétés ci-dessus). On dit que X' est obtenu à partir de X par un *dérivé d’Anosov* dans la direction stable.

Williams et Franks-Robinson font la preuve dans le cas d’un difféomorphisme d’Anosov linéaire (preuve qui se transcrit immédiatement à la suspension de tels difféomorphismes). Cependant, il ne fait pas de doute que la même opération se généralise à tout flot d’Anosov et même à d’autre flot hyperbolique. C’est d’ailleurs dans ce cadre que l’utilise Birman et Williams ([BiWi]). On peut ainsi transformer tout champ hyperbolique en un champ de Smale :

Si on a un champ d’Anosov transitif (\mathcal{M}, X) , on en déduit un champ structurellement stable avec (\mathcal{M}', X') via un dérivé d’Anosov sur une orbite \mathcal{O} dans la direction stable. L’ensemble non-errant de X' est constitué d’une orbite périodique source et d’un attracteur hyperbolique transitif. On peut alors choisir une orbite périodique \mathcal{O}' de cet attracteur et effectuer sur \mathcal{O}' une opération de dérivé d’Anosov dans la direction instable (pour ne pas tomber dans un cas particulier, demandons que \mathcal{O}' ne soit pas l’une des deux orbites selles créées par le premier dérivé d’Anosov). Le champ (\mathcal{M}, X'') résultant est un champ de Smale possédant une orbite périodique source à la place de \mathcal{O} , une orbite périodique puits à la place de \mathcal{O}' et un ensemble selle transitif.

Si on a maintenant un flot hyperbolique (\mathcal{M}, X) non-transitif quelconque, on pourrait le transformer en champ de Smale en effectuant :

- un dérivé d’Anosov dans la direction instable sur une orbite périodique de chaque attracteur hyperbolique transitif,
- un dérivé d’Anosov dans la direction stable sur une orbite périodique de chaque répulseur hyperbolique transitif.

Problème : *Peut-on définir une opération inverse au dérivé d'Anosov de façon canonique? (c'est-à-dire, peut-on définir un inverse de dérivé d'Anosov tel que si on passe de (\mathcal{M}, X') à (\mathcal{M}, X) par un inverse de dérivé d'Anosov sur une orbite périodique source de X' , alors la classe d'équivalence topologique de (\mathcal{M}, X) ne dépend que de celle de (\mathcal{M}, X') et du choix de l'orbite source \mathcal{O})?*

Remarque Pour les difféomorphismes des surfaces, on peut définir une telle opération canonique, voir [BLJ, chapitre 8].

Une réponse positive au problème ci-dessus permettrait de ramener la présentation finie de tout flot hyperbolique en dimension 3 à celle d'un flot de Smale (obtenu par dérivé d'Anosov).

Remarque En particulier, ceci permettrait de donner immédiatement des présentations finies des flots d'Anosov transitifs. En effet, si (\mathcal{M}, X'') est un champ de Smale obtenu à partir d'un champ d'Anosov par un dérivé d'Anosov (\mathcal{M}, X) comme décrit ci-dessus, alors les laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u associées à l'ensemble selle maximal de X'' ne peuvent se plonger que dans des surfaces de genre supérieur à 1 : en reprenant le raisonnement de [FrWi], on se convainc facilement que ces laminations sont de la forme de celles de la figure 1.10. Le bord d'entrée et le bord de sortie du modèle de K sont donc des tores. On sait donc, d'après la partie précédente donner des présentations finies de (\mathcal{X}, X'')

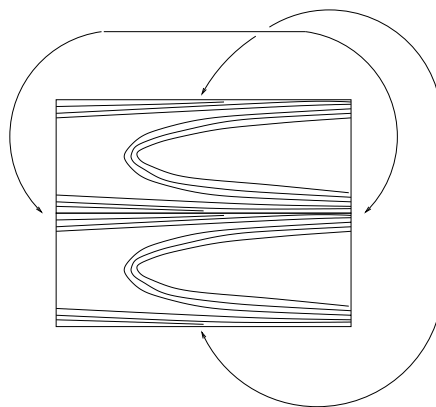


FIG. 1.10 – *La lamination d'entrée ou de sortie du champ X'' obtenu à partir de X par deux dérivé d'Anosov*

Appendice B. Il n'existe pas de voisinage canonique associé au germe le long d'un ensemble selle

Nous allons montrer ici que le germe d'un flot de Smale le long d'un ensemble selle saturé ne suffit pas à caractériser la dynamique sur un voisinage invariant :

Proposition 1.61 *Soit \mathcal{M} une variété compacte sans bord de dimension 3 munie d'un champ de Smale X qui admet un ensemble selle saturé K . On considère un voisinage \mathcal{U} de K invariant dans \mathcal{M} . On suppose que K est connexe et possède une orbite homocline.*

Alors il existe une variété \mathcal{N} munie d'un champ de Smale Y admettant un ensemble selle saturé L de façon à ce que :

- *les germes de X et Y le long de K et L sont égaux*
- *il n'existe aucun voisinage invariant \mathcal{V} de L tel que les restrictions de X et Y à \mathcal{U} et \mathcal{V} soient topologiquement équivalentes.*

La démonstration de cette proposition constitue le reste de cet appendice.

Remarques

— Il suffit de montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tel que L n'admette aucun voisinage invariant sur lequel Y soit équivalent à $X|_{\mathcal{U}'}$. Autrement dit, on peut toujours restreindre \mathcal{U} .

— Supposons au contraire de ce qu'on veut prouver que pour toute variété \mathcal{N} munie d'un champ Y admettant un ensemble selle saturé L tel que $[X, K] = [Y, L]$, on ait un voisinage invariant \mathcal{V} de L tel que $X|_{\mathcal{U}}$ soit équivalent à $Y|_{\mathcal{V}}$. Alors, en particulier, cela est alors vrai quand (\mathcal{N}, Y) est une complétion de Smale du modèle de $[X, K]$ (il existe une telle complétion, voir [Fr83, corollaire 2.1] ou la suite de cet appendice). Quitte à remplacer (\mathcal{M}, X) par une complétion du modèle de $[X, K]$, on peut donc supposer que le modèle \tilde{M} de $[X, K]$ est inclus dans \mathcal{M} comme voisinage isolant de K .

D'après la remarque ci-dessus, on peut supposer que K admet dans \mathcal{M} un voisinage filtrant \tilde{M} qui est un modèle de $[X, K]$: de plus, quitte à restreindre \mathcal{U} , on peut supposer que \mathcal{U} est le saturé par le flot de X de $\mathcal{U} \cap \tilde{M}$ et que $\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M}$ est une sous-surface compacte à bord de $\partial_1 \tilde{M}$; notons alors n le nombre de ses composantes de bord et g son genre.

Remarque Par hypothèse, K possède une orbite homocline et donc une infinie d'orbites périodiques. On en déduit que la lamination $W^s(K) \cap \partial_1 \tilde{M}$ possède une infinité de feuilles.

Lemme 1.62 *Le complémentaire de $W^s(K)$ dans $\partial_1 \tilde{M}$ possède une infinité de composantes connexes.*

Remarque Ce fait n'est pas complètement trivial. Par exemple, le minimal exceptionnel d'un flot de Denjoy sur le tore est une lamination sur le tore avec une infinité de feuilles, d'intérieur vide, et dont le complémentaire est connexe.

Ide de la démonstration Nous avons vu que la lamination $\mathcal{L}^s = W^s(K) \cap \partial_1 \tilde{M}$ possède une infinité de feuilles. Les lemmes 1.13 et 1.14 montrent que \mathcal{L}^s ne contient qu'un nombre fini de feuilles compactes et que l'ensemble limite de toute demi-feuille est l'une de ces feuilles compactes.

tons à la surface $\partial_1 \tilde{M}$ chacune de ces feuilles compactes et compactifions la surface ouverte obtenue par un point ajouté à chacun de ses bouts. On obtient ainsi une surface compacte S avec un ensemble fini de points marqué. Chaque feuille non compacte de \mathcal{L}^s induit sur S un segment allant d'un point marqué à un autre. Notons $\tilde{\mathcal{L}}^s$ la famille de ces

segments. Les segments de $\bar{\mathcal{L}}^s$ sont deux-à-deux d'intérieurs disjoints et sont en nombre infinis. Toute composante connexe de $S \setminus \bar{\mathcal{L}}^s$ correspond à une unique composante connexe de $\partial_1 \tilde{M} \setminus \mathcal{L}^s$.

On vérifie que la famille $\bar{\mathcal{L}}^s$ contient une sous-famille infinie constituées de segments deux-à-deux homotopes à extrémités fixées. Par une démonstration analogue à celle de 1.15, il existe donc une famille infinie de disques ouverts deux-à-deux disjoints bordés chacun par deux de cette sous-famille. Comme l'union de ces segments est un compact d'intérieur vide, chacun de ces disques contient une composante connexe différente de S privée de $\bar{\mathcal{L}}^s$. \square

On choisit alors $n + g + 1$ composantes distinctes de $\partial_1 \tilde{M} \setminus W^s(K)$, puis, dans chacune de ces composantes, un couple de cercles disjoints bordant des disques disjoints l'un de l'autre et disjoints de $W^s(K)$. On attache alors une anse sur chacun de ces couples de cercles (comme dans la définition 1.45). On note N la variété à bord obtenue, Y le champ dont elle est munie et L le maximal invariant de N . Le genre de $\partial_1 N$ est donc supérieur $n + g + 1$. On rappelle que le germe de Y le long de L est égal au germe de X le long de K .

Remarque Chaque composante de $\partial_1 N$ rencontre $W^s(L)$ car chaque composante de $\partial_1 \tilde{M}$ rencontre $W^s(\tilde{M})$ (voir la remarque à la fin de la partie 1.1.2).

On peut compléter N en une variété compacte sans bord de dimension 3 munie d'une extension de Smale de Y de façon simple.

On commence par les remarques suivantes :

— On notera B_0 la boule de dimension 3. La variété à bord B_0 peut être munie d'un champ de Morse-Smale X_0 transverse à son bord, rentrant dans B_0 le long de celui-ci et tel que l'ensemble non errant de X_0 soit simplement constitué d'une singularité puits.

— On notera B_1 le tore plein. La variété à bord B_1 peut être munie d'un champ de Morse-Smale X_1 transverse à son bord, rentrant dans B_1 le long de celui-ci et tel que l'ensemble non errant de X_1 soit simplement constitué d'une orbite périodique puits.

— On notera B_2 le bretzel plein à 2 trous (c'est à dire la somme connexe de 2 tores pleins). La variété à bord B_2 peut être munie d'un champ de Morse-Smale X_2 transverse à son bord (qui est un tore à 2 trous), rentrant dans B_2 le long de celui-ci et tel que l'ensemble non errant de X_2 soit simplement constitué de deux orbites périodiques puits et d'un singularité selle dont la variété stable locale est un 2-disque coupant le bord de B_2 en un cercle et dont la variété instable est donc de dimension 1 (voir la figure 1.11).

— On notera B_p le bretzel plein à p trous (c'est à dire la somme connexe de B_{p-1} et d'un tore plein). La variété à bord B_p peut être munie d'un champ de Morse-Smale X_p transverse à son bord (qui est un tore à p trous), rentrant dans B_p le long de celui-ci et tel que l'ensemble non errant de X_p soit simplement constitué de p orbites périodiques puits et de $p - 1$ singularités selles dont les variétés stables locales sont des 2-disques coupant le bord de B_p en $p - 1$ cercles disjoints et dont les variétés instables sont donc de dimension 1.

— Pour chaque p , le champ $-X_p$ est un champ de Morse-Smale sur B_p transverse au bord de B_p et sortant de B_p le long de celui-ci.

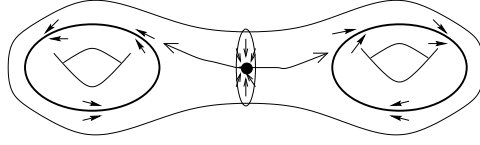


FIG. 1.11 – Le champ X_2 dans le bretzel plein à 2 trous

On recolle alors sur chaque composante de $\partial_1 N$, l'exemplaire de B_p correspondant au genre p de cette composante muni du champ $-X_p$. Rappelons que chaque composante de $\partial_1 N$ rencontre $W^s(L)$. Si p est supérieur ou égal à 2, on se convainc facilement qu'on peut effectuer ce recollement de façon à ce que tous les cercles correspondants à la trace des variétés instables des singularités selles rencontrent la lamination $W^s(K) \cap \partial_1 N$ et cela de façon transverse.

On obtient ainsi une variété à bord N^+ muni d'un flot de Smale transverse à son bord, sortant de N^+ le long de celui-ci. Remarquons que le bord de N^+ est $\partial_2 N$. Ce bord est naturellement muni d'une lamination unidimensionnelle d'intérieur vide obtenue en rajoutant à $W^u(L) \cap \partial_2 N$ la trace des variétés instables des singularités selles ajoutées dans N^+ . On peut maintenant compléter N^+ en une variété \mathcal{N} sans bord, en collant des copies des B_p munies des champs X_p de façon que les cercles, traces sur le bord des B_p des variétés stables des singularités selles de B_p , soient transverses à la nouvelle lamination de $\partial_2 N$ et rencontrent tous $W^u(L)$.

Nous avons ainsi construit une variété \mathcal{N} compacte, sans bord, orientable, de dimension 3 munie d'une extension de Smale de Y tel que toute pièce basique ajoutée soit comparable pour l'ordre de Smale à L . Alors N est un voisinage filtrant de L dans \mathcal{N} .

Remarque La construction ci-dessus montre que tout voisinage isolant d'un ensemble selle dont le bord est transverse au champ peut être plongé comme voisinage filtrant de cet ensemble dans une variété sans bord comme annoncé dans la remarque suivant la définition 1.5.

La démonstration de la proposition 1.61 est alors réduite à la démonstration de la proposition suivante :

Proposition 1.63 *Le champ Y ne possède aucun voisinage \mathcal{V} de L invariant dans \mathcal{N} tel que les restrictions de X et Y à \mathcal{U} et \mathcal{V} soient topologiquement équivalentes.*

Démonstration Par l'absurde, on suppose qu'il existe un voisinage invariant \mathcal{V} de L dans \mathcal{N} et un homéomorphisme h réalisant l'équivalence entre $X|_{\mathcal{U}}$ et $Y|_{\mathcal{V}}$. Remarquons qu'alors \mathcal{V} ne contient ni orbite puits, ni orbite source, ni singularité selle. Toute orbite de \mathcal{V} sauf éventuellement les séparatrices (de dimension 1) des singularités selles coupe N . Toute orbite de \mathcal{V} disjointe de $W^u(L)$, sauf éventuellement les séparatrices des singularités selles, coupe donc $\partial_1 N$.

Lemme 1.64 *L'intérieur du voisinage \mathcal{V} est disjoint des séparatrices unidimensionnelles des singularités selles.*

Démonstration Supposons que la variété stable de dimension 1 d'une singularité selle σ rencontre \mathcal{V} en un point intérieur x . Le point x n'appartient donc ni à $W^s(L) = h(W^s(K))$, ni à $W^u(L) = h(W^u(K))$. Comme $h^{-1}(x) \notin W^s(K)$, l'orbite de $h^{-1}(x)$ coupe $\partial_1 M$. On peut donc supposer que $h^{-1}(x)$ appartient à $\partial_1 \tilde{M}$.

Mais tout voisinage de tout voisinage de x rencontre $W^s(L)$: en effet, par construction de \mathcal{N} et Y , la variété instable de σ coupe transversalement $W^s(L)$; on conclut par le λ -lemma. Tout voisinage de $h^{-1}(x)$ dans \mathcal{U} rencontre donc $W^s(K)$. Par transversalité de $\partial_1 \tilde{M}$ à X , tout voisinage de $h^{-1}(x)$ dans $\partial_1 \tilde{M}$ rencontre $W^s(K)$. Par compacité de $W^s(K) \cap \partial_1 \tilde{M}$, le point $h^{-1}(x)$ est dans $W^s(K)$. Par suite, x est dans $W^s(L)$ ce qui est impossible.

On fait le même raisonnement si c'est la variété instable de dimension 1 d'une singularité selle qui rencontre l'intérieur de \mathcal{V} en remplaçant W^s par W^u et $\partial_1 \tilde{M}$ par $\partial_2 \tilde{M}$. \square

Quitte à remplacer \mathcal{U} par un voisinage invariant de K du même type (en particulier sans changer n et g) contenu dans son intérieur, on peut supposer que \mathcal{V} est disjoint des séparatrices unidimensionnelles des singularités selles.

On considère $h(\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M})$. C'est une surface compacte à bord topologiquement transverse au flot. Toute orbite de Y coupe au plus une fois cette surface (car h est une équivalence entre X et Y). Enfin cette surface est disjointe de $W^u(L)$ et des séparatrices unidimensionnelles des singularités selles; l'orbite chacun de ses points coupe donc $\partial_1 N$ en un point et un seul. En utilisant la compacité de $h(\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M})$ et de $\partial_1 N$ et la transversalité de $\partial_1 N$ à Y , on voit que $h(\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M})$ se projette, via le flot, difféomorphiquement sur $\partial_1 N$.

Alors la projection de $h(\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M})$ est un voisinage dans $\partial_1 N$ de $\partial_1 N \cap W^s(L)$ par une sous-surface à n composantes de bord. Le genre de $\partial_1 N$ est donc majoré par la somme du genre de $h(\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M})$ et des genres des composantes de $\partial_1 N \setminus W^s(L)$ contenant une composante du bord de la projection de $h(\mathcal{U} \cap \partial_1 \tilde{M})$. Le genre de chacune de ces dernières composantes étant, par construction, au plus égal à 1, le genre de $\partial_1 N$ est majoré par $g + n$; ce qui est contraire au choix de N .

Cette contradiction achève la démonstration de la proposition 1.63 et donc de la proposition 1.61. \square

Chapitre 2

Construction de flots hyperboliques en dimension 3

Ce chapitre est tiré de l'article [BBV] écrit en collaboration avec C. Bonatti et J.L. Vieitez.

On cherche ici à répondre au point 2) de la classification comme défini dans l'introduction, c'est-à-dire qu'on s'intéresse à la réalisabilité de présentations combinatoires abstraites du type de celles définies au chapitre précédent.

Étant donné un champ hyperbolique X sur une variété \mathcal{M} , on a montré au chapitre précédent que le type géométrique d'une partition de Markov (ample) d'un ensemble selle saturé K de X caractérise le germe de X le long de K . Par suite, ce type géométrique caractérise le modèle du germe $[X, K]$. Ceci nous autorise à parler du *modèle d'un type géométrique T* : c'est, s'il existe, l'unique modèle (à équivalence topologique près) dont le maximal invariant admet une partition (ample) de type géométrique T .

Remarque Remarquons qu'étant donné une partition de Markov de type T , dans \mathcal{M} , d'un ensemble selle K , la construction du modèle de $[X, K]$ se fait à partir d'un voisinage de K , par des chirurgies qui ne sont pas nécessairement disjointes de la partition de Markov. A priori, le modèle de $[X, K]$ pourrait donc ne contenir aucune partition de Markov de type T de K .

Le but de cet article est de donner une construction explicite du modèle d'un type géométrique et d'en tirer des corollaires. Nous allons montrer :

Théorème 2.1 *Pour tout type géométrique abstrait T , il existe un modèle dont le maximal invariant admet une bonne partition de Markov de type T .*

Tout modèle se complète en un champ de Smale non singulier sur une variété compacte de dimension 3 sans bord (voir, par exemple, [Fr83]). Le théorème 2.1 montre donc que tout type géométrique abstrait est le type d'une partition d'un ensemble selle saturé d'un flot de Smale non singulier.

Un des intérêts du théorème 2.1 est qu'il implique que tout contre-exemple que l'on peut imaginer en termes de type géométrique existe effectivement.

En tant que pur résultat d'existence, le théorème 2.1 est une généralisation d'un théorème de C. Pugh et M. Shub (voir [PS81]) concernant les suspensions de sous-shifts de types finis. En fait, nous donnons ici une construction du modèle d'un type abstrait quelconque par une suite finie d'opérations élémentaires parmi les suivantes : produit cartésien de segments, quotient par une relation d'équivalence (affine), découpage le long de surfaces constructibles par les opérations précédentes, recollement de variétés le long de parties de leurs bords. L'esprit de ce chapitre est donc plus proche de celui de l'article de Sullivan ([Sul]).

On exhibe donc une variété et un flot explicites représentant un type géométrique donné.

Remarque Le comportement des flots de Smale en dimension 3 décrit au théorème 2.1 va à l'encontre du comportement des difféomorphismes de Smale de surfaces. En effet, Blanchard, Franks et Fried ([BlFr]), puis Bonatti et Jeandenans ([BLJ]) ont relevé de nombreuses obstructions à ce qu'un sous-shift, puis qu'un type géométrique soit réalisable pour les difféomorphismes de Smale des surfaces. On caractérisera d'ailleurs les types géométriques réalisables pour les difféomorphismes des surfaces au chapitre 4.

La construction effectuée du modèle d'un type géométrique montre en fait une version plus précise du théorème 2.1.

Le théorème 2.1 implique que, pour tout ensemble selle saturé K admettant une partition de type T , le modèle de K contient une partition de type T . Nous aimerions que le plongement de cette partition de Markov dans le modèle soit canonique ; c'est-à-dire que nous aimerions que pour deux tels plongements, il existe une équivalence topologique du modèle conjuguant les plongements. Cela est faux en général, mais nous avons montré (proposition 1.38) qu'il suffit pour cela que la partition soit *essentielle*, c'est-à-dire que l'intersection des cubes associés à la partition avec toute orbite soit connexe. La construction effectuée montre en fait :

Corollaire 2.2 *Soit X un champ de vecteurs sur une variété compacte \mathcal{M} de dimension 3 (avec ou sans bord) et soit K un ensemble selle saturé de X admettant, dans \mathcal{M} , une bonne partition de Markov de type géométrique T . Alors il existe une bonne partition de Markov essentielle de K , de type T , incluse dans le modèle de $[X, K]$. (Cette partition est donc unique à équivalence topologique globale du modèle près.)*

2.1 Patrons et ouvrages associés à un type géométrique

On se fixe maintenant et pour toute la suite un type géométrique abstrait T quelconque. La donnée du type T est la donnée de $(n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi)$, où Φ est une application de $\{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, h_i\}\}$ dans $\{k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, v_k\}\} \times \{-, +\}$.

On cherche à reconstruire une dynamique admettant une partition de type T . On commence par construire un difféomorphisme partiellement défini sur des rectangles en

suivant la règle donnée par T . On obtient ainsi un *patron* de T (c'est une légère modification de la notion de réalisation de [BLJ] et [Jea]). Le but étant la construction d'un représentant de la classe d'équivalence du modèle d'un type géométrique, on travaillera avec les objet les plus simples possibles : les patrons considérés seront affines.

Définition 2.3 *Un patron (affine) P du type géométrique T sera la donnée de :*

— *n rectangles orientés affines de \mathbb{R}^2 notés R_i avec des feuilletages horizontaux et verticaux affines, une orientation des horizontales (les verticales sont alors orientées pour former une base directe).*

— *pour tout i compris entre 1 et n , de h_i sous-rectangles horizontaux H_i^j de R_i deux à deux disjoints, disjoints de $\partial^s R_i$ et numérotés en suivant l'orientation des verticales de R_i ,*

— *pour tout i compris entre 1 et n , de v_i sous-rectangles verticaux V_i^j de R_i deux à deux disjoints, disjoints de $\partial^u R_i$ et ordonnés suivant l'orientation des horizontales,*

— *un difféomorphisme φ de l'union $\bigcup_{i,j} H_i^j$ dans l'union $\bigcup_{k,l} V_k^l$ vérifiant : pour tous i,j,k,l tels que $\Phi(i,j) = ((k,l),\varepsilon)$ avec $\varepsilon = \pm 1$, la restriction de φ à H_i^j est un difféomorphisme affine dans V_k^l préservant l'orientation, laissant invariants les feuilletages horizontaux et les feuilletages verticaux des rectangles R_i , préservant ou inversant l'orientation des verticales suivant que ε vaut 1 ou -1 , contractant strictement la direction horizontale et dilatant strictement la direction verticale.*

Lemme 2.4 *Pour tout type géométrique T , il existe un patron de T .*

Démonstration Le seul point éventuellement non évident est l'obtention des propriétés de dilatation-contraction. Les sous-rectangles horizontaux et verticaux étant disjoints des bords verticaux et horizontaux des R_i , ils sont respectivement de hauteur et de largeur inférieures à celles des R_i les contenant. Il suffit de choisir les rectangles R_i tous de même hauteur et de même largeur pour obtenir ces propriétés. \square

Soit $P = \{R_i, H_i^j, V_k^l, \varphi\}$ un patron de T . On notera R l'union des rectangles R_i , et de même, $H = \bigcup_{i,j} H_i^j$ et $V = \bigcup_{k,l} V_k^l$. Comme l'application φ du patron n'est définie que sur un sous-ensemble des R_i , nous donnons un sens à sa suspension : On définit des espaces topologiques $\mathcal{P}_{p,q}$ qui seront les unions de segments d'orbites de points des rectangles du patron entre les temps p et q .

Définition 2.5 *Pour tous réels $p \leq q$, on appellera ouvrage $\mathcal{P}_{p,q}$ associé au patron P l'ensemble :*

$$\mathcal{P}_{p,q} = (R \times [p,q]) / \sim$$

où \sim est la relation d'équivalence engendrée par $(x,t) \sim (\varphi^{-1}(x), t+1)$. On notera plus rapidement $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}_{-\infty,+\infty} = (R \times \mathbb{R}) / \sim$.

Remarques

— Deux points (x,t) et (y,s) de $R \times [p,q]$ sont équivalents par \sim si $s - t = n \in \mathbb{Z}$, et si $\varphi^n(y)$ est défini et égal à x . On en déduit que la relation \sim est fermée dans $R \times [p,q]$ (le domaine de définition de φ est fermé) et donc que les $\mathcal{P}_{p,q}$ sont des espaces topologiques séparés (pour p et q finis).

— Soit $p' \leq p \leq q \leq q'$ (éventuellement infinis). Si (x, t) et (y, s) sont dans $R \times [p, q]$ et sont équivalents dans $\mathcal{P}_{p', q'}$ alors ils sont aussi équivalents dans $\mathcal{P}_{p, q}$. On a donc un plongement naturel de $\mathcal{P}_{p, q}$ dans $\mathcal{P}_{p', q'}$. On notera par la suite π la projection de chaque $R \times \mathbb{R}$ sur \mathcal{P}_∞ . L'image par π de $R \times [p, q]$ est alors $\mathcal{P}_{p, q}$.

On définit, dans la notation qui suit, des coupes transverses des ouvrages $\mathcal{P}_{p, q}$ et \mathcal{P}_∞ . Celles-ci ne nous seront utiles pour l'instant que pour effectuer des schémas, par contre, on s'en servira activement au chapitre 4 :

Notation 2.6 La coupe $\mathcal{P}_{p, q} \cap \{t \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathcal{P}_{p, q}$ est bien définie : si (x, t) et (y, s) appartiennent à $R \times \mathbb{R}$ sont identifiés alors $s - t = n \in \mathbb{Z}$.

En particulier, si p et q sont entiers, on notera $\mathcal{R}_{p, q} = \mathcal{P}_{p, q} \cap \{t \in \mathbb{Z}\} = (R \times \{p, \dots, q\}) / \sim$

On notera également $\mathcal{R}_\infty = \mathcal{P}_\infty \cap \{t \in \mathbb{Z}\} = (R \times \mathbb{Z}) / \sim$.

Par commodité, on dessinera plutôt les coupes $\mathcal{P}_{p, q} \cap \{t \in \mathbb{Z}\}$ que les ensembles $\mathcal{P}_{p, q}$ eux-mêmes.

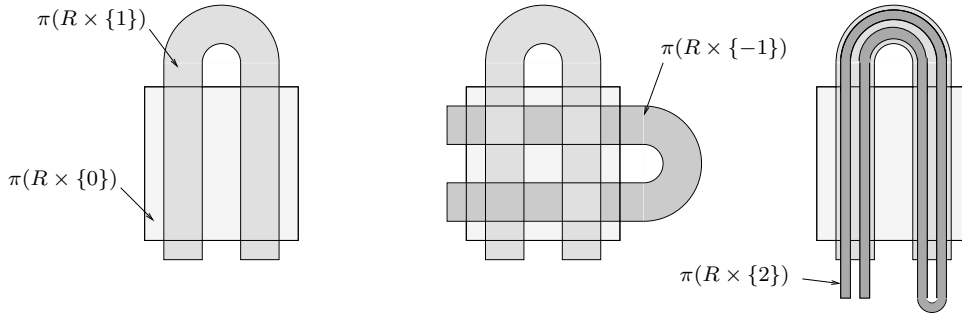


FIG. 2.1 – Vues de $\mathcal{P}_{0,1}$, $\mathcal{P}_{-1,1}$, et $\mathcal{P}_{0,2}$ intersectés par $\{t \in \mathbb{Z}\}$ (c'est-à-dire vues de $\mathcal{R}_{0,1}$, $\mathcal{R}_{-1,1}$, et $\mathcal{R}_{0,2}$) pour un patron du type géométrique à un rectangle du fer à cheval usuel

A priori, φ n'étant pas définie sur les R_i en entier, les ouvrages $\mathcal{P}_{p, q}$ sont des variétés branchées. On va montrer qu'en fait, à cause de la nature du lieu de recollement par \sim , les ouvrages sont des variétés (non branchées) compactes à bord arêtes et coins.

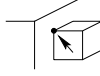
Proposition 2.7 Pour tous réels $p, q \in \mathbb{R}$ (finis), $\mathcal{P}_{p, q}$ est une variété différentielle (affine) séparée, compacte, de dimension 3, à bord, arêtes et coins.

Démonstration Dans le cas où $q - p > 1$, nous allons montrer qu'il existe un atlas $\mathcal{A} = (U_i, \psi_i)$ de $\mathcal{P}_{p, q}$ dont les cartes sont des $\psi_i : U_i \rightarrow V_i$ où V_i est un voisinage de l'origine dans l'un des sous-ensembles de \mathbb{R}^3 suivants :

- 1) \mathbb{R}^3 (point intérieur)
- 2) $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ (point sur une face)
- 3) $(\mathbb{R}^+)^2 \times \mathbb{R}$ (point sur une arête convexe)
- 4) $\mathbb{R}^3 \setminus ((\mathbb{R}^+)^2 \times \mathbb{R})$ (point sur une arête concave)

5) $(\mathbb{R}^+)^3$ (coin convexe)

6) $\overline{\mathbb{R}^3 \setminus ((\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-))}$ (coin “semiconcave”)



et où $\psi_i \circ \pi$ envoie, un à un, les trois feuilletages unidimensionnels standards de $R \times [p, q]$ sur les trois feuilletages unidimensionnels standards des V_i . Les changements de cartes seront chacun des restrictions d’éléments de $(\text{Aff}(\mathbb{R}))^3$ (où $\text{Aff}(\mathbb{R})$ désigne le groupe des transformations affines de \mathbb{R}).

Le cas où $q - p = 1$ est beaucoup plus simple, mais introduit pourtant un type de coin de plus. Comme nous n’aurons pas besoin de ce cas particulier, nous l’évincerons de la démonstration.

Nous devons donc comprendre la structure d’un voisinage de tout point de $\mathcal{P}_{p,q}$. Tout point de $\mathcal{P}_{p,q}$ est une classe d’équivalence pour \sim . Un voisinage d’un point est obtenu en recollant par \sim un voisinage dans $R \times [p, q]$ de chaque point de la classe.

Toute classe d’équivalence de $\mathcal{P}_{p,q}$ est de la forme $(x, t), (\varphi^{-1}(x), t+1), \dots, (\varphi^{-k}(x), t+k)$ avec $0 \leq k \leq q - p$ (l’entier k dépendant bien sûr du point (x, t)). De plus, pour tout i différent de 0 et k , le point $\varphi^{-i}(x)$ est dans l’intérieur de R . En effet, ses images par φ et φ^{-1} sont définies. Il est donc dans l’intersection d’un sous-rectangle horizontal et d’un sous rectangle vertical et, par conséquent, dans l’intérieur des R_i .

On se fixe maintenant un couple (x, t) de $R \times [p, q]$ “premier dans sa classe” (c’est-à-dire un couple (x, t) dont la classe s’écrit $(x, t), \dots, (\varphi^{-k}(x), t+k)$). Nous avons trois cas à considérer suivant que k est égal à 0, 1 ou supérieur à 2. Le cas $k = 0$ est très simple, le cas $k = 1$ est *a priori* facile car il suffit de recoller deux ouverts; la difficulté provient pourtant de faire la liste de tous les cas d’ouverts à recoller possibles, nous le garderons pour la fin.

Cas où $k = 0$

Suivant que x est dans l’intérieur, sur un bord ou égal à un coin d’un R_i et que t est égal à p , q ou appartient à $]p, q[$, on a une carte de type 1), 2), 3), 5). En effet, un voisinage de (x, t) dans $R_i \times [p, q]$ est un voisinage dans $\mathcal{P}_{p,q}$.

Cas où $k \geq 2$

Remarque Soit y un point de R tel que $\varphi^{-2}(y)$ soit défini. Alors il existe un voisinage de y dans R sur lequel φ^{-1} est partout définie.

En effet, φ^{-1} est définie en un point z si et seulement si z est dans $V = \cup_{k,l} V_k^l$. Si $\varphi^{-2}(y)$ est définie, alors y n’est pas dans un côté vertical d’un V_k^l : en effet, l’image par φ^{-1} des côtés verticaux d’un V_k^l est incluse dans les côtés verticaux des R_i et est donc disjointe du domaine de définition de φ^{-1} . Il existe alors un voisinage de y dans R qui est inclus dans V , ce qui conclut.

De même, si y est un point de R tel que $\varphi^2(y)$ est définie, alors il existe un voisinage de y dans R sur lequel φ est partout définie.

Lemme 2.8 *Si $k \geq 2$, la classe de (x, t) admet un voisinage muni d’une carte de type 1).*

Démonstration Pour tout j dans $\{0 \cdots (k-2)\}$, on a, d'après la remarque ci-dessus, tout un voisinage de $y = \varphi^{-j}(x)$ dans R où φ^{-1} est définie. De même, pour tout indice j dans $\{2 \cdots k\}$, il existe un voisinage de $y = \varphi^{-j}(x)$ où φ est définie.

On en déduit que, pour tout j dans $\{1 \cdots (k-2)\}$, $\varphi^{-j}(x)$ a un voisinage dans R qui est envoyé difféomorphiquement par φ^{-1} sur un voisinage de $\varphi^{-(j+1)}(x)$ dans R . De plus ce voisinage est un disque D_j centré en $\varphi^{-j}(x)$ puisque $\varphi^{-j}(x)$ est dans l'intérieur des rectangles.

Les points $(\varphi^{-1}(x), t+1), \dots, (\varphi^{-(k-1)}(x), t+(k-1))$ possèdent donc des voisinages $U_j = D_j \times]t+j-\varepsilon, t+j+\varepsilon[$ dans $R \times [p, q]$ qui sont identifiés points à points dans $\mathcal{P}_{p,q}$ (en effet $(t+1), \dots, t+(k-1)$ sont dans l'intérieur de $[p, q]$).

Si D_j est pris assez petit et si ε est pris également assez petit (en fait strictement plus petit que $1/2$), il n'y a aucune identification de deux points d'un même U_j . Dans ce cas, U_j se plonge dans $\mathcal{P}_{p,q}$. Il suffit donc de voir qu'il se plonge en un voisinage de la classe de (x, t) pour avoir une carte de type 1).

Pour montrer que U_1 (ou U_2, \dots , ou U_{k-1}) induit un voisinage de la classe de (x, t) dans $\mathcal{P}_{p,q}$, il reste donc à voir qu'un voisinage de (x, t) dans $R \times \mathbb{R}$ est identifié par \sim à un sous-ensemble de U_1 et, de même, que tout un voisinage de $(\varphi^{-k}(x), t+k)$ est identifié à tout ou partie de U_1 . C'est bien le cas puisque φ^{-1} est définie au voisinage de x (voir la remarque) donc tout point d'un voisinage de (x, t) dans $R \times \mathbb{R}$ est identifié à un point au voisinage de $(\varphi^{-1}(x), t+1)$ (mais pas réciproquement). De même, φ est définie au voisinage de $\varphi^{-k}(x)$ donc tout point d'un voisinage de $(\varphi^{-k}(x), t+k)$ est identifié à un point au voisinage de $(\varphi^{-(k-1)}(x), t+(k-1))$ donc à un point au voisinage de $(\varphi^{-1}(x), t+1)$. \square

Cas où $k = 1$

La classe de (x, t) ne contient maintenant que deux éléments de $R \times [p, q]$, les points (x, t) et $(\varphi^{-1}(x), t+1)$.

Remarque Si (x, t) possède un voisinage dans $R \times [p, q]$ qui est identifié à une partie d'un voisinage de $(\varphi^{-1}(x), t+1)$ dans $R \times [p, q]$, alors un voisinage de la classe de (x, t) dans $\mathcal{P}_{p,q}$ est difféomorphe à un voisinage de $(\varphi^{-1}(x), t+1)$ dans $R \times [p, q]$. On a alors une carte de type 1), 2), 3) ou 5). De même, si les rôles de (x, t) et $(\varphi^{-1}(x), t+1)$ sont inversés.

La remarque traite les cas :

- où φ^{-1} est définie au voisinage de x et $t \neq q-1$
- où φ est définie au voisinage de $\varphi^{-1}(x)$ et $t \neq p$

Par contraposée, il nous reste cinq cas :

- a) φ^{-1} n'est pas définie au voisinage de x , φ n'est pas définie au voisinage de $\varphi^{-1}(x)$ et t est différent p et de $q-1$.
- b) φ^{-1} n'est pas définie au voisinage de x , φ est définie au voisinage de $\varphi^{-1}(x)$ et $t = p$
- c) φ^{-1} est définie au voisinage de x , φ n'est pas définie au voisinage de $\varphi^{-1}(x)$ et $t = q-1$
- d) φ^{-1} n'est pas définie au voisinage de x , φ n'est pas définie au voisinage de $\varphi^{-1}(x)$ et $t = p$
- e) φ^{-1} n'est pas définie au voisinage de x , φ n'est pas définie au voisinage de $\varphi^{-1}(x)$ et $t = q-1$

Comme $\{t = q - 1 \text{ et } t = p\}$ est exclu par hypothèse ($q - p > 1$), la liste des cas est complète. D'autre part, les cas b) et c) sont symétriques ainsi que les cas d) et e). On traitera les cas a), b) et d).

Remarque Dans les cas considérés, φ^{-1} est définie en x donc x est dans un sous-rectangle vertical V_k^l . Alors, on rappelle que φ^{-1} n'est pas définie sur un voisinage de x dans R_k si et seulement si x est dans le bord vertical de V_k^l ou, de façon équivalente, si et seulement si $\varphi^{-1}(x)$ est dans le bord vertical d'un R_i .

De même, φ est définie en $\varphi^{-1}(x)$ donc $\varphi^{-1}(x)$ est dans un sous-rectangle horizontal H_i^j . Alors φ n'est pas définie sur un voisinage de $\varphi^{-1}(x)$ dans R_i si et seulement si $\varphi^{-1}(x)$ est dans le bord horizontal de H_i^j ou, de façon équivalente, si et seulement si x est dans le bord horizontal de R_k .

Dans le cas a), un voisinage de (x,t) dans $R \times [p,q]$ est donc un demi-espace limité par un plan horizontal tangent au champ, de même, un voisinage de $(\varphi^{-1}(x), t + 1)$ est un demi-espace limité par un plan vertical tangent au champ; on vérifie qu'en recollant ces deux voisinages, on obtient une carte de type 4) (arête concave).

De même, dans les cas b) et c), on obtient une carte de type 4) (arête concave) (on recolle ici deux demi-espaces, l'un tangent, l'autre transverse au champ).

Enfin, dans les cas d), un voisinage de (x,t) dans $R \times [p,q]$ est donc un quart d'espace limité par un plan horizontal tangent au champ et un plan transverse au champ, et un voisinage de $(\varphi^{-1}(x), t + 1)$ est un demi-espace limité par un plan vertical tangent au champ; on vérifie qu'en recollant ces deux voisinages, on obtient une carte de type 6) (coin semiconcave).

De même, dans le cas e), on obtient une carte de type 6). □

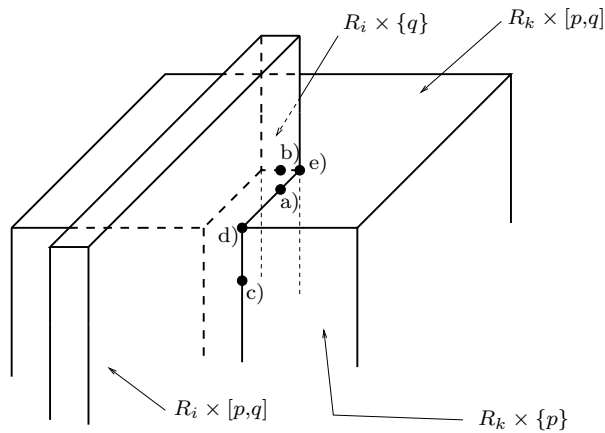


FIG. 2.2 – Différents types de positions dans $\mathcal{P}_{p,q}$

Le corollaire suivant ne nous sera pas utile maintenant mais sera crucial au chapitre 4 :

Corollaire 2.9 *Pour tous entiers p et q (finis), $\mathcal{R}_{p,q}$ est une surface compacte à bords et à coins.*

Démonstration Ce résultat est en fait un corollaire de la démonstration de la proposition 2.7 : des cartes données pour $\mathcal{P}_{p,q}$ et du fait que les changements de cartes préservent trois feuilletages unidimensionnels, on déduit des cartes de $\mathcal{R}_{p,q} = \mathcal{P}_{p,q} \cap \{t \in \mathbb{Z}\}$ et des changements de cartes affines. \square

Corollaire 2.10 *Tout point $\pi(x,t)$ de \mathcal{P}_∞ possède un voisinage inclus dans $\mathcal{P}_{t-3,t+3}$ (via le plongement naturel de $\mathcal{P}_{t-3,t+3}$ dans \mathcal{P}_∞). Par conséquent, \mathcal{P}_∞ est une variété séparée à bords, arêtes et coins.*

Démonstration Soit (x,t) un point de $R \times \mathbb{R}$. Notons, comme dans la démonstration ci-dessus, $k_{p,q}$ le nombre d'éléments distincts de (x,t) dans sa classe d'équivalence dans $R \times [p,q]$.

— Si $k_{t-3,t+3}$ est nul alors il existe un voisinage U de x dans R sur lesquels φ et φ^{-1} ne sont définies nulle part. Alors l'ensemble $U \times]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$ (où $\varepsilon < \frac{1}{2}$) est un ouvert de $R \times \mathbb{R}$, saturé pour \sim . Sa projection est donc un voisinage ouvert de $\pi(x,t)$ dans \mathcal{P}_∞ .

— Si $k_{t-3,t+3}$ est supérieur ou égal à 2, alors, on a vu que x , $\varphi(x)$ ou $\varphi^{-1}(x)$ est dans l'intérieur d'un des R_i . Le cube ouvert $\mathcal{O} = \text{int}(R_i \times]t - 1/4, t + 1/4[)$ est plongé dans $\mathcal{P}_{p,q}$ pour tous $p < t - 1/4$ et $q > t + 1/4$ et $\mathcal{P}_{p,q}$ étant une variété, \mathcal{O} est un ouvert dans $\mathcal{P}_{p,q}$. Le saturé pour \sim de \mathcal{O} est ouvert dans $R \times [p,q]$ pour tous p et q . Le saturé de \mathcal{O} par \sim est donc ouvert dans $R \times \mathbb{R}$. Le plongement de \mathcal{O} dans \mathcal{P}_∞ est un voisinage ouvert de $\pi(x,t)$ dans \mathcal{P}_∞ .

— Si $k_{t-3,t+3}$ est égal à 1 alors $\varphi^2(x)$ et $\varphi^{-2}(x)$ ne sont pas définis et $\varphi(x)$ ou $\varphi^{-1}(x)$ n'est pas défini. Pour fixer les idées, supposons que $\varphi^{-1}(x)$ n'est pas défini et que $\varphi(x)$ est donc définie. Il existe un voisinage U_x de x dans R où φ^{-1} et φ^2 ne sont pas définies et il existe un voisinage $U_{\varphi(x)}$ où φ et φ^{-2} ne sont pas définies. Alors, pour $\varepsilon < \frac{1}{2}$, l'union de $(U_x \times]t - \varepsilon, t + \varepsilon[)$, de $(\varphi(U_x) \times]t - 1 - \varepsilon, t - 1 + \varepsilon[)$, de $(U_{\varphi(x)} \times]t - 1 - \varepsilon, t - 1 + \varepsilon[)$ et de $(\varphi^{-1}(U_{\varphi(x)}) \times]t - \varepsilon, t + \varepsilon[)$ est un ensemble saturé pour \sim dans $R_i \times \mathbb{R}$. D'autre part, pour tout $p \leq t - 3$ et $q \geq t + 3$, on a vu que cet ensemble induit un voisinage dans $\mathcal{P}_{p,q}$. Il contient donc un ouvert saturé dans $R \times [p,q]$ qui est disjoint de $R \times]-\infty, p]$ et $R \times [q, +\infty[$ et donc ouvert dans $R \times \mathbb{R}$.

On a donc montré que tout point (x,t) de \mathcal{P}_∞ possède un voisinage contenu $\mathcal{P}_{t-3,t+3}$, ce qui conclut. \square

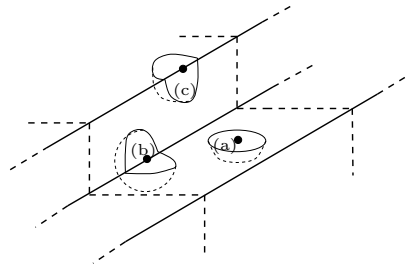


FIG. 2.3 – Points ayant différents types de voisinages dans \mathcal{P}_∞

Corollaire 2.11 \mathcal{R}_∞ est une surface (non-compacte) séparée à bords et coins.

Remarques

— Le champ de vecteur $\frac{\partial}{\partial t}$ de $R \times \mathbb{R}$ se projette naturellement sur un champ de vecteurs X de \mathcal{P}_∞ . L'image de tout point $\pi(x, u)$ de \mathcal{P}_∞ par le temps t du flot de X est $\pi(x, u + t)$. On remarque que le champ X est tangent au bord de \mathcal{P}_∞ et que son flot X^t envoie $\mathcal{P}_{p,q}$ sur $\mathcal{P}_{p+t, q+t}$.

— La surface $\mathcal{R}_{p,q}$ est donc égale à $\bigcup_{k=p}^{k=q} X^k(R)$.

— Tous les points de \mathcal{P}_∞ possèdent un voisinage qui est soit une boule (point intérieur), soit une demi-boule (point sur le bord de \mathcal{P}_∞ mais pas sur une arête, point (a) sur la figure 2.3), soit un quart de boule (point (b) sur une arête convexe), soit enfin trois quarts de boule (point (c) sur une arête concave). Le champ X est tangent non seulement au bord, mais aussi aux arêtes.

La fin de cette partie est destinée à montrer que X admet un ensemble selle saturé (le maximal invariant de $\mathcal{P}_{0,1}$) disjoint du bord de \mathcal{P}_∞ et recouvert par une partition de type T .

Lemme 2.12 *Pour tous p et q (avec $q \geq p + 1$), si un point $\pi(y, s)$ est dans $\mathcal{P}_{p,q}$ et s'il existe un temps t positif tel que $X^t(\pi(y, s))$ ne soit plus dans $\mathcal{P}_{p,q}$, alors pour tout t' plus grand que t , $X^{t'}(\pi(y, s))$ n'est pas dans $\mathcal{P}_{p,q}$.*

Autrement dit, toute orbite périodique qui intersecte $\mathcal{P}_{p,q}$ est contenue dans $\mathcal{P}_{p,q}$ et l'intersection de toute orbite avec $\mathcal{P}_{p,q}$ est connexe.

Démonstration Rappelons que, par définition de la relation d'équivalence \sim , un point $\pi(x, u)$ appartient à $\mathcal{P}_{p,q}$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $u - k \in [p, q]$ et tel que $\varphi^k(x)$ soit défini.

Ceci nous permet tout d'abord pour fixer les idées, de supposer $s \in [p, q]$, cela quitte à échanger (y, s) pour un autre couple dans sa classe d'équivalence.

Ceci fait, il existe, par hypothèse, un temps t positif tel que $X^t(\pi(y, s)) = \pi(y, s + t)$ n'est pas dans $\mathcal{P}_{p,q}$. Ceci implique que $\varphi^k(y)$ n'est pas défini dès que k est assez grand pour que $s + t - k \leq q$. Mais, pour tout $t' > t$, si k est assez grand pour que $s + t' - k \leq q$ alors k est *a fortiori* assez grand pour que $s + t - k$ soit plus petit que q et $\varphi^k(y)$ n'est donc pas défini. On en déduit que, pour tout $t' > t$, $X^{t'}(\pi(y, s)) = \pi(y, s + t')$ n'est pas dans $\mathcal{P}_{p,q}$.

Par un argument usuel, cette propriété pour les orbites positives implique la même propriété pour les orbites négatives. \square

On notera K le maximal invariant de $\mathcal{P}_{0,1}$ sous l'action du flot de X .

Lemme 2.13

— K est égal au maximal invariant de $\mathcal{P}_{p,q}$ pour tous $p \leq 0$ et tout $q \geq 1$,

— K contient l'ensemble non errant de \mathcal{P}_∞ pour le flot de X .

— K est contenu dans l'intérieur de $\mathcal{P}_{0,1}$ (on considère l'intérieur de $\mathcal{P}_{0,1}$ comme variété à bords et non pas comme sous-ensemble de \mathcal{P}_∞),

Démonstration

• Tout d'abord, soit $\pi(x,t)$ un point du maximal invariant de $\mathcal{P}_{p,q}$. On doit montrer que $\pi(x,t)$ est dans le maximal invariant de $\mathcal{P}_{0,1}$. Pour tout s , $X^s(\pi(x,t)) = \pi(x,t+s)$ est dans $\mathcal{P}_{p,q}$ par hypothèse. On en déduit que $\varphi^k(x)$ est défini pour des k arbitrairement grands et arbitrairement petits et donc pour tout k dans \mathbb{Z} . Par conséquent, pour tout s , on peut réécrire $X^s(\pi(x,t))$ comme $\pi(\varphi^{\lfloor t+s \rfloor}(x), t+s - \lfloor t+s \rfloor)$ (où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière), ce qui signifie que, pour tout s , $X^s(\pi(x,t))$ est dans $\mathcal{P}_{0,1}$. Le maximal invariant de $\mathcal{P}_{p,q}$ est donc inclus dans celui de $\mathcal{P}_{0,1}$.

• Soit maintenant $\pi(x,t)$ un point qui n'est pas dans K . On veut montrer que $\pi(x,t)$ est errant. Soient p et q tels que $\pi(x,t) \in \mathcal{P}_{p,q}$.

D'après la première affirmation du lemme, l'orbite, disons positive pour fixer les idées, de $\pi(x,t)$ sort de chacun des $\mathcal{P}_{p',q'}$, en particulier de $\mathcal{P}_{p-3,q+3}$, disons au bout d'un temps T . Par continuité du flot, il en va de même pour un voisinage U de $\pi(x,t)$. D'après la proposition 2.10, on peut choisir U dans $\mathcal{P}_{p-3,q+3}$.

On déduit du lemme 2.12 que l'orbite positive de $X^T(U)$ ne revient plus dans $\mathcal{P}_{p-3,q+3}$ et est donc disjointe de U . On en déduit que $\pi(x,t)$ est errant.

• Enfin, voyons la dernière affirmation du lemme. Pour tout point $\pi(x,t)$ du maximal invariant de $\mathcal{P}_{0,1}$, on sait que $\varphi(x)$ et $\varphi^{-1}(x)$ sont définis et donc que x est dans $H \cap V$. Mais, $\varphi^2(x)$ est également défini, donc $\varphi(x)$ est dans un sous-rectangle horizontal H_k^l ce qui implique que x n'est pas dans le bord horizontal d'un H_i^j . De même, x n'est pas dans le bord vertical d'un V_k^l . Ceci implique que x est dans l'intérieur de $H \cap V$.

On en déduit que $\pi(H \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]) \cap \pi(V \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon])$ est un voisinage de K . Et on vérifie, grâce aux identifications, que cet ensemble est inclus dans $\pi(H \times [0, 1]) \cup \pi(V \times [0, 1])$ et donc dans l'intérieur de $\mathcal{P}_{0,1}$. \square

La proposition suivante découle de la construction :

Proposition 2.14 *L'ensemble K est un ensemble selle saturé et $\mathcal{R} = \{\pi(R_i \times \{0\})\}_{i=1 \dots n}$ est une partition de Markov ample essentielle, de type géométrique T , de K .*

Démonstration L'hyperbolicité de K provient des propriétés de dilatation et de contraction de l'application φ du patron.

Le choix de rectangles disjoints et les propriétés de contraction et de dilatation des feuilletages assure que le maximal invariant K de $\mathcal{P}_{0,1}$ est transversalement totalement discontinu. C'est donc un ensemble selle.

L'ensemble K est saturé dans \mathcal{P}_∞ : en effet, d'après le lemme 2.12, l'orbite d'un point x de $W^s(K) \cap W^u(K)$ doit être entièrement contenue dans $\mathcal{P}_{0,1}$. Le point x est alors dans K par définition de K .

Par construction et d'après le lemme 2.12, $\mathcal{R} = \{R_i\}$ vérifie les propriétés d'une partition de Markov ample essentielle de type T de K . \square

Lemme 2.15

- Les variétés stables et instables de K sont disjointes du bord de \mathcal{P}_∞ .
- Pour tous réels p et q , les intersections $W^s(K) \cap \mathcal{P}_{p,q}$ et $W^u(K) \cap \mathcal{P}_{p,q}$ sont égales à $\bigcap_{-\infty}^0 X^t(\mathcal{P}_{p,q})$ et à $\bigcap_0^{+\infty} X^t(\mathcal{P}_{p,q})$.

Démonstration Le premier point provient de l'invariance du bord de \mathcal{P}_∞ par le flot et du fait que K est inclus dans l'intérieur de $\mathcal{P}_{0,1}$.

Tout point de $\bigcap_{-\infty}^0 X^t(\mathcal{P}_{p,q})$ a son orbite positive incluse dans $\mathcal{P}_{p,q}$. Son ω -limite est donc formée d'orbites du maximal invariant de $\mathcal{P}_{p,q}$, c'est à dire de K . Ceci montre l'inclusion $W^s(K) \cap \mathcal{P}_{p,q} \supset \bigcap_{-\infty}^0 X^t(\mathcal{P}_{p,q})$.

Un point dont l'orbite positive sort de $\mathcal{P}_{p,q}$, n'y revient pas (lemme 2.12) donc n'appartient pas à la variété stable de K , ce qui montre l'inclusion inverse. \square

Convention A partir de maintenant, pour simplifier les notations, puisque nous n'aurons plus besoin du patron P proprement dit, nous allons identifier R, H, V, \dots à leur plongements $\pi(R \times \{0\}), \pi(H \times \{0\}), \pi(V \times \{0\})$ dans \mathcal{P}_∞ . Pour un point x de R , on parlera donc de l'image de x par le temps t du flot de X .

2.2 De l'ouvrage \mathcal{P}_∞ au modèle de T

Pour tout type géométrique T , nous avons construit une variété (non compacte) à bord \mathcal{P}_∞ munie d'un flot possédant un ensemble selle K qui admet une partition essentielle de type T . On veut découper dans \mathcal{P}_∞ un voisinage de K par une variété compacte à bord qui puisse être complétée simplement ensuite en un modèle de T . On doit commencer par trouver dans \mathcal{P}_∞ des surfaces d'entrée et de sortie que chaque orbite ne coupe au plus qu'une fois.

2.2.1 Construction de surfaces d'entrée et de sortie

On veut construire une *paire de surfaces d'entrée sortie*, c'est-à-dire deux surfaces Σ^s et Σ^u dans \mathcal{P}_∞ , compactes à bords, disjointes, telles que :

- toute orbite de $\mathcal{P}_\infty \setminus W^s(K)$ coupe Σ^u en un point et un seul et toute orbite de $\mathcal{P}_\infty \setminus W^u(K)$ coupe Σ^s en un point et un seul,
- la surface Σ^u est dans le futur de tout point de $\mathcal{P}_{0,1} \setminus W^s(K)$ et la surface Σ^s est dans le passé de tout point de $\mathcal{P}_{0,1} \setminus W^u(K)$.

Remarque Sous ces conditions, Σ^s est disjointe de $W^u(K)$ et Σ^u est disjointe de $W^s(K)$. En effet, tout point dont l'orbite positive sort de $\mathcal{P}_{0,1}$ n'est pas dans $W^s(K)$ et tout point dont l'orbite négative sort de $\mathcal{P}_{0,1}$ n'est pas dans $W^u(K)$: ceci est une conséquence du lemme 2.12.

Rappelons que R est l'union des rectangles $R_i \times \{0\}$ plongés dans \mathcal{P}_∞ selon la convention ci-dessus. L'orbite de tout point de \mathcal{P}_∞ coupe R . Pour construire une paire de surface d'entrée-sortie, il suffit donc de trouver deux surfaces Σ^s et Σ^u telles que :

- l'orbite positive de tout point de $R \setminus W^s(K)$ coupe Σ^u en un point et un seul, cela après un temps supérieur à 1,
- l'orbite négative de tout point de $R \setminus W^u(K)$ coupe Σ^s en un point et un seul.

Nous allons à présent construire Σ^u :

Rappelons que H est l'union des sous-rectangles horizontaux H_i^j des R_i sur lesquels l'application de premier retour sur R (qui coïncide avec le temps 1 du flot) est définie. Considérons $A = R \setminus H = R \setminus X^{-1}(R)$. C'est une union de sous-rectangles horizontaux semi-ouverts des R_i (c'est-à-dire des sous-rectangles des R_i privés de certains de leurs côtés). Il y en a $h_i + 1$ dans le rectangle R_i .

On notera \bar{A} l'adhérence de A . La différence $\bar{A} \setminus A$ est formée des côtés horizontaux de \bar{A} qui sont aussi dans H (c'est-à-dire les côtés horizontaux de \bar{A} qui ne sont pas dans le bord de R).

Il sera parfois commode de numéroter les sous-rectangles constituant A : $A_i^0, \dots, A_i^{h_i}$ dans l'ordre de l'orientation des verticales, de A_i^0 en dessous de H_i^1 à $A_i^{h_i}$ au dessus de $H_i^{h_i}$.

Lemme 2.16

- L'orbite positive (ou nulle) de tout point de $R \setminus W^s(K)$ coupe A .
- L'orbite strictement positive de tout point de $\bar{A} \setminus A$ coupe A .
- L'orbite strictement positive de tout point de A ne recoupe pas A .

Démonstration

• On a $W^s(K) \cap R = \bigcap_{\mathbb{N}} X^{-n}(R)$: la démonstration est analogue à celle du lemme 2.15. Par conséquent, pour tout point de $R \setminus W^s(K)$, il existe un dernier n positif tel que $X^n(x)$ soit dans R et donc soit dans $R \setminus X^{-1}(R) = A$.

• La formule $W^s(K) \cap R = \bigcap_{\mathbb{N}} X^{-n}(R)$ indique que $W^s(K)$ est disjoint de A donc de $\partial^s R$. Par invariance, on en déduit que $W^s(K)$ est également disjoint de $\partial^s X^{-1}(R) \cap R = \partial^s H = \bar{A} \setminus A$. On conclut grâce au premier point du lemme.

• Le troisième découle du fait que la partition est essentielle: H est le domaine de définition de l'application de premier retour sur R . □

L'orbite positive de tout point de $R \setminus W^s(K)$ coupe \bar{A} . Cependant, \bar{A} n'est pas encore la surface de sortie recherchée: le problème est que certaines orbites coupent deux fois \bar{A} (les orbites ne coupent qu'une seule fois A , mais on veut une surface compacte). Les points de \bar{A} dont l'orbite positive recoupe \bar{A} sont situés sur $\bar{A} \setminus A$ et leur retour sur \bar{A} est situé sur $\bar{A} \cap \partial^s R$. Pour obtenir une surface de sortie, nous allons pousser $\bar{A} \setminus A$ le long du flot de façon à le recoller à son image par l'application de premier retour. Précisément:

Considérons ψ^u une fonction C^∞ définie sur \bar{A} à prenant ses valeurs dans $[1,2]$, telle que ψ^u est constante égale à 1 sur $A \cap \partial^s R$, telle que ψ^u est constante égale à 2 sur $\bar{A} \setminus A$ et telle que la différentielle de ψ^u sur $A \cap \partial^s R$ et $\bar{A} \setminus A$ est nulle.

Considérons maintenant:

$$S = \bigcup_{x \in \bar{A}} X^{\psi^u(x)}(x)$$

Proposition 2.17 *L'orbite positive de tout point x de $R \setminus W^s(K)$ coupe Σ^u en un point $X^{t(x)}(x)$ et un seul. De plus, le temps $t(x)$ est supérieur à 1.*

Démonstration D'après ce qui précède, il suffit de montrer que l'orbite de tout point de \bar{A} coupe Σ^u en un point et un seul, ce que nous allons faire.

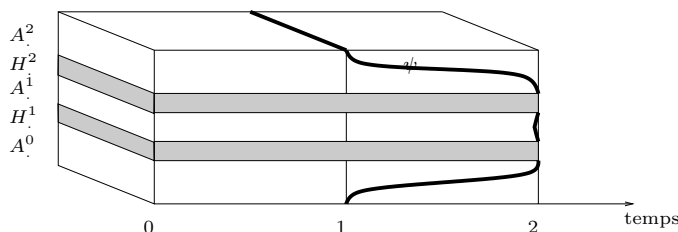


FIG. 2.4 – La fonction ψ^u

D’abord, par construction, l’orbite de tout point x de \bar{A} coupe Σ^u en $X^{\psi^u(x)}(x)$. D’autre part, on a une projection via le flot de X , de \bar{A} sur Σ^u donc toute orbite qui coupe \bar{A} en au plus un point coupe Σ^u en au plus un point. Il suffit donc de voir que les orbites qui coupent deux fois \bar{A} ne coupe Σ^u qu’une seule fois.

Mais une orbite qui coupe \bar{A} deux fois le fait en $x \in \bar{A} \setminus A$ et en $y = X^1(x) \in A \cap \partial^s R$. Cette orbite coupe donc Σ^u en $X^{\psi^u(x)}(x) = X^2(x)$ et en $X^{\psi^u(y)}(y) = X^1(y) = X^2(x)$, donc en un seul point.

De plus, $\psi^u(x)$ est égal à 1, et, pour tout x , le temps $t(x)$ est supérieur ou égal au minimum de ψ^u . \square

Proposition 2.18 *L’ensemble Σ^u est une surface à bord, arêtes et coins, transverse à X .*

Démonstration Par construction de \mathcal{P}_∞ , deux points $X^{t_1}(x_1)$ et $X^{t_2}(x_2)$ où x_1 et x_2 sont dans R ne peuvent être égaux que si $t_1 - t_2 \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que Σ^u est homéomorphe à \bar{A} quotienté par l’application de premier retour de X sur \bar{A} (cette application coïncide avec le temps 1 du flot). Cette application est définie sur les côtés horizontaux formant $\bar{A} \setminus A$ et à valeur dans les côtés horizontaux formant $\bar{A} \cap \partial^s R$.

L’ensemble Σ^u est donc obtenu à partir d’une union finie de rectangles compacts disjoints en recollant une famille finie de segments disjoints, inclus dans le bord de ces rectangles, par un difféomorphisme, sur une famille finie de segments disjoints, inclus dans le bord de ces rectangles, cette dernière famille étant disjointe de la précédente. C’est donc une surface compacte à bord et coins.

La transversalité de Σ^u à X découle de la transversalité de \bar{A} à X et de ce qu’on a obtenu Σ^u en poussant \bar{A} le long du flot pendant un temps différentiable ψ^u .

La structure différentiable de Σ^u le long des recollements existe car on a exigé que la différentielle de ψ^u soit nulle le long des côtés horizontaux de \bar{A} . \square

Remarque La preuve de 2.18 donne un procédé de construction de la surface Σ^u par recollement de rectangles le long de segments de leurs bords, l’ordre de ces segments étant donné par le type géométrique T . Il est d’abord clair que Σ^u ne dépend pas (à difféomorphisme près) de la fonction ψ^u choisie. Ensuite, ceci donne un procédé de calcul algorithmique du genre de Σ^u : Il suffit alors de se rappeler que le genre d’un disque sur lequel on a recollé des anses sur des segments en ordre prescrit est algorithmiquement calculable et de se ramener à ce cas.

Définition 2.19 *On dira que Σ^u est la surface de sortie associée au type géométrique*

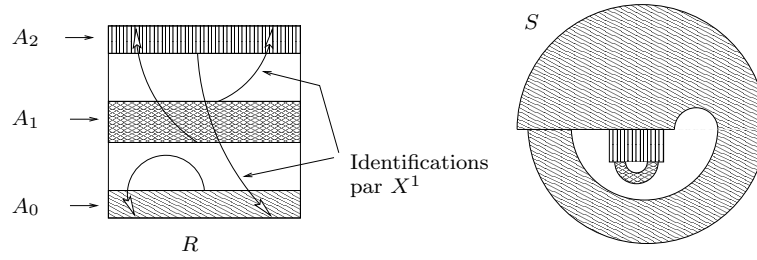


FIG. 2.5 – Construction de la surface Σ^u pour le type géométrique à un rectangle du fer à cheval

T .

Une construction analogue permet d'obtenir une surface d'entrée Σ^s telle que l'orbite négative de tout point de $R \setminus W^u(K)$ coupe Σ^s en un point et un seul ; cela en remplaçant les sous-rectangles horizontaux par les sous-rectangles verticaux et les temps positifs du flot de X par les mêmes temps négatifs.

2.2.2 Découpage de \mathcal{P}_∞ et colmatage des trous

Nous venons de construire une paire de surface d'entrée-sortie Σ^s et Σ^u . Ceci nous permet de définir un temps de sortie T^u : pour tout point x de $\mathcal{P}_\infty \setminus W^s(K)$, T_x^u est l'unique temps tel que $X^{T_x^u}(x)$ appartient à Σ^u et on étend T_x^u sur $W^s(K)$ par $+\infty$. De même, on définit le temps d'entrée T^s sur $\mathcal{P}_\infty \setminus W^u(K)$ (en remplaçant Σ^u par Σ^s) et on l'étend par $-\infty$ sur $W^u(K)$. Rappelons que les temps T_x^u et T_x^s sont respectivement positifs et négatifs sur $\mathcal{P}_{0,1}$.

Lemme 2.20 *Les temps T_x^u et T_x^s sont des fonctions continues de x à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ce sont même des fonctions de classe C^1 respectivement sur $\mathcal{P}_\infty \setminus W^s(K)$ et $\mathcal{P}_\infty \setminus W^u(K)$.*

Démonstration On fait la démonstration pour le temps de sortie T_x^u . Au voisinage d'un point x dont le temps de sortie T_x^u est fini et dont le point de sortie $X^{T_x^u}(x)$ est dans l'intérieur de Σ^u , la continuité du temps de sortie est simplement due à la transversalité de Σ^u à X . Cependant il pourrait exister des difficultés au voisinage des points qui ne sortent pas (c'est-à-dire au voisinage de $W^s(K)$) et au voisinage des points qui sortent dans le bord de Σ^u . C'est pourquoi nous devons distinguer plusieurs cas.

Soit x_n une suite de points convergeant vers x . On notera $T_n = T_{x_n}^u$.

Remarquons tout d'abord que les temps T_n restent minorés : d'après le lemme 2.10, il existe $p \leq 0$ et $q \geq 2$ finis tels que, pour n assez grand, x_n est dans l'ouvrage $\mathcal{P}_{p,q}$. Par construction, Σ^u est incluse dans $\mathcal{P}_{1,2}$ et donc dans $\mathcal{P}_{p,q}$. Les T_n sont alors supérieurs à $-q$. En effet, pour tout point de $\mathcal{P}_{p,q}$ il existe $t \geq -q$ tel que $y = X^t(x) \in R$; le temps T_x^u est alors égal à $t + T_y^u$ avec $T_y^u > 0$ par construction de Σ^u .

Maintenant, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les T_n convergent vers T appartenant à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Nous allons montrer que dans ce cas, T est égal à T_x^u .

• Supposons d'abord T fini. Alors, par continuité du flot et compacité de Σ^u , on a $X^T(x) \in S$. L'unicité du temps de sortie de x implique que $T_x^u = T$.

• Supposons alors $T = +\infty$ et supposons d'abord que les T_n sont finis. Puisque x_n et $X^{T_n}(x_n)$ appartiennent à $\mathcal{P}_{p,q}$, le lemme 2.12 implique que le segment d'orbite joignant ces deux points est inclus dans $\mathcal{P}_{p,q}$. En d'autres termes, $x_n \in \bigcap_{-T_n}^0 X^t(\mathcal{P}_{p,q})$. Comme $T_n \rightarrow +\infty$, on a que $x \in \bigcap_{-\infty}^0 X^t(\mathcal{P}_{p,q})$, c'est-à-dire que $x \in W^s(K)$. Par conséquent, $T_x^u = +\infty = T$.

• Quitte à prendre une sous-suite, il reste le cas où les T_n valent uniformément $+\infty$, c'est-à-dire que $x_n \in W^s(K) \cap \mathcal{P}_{p,q}$. On a vu que la variété stable $W^s(K) \cap \mathcal{P}_{p,q}$ est égale à $\bigcap_{-\infty}^0 X^t(\mathcal{P}_{p,q})$ donc est compacte. Donc $x \in W^s(K)$ et $T_x^u = +\infty = T$.

Dans tous les cas, on a montré que $T_x^u = \lim T_{x_n}^u$. La différentiabilité de T_x^u sur $\mathcal{P}_\infty \setminus W^s(K)$ provient de la transversalité de X à Σ^u . \square

Corollaire 2.21 *Les bords ∂E et ∂S de Σ^s et de Σ^u sont inclus dans le bord de \mathcal{P}_∞ .*

Démonstration Il suffit de voir qu'un point du bord de Σ^u (respectivement de Σ^s) dans l'intérieur de \mathcal{P}_∞ serait un point de discontinuité de T^u (respectivement de T^s). \square

Considérons M^0 la variété obtenue en découpant \mathcal{P}_∞ le long de Σ^s et Σ^u ; formellement :

$$M^0 = \{x \in \mathcal{P}_\infty \text{ tels que } T_x^u \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \text{ et } T_x^s \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}\}$$

Proposition 2.22 *L'ensemble M^0 est une variété compacte à bords et arêtes et coins de dimension 3 contenant K dans son intérieur.*

L'intersection de M^0 avec toute orbite de X est connexe.

Le bord de M^0 est formé de :

— *une surface d'entrée Σ^s et une surface de sortie Σ^u , qui sont transverses au flot et qui intersectent chacune toute orbite en au plus un point,*

— *un nombre fini de composantes tangentes au champ, dont l'union, appelée bord tangent, est égale à l'intersection de M^0 avec le bord de \mathcal{P}_∞ . Ce bord tangent est aussi l'orbite dans M^0 du bord de Σ^s (ou de Σ^u). De plus, il existe un difféomorphisme du bord tangent de M^0 sur $\partial\Sigma^s \times [0,1]$ réalisant une équivalence entre le champ X et le champ $\frac{\partial}{\partial t}$ de $\partial\Sigma^s \times [0,1]$ (on place des coordonnées (x,t) sur le produit cartésien $\partial\Sigma^s \times [0,1]$).*

On a représenté aux figures 2.6 et 2.7 les variétés à bords $\mathcal{P}_{1,2}$ puis M^0 obtenues dans le cas le plus simple possible : K est réduit à une orbite périodique selle sans réflexion, ψ^u est à valeurs dans $[1,2]$.

La figure 2.8 donne une représentation de la variété M^0 obtenue dans un cas plus compliqué : le type géométrique utilisé est celui de la partition à un rectangle du fer à cheval de Smale usuel. Cependant de nombreuses arêtes et coins de M^0 ont été supprimés pour rendre le schéma possible.

Démonstration de la proposition 2.22 Par construction de Σ^s et Σ^u , M^0 est incluse dans la variété compacte $\mathcal{P}_{-m,m}$ où m est le maximum de ψ^u . La continuité de T^s et T^u montre que l'extraction de M^0 consiste effectivement à découper $\mathcal{P}_{-m,m}$ le long de Σ^s et Σ^u , et à ne conserver que les composantes connexes rencontrant K . On en déduit, grâce

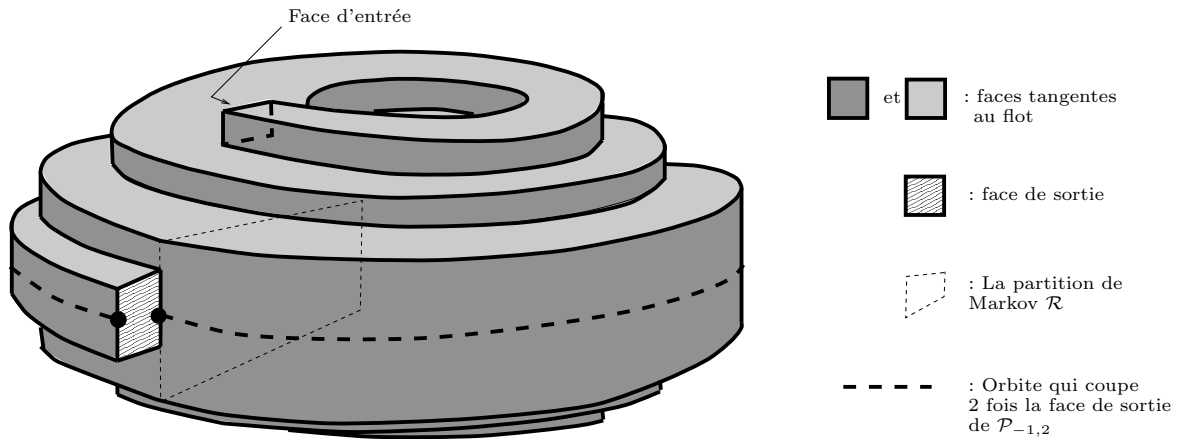


FIG. 2.6 – La variété à bord $\mathcal{P}_{1,2}$ dans le cas où K est réduit à une seule orbite périodique selle

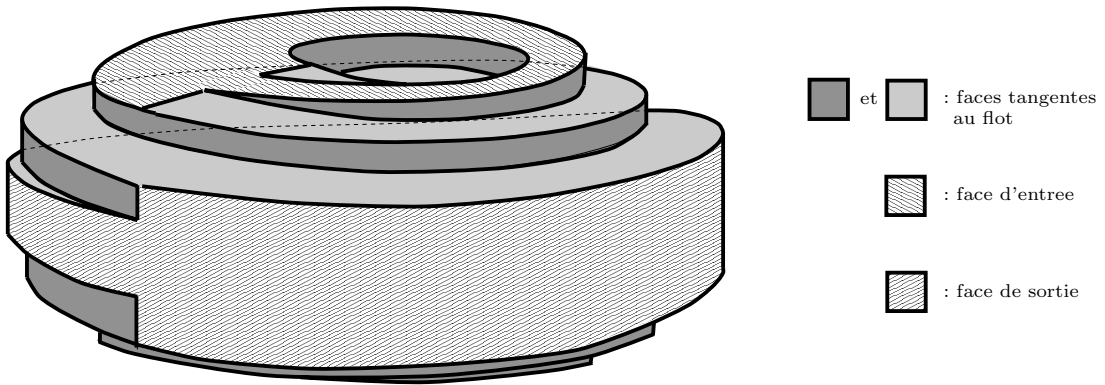


FIG. 2.7 – La variété à bord M^0 obtenue par découpage de $\mathcal{P}_{1,2}$ dans le cas où K est réduit à une seule orbite périodique selle

à 2.21, que M^0 est une variété compacte à bord, arêtes et coins. La structure différentielle provient de ce que Σ^s et Σ^u sont transverses au flot.

L'ensemble K correspond au lieu où $T^s = -\infty$ et $T^u = +\infty$ donc est inclus dans M^0 . L'analyse suivante montre que K est disjoint des différents bords de M^0 et est donc inclus dans son intérieur.

On voit de même que Σ^s et Σ^u sont incluses dans le bord de M^0 . L'intersection de l'orbite de tout point x avec M^0 correspond à l'intervalle de temps $[T_x^s, T_x^u]$, donc est connexe.

Le bord de M^0 dans \mathcal{P}_∞ est égal au lieu où $T^s = 0$ ou $T^u = 0$, c'est-à-dire à $E \cup S$. On en déduit que le bord de M^0 privé de Σ^s et Σ^u est inclus dans le bord de \mathcal{P}_∞ donc est tangent au champ X . De plus, le bord de \mathcal{P}_∞ est disjoint des variétés invariantes de K , toute orbite du bord de \mathcal{P}_∞ coupe donc les bords $\partial\Sigma^s$ et $\partial\Sigma^u$ en un et un seul point. L'intersection d'une orbite avec M^0 étant connexe, toute orbite de $\partial\mathcal{P}_\infty$ coupe M^0 en un segment joignant $\partial\Sigma^s$ à $\partial\Sigma^u$. Le difféomorphisme annoncé consiste simplement à prendre le flot du champ X renormalisé de façon à ce que le temps de sortie d'un point de $\partial\Sigma^s$

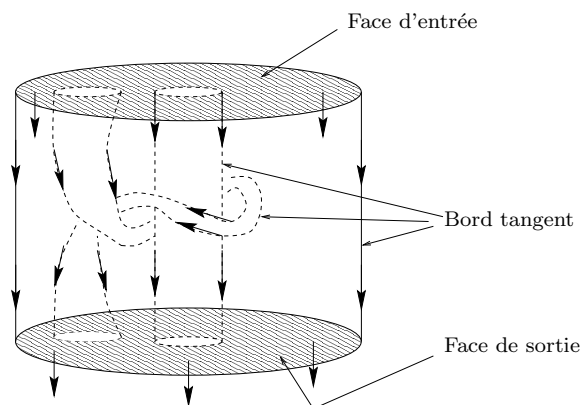


FIG. 2.8 – La variété M^0 obtenue pour la partition à un rectangle du fer à cheval usuel (avec certaines arêtes et certains coins supprimés)

soit égal à 1. □

Nous allons maintenant tuer les bords tangents de M^0 et terminer ainsi la construction d'un voisinage de K par une variété à bord transverse à X :

Chaque composante C du bord de Σ^s est un cercle ; son orbite est une composante du bord tangent de M^0 diffeomorphe à un cylindre $C \times [0,1]$ joignant C à une composante du bord de Σ^u . Le champ X le long de cette composante de bord est équivalent, via ce diffeomorphisme, au champ trivial $\frac{\partial}{\partial t}$ de $C \times [0,1]$.

Pour chaque telle composante C , on choisit alors un disque D dont le bord est diffeomorphe à C . Puis, on colle sur l'orbite de C le cylindre plein $D \times [0,1]$ muni du champ $\frac{\partial}{\partial t}$ via un diffeomorphisme qui recolle les champs.

D'après la proposition 2.22, on supprime par ce procédé toute les composantes du bord de M^0 tangentes au champ X . On obtient donc une variété compacte à bord M , munie d'une extension de X (que nous appellerons toujours X) transverse au bord. Le bord de M est constitué d'un bord d'entrée $\Sigma^{s'}$, diffeomorphe à la surface Σ^s sur chaque composante de bord de laquelle on a recollé un disque et d'un bord de sortie $\Sigma^{u'}$, obtenu lui-aussi en recollant des disques sur le bord de Σ^u .

Les cylindres pleins recollés étant munis du champ $\frac{\partial}{\partial t}$, il est clair que K est le maximal invariant de M . Les propriétés de K (hyperbolicité, saturation,...) sont évidemment toujours vérifiées dans M . Comme cela était déjà vrai dans M^0 , toute composante de M rencontre K .

En résumé, on a donc construit M tel que :

Proposition 2.23 *L'ensemble M est une variété compacte, à bord, de dimension 3, munie d'un champ X transverse au bord. Le maximal invariant de M est un ensemble selle saturé K qui admet la partition de Markov essentielle \mathcal{R} de type géométrique T . Enfin, toute composante connexe de M rencontre K .*

2.2.3 Le couple (M, X) construit est un modèle de T

Pour montrer que M est un modèle de T et donc montrer le théorème 2.1 et le corollaire 2.2, il suffit, d'après la proposition 2.23, de prouver que, pour tout cercle C plongé dans le bord d'entrée $\partial_1 M$ et disjoint de $W^s(K)$, C borde dans $\partial_1 M$ un cercle disjoint de $W^s(K)$.

Proposition 2.24 *Notons $\partial_1 M$ le bord d'entrée de X dans M . Tout cercle C plongé dans $\partial_1 M$ et disjoint de $W^s(K)$ borde, dans $\partial_1 M$, un disque disjoint de $W^s(K)$. En d'autres termes, (M, X) est un modèle de T .*

Remarque Rappelons que la variété M a été construite en recollant des cylindres pleins sur le bord tangent de M^0 . La variété à bord M^0 peut alors être vue comme le saturé dans M par le flot de X de l'union des rectangles de la partition \mathcal{R} .

Si C est un cercle plongé dans $\partial_1 M$ et disjoint du saturé des rectangles de \mathcal{R} , c'est-à-dire de M^0 , alors C borde un disque sur $\partial_1 M$, ce disque étant disjoint de M^0 et donc de $W^s(K)$.

La démonstration de la proposition 2.24 va consister à approcher $W^s(K) \cap \partial_1 M$ par l'intersection avec $\partial_1 M$ du saturé des rectangles d'une petite partition de Markov obtenue en subdivisant la partition \mathcal{R} . Nous allons montrer que la propriété de la remarque ci-dessus se propage à des subdivisions successives de \mathcal{R} , pourvu que les partitions considérées soient essentielles. L'étape fondamentale de la démonstration est constituée des lemmes 2.25 et 2.26.

Lemme 2.25 *Soit $\tilde{\mathcal{R}}$ une partition essentielle de K dans M et soit $\tilde{\mathcal{R}}'$ la partition dont les rectangles sont les sous-rectangles horizontaux de $\tilde{\mathcal{R}}$, c'est-à-dire sont les composantes connexes du domaine de définition de l'application de premier retour.*

Alors $\tilde{\mathcal{R}}'$ est également essentielle.

Démonstration On remarque que le premier retour des rectangles de $\tilde{\mathcal{R}}'$ sur la transversale \tilde{R} (l'union des rectangles de $\tilde{\mathcal{R}}$) est bien définie. Il suffit alors de noter que les points de retour sur \tilde{R} qui ne sont pas dans \tilde{R}' n'ont aucun retour dans \tilde{R}' . En effet, ils n'ont aucun retour dans \tilde{R} car $\tilde{\mathcal{R}}$ est essentielle. \square

Pour toute partition \mathcal{S} de K dans M , on notera $\text{Sat}(\mathcal{S})$ le saturé par le flot de X de l'union des rectangles de \mathcal{S} dans M . De plus, on dira que la partition \mathcal{S} vérifie la propriété (*), si :

(*) *pour tout cercle C sur $\partial_1 M$ disjoint de $\text{Sat}(\mathcal{S})$, le cercle C borde un disque sur $\partial_1 M$ disjoint de $\text{Sat}(\mathcal{S})$*

Lemme 2.26 *Soit $\tilde{\mathcal{R}}$ une partition essentielle de K dans M possédant la propriété (*) ci-dessus. Soit $\tilde{\mathcal{R}}'$ la partition dont les rectangles sont les sous-rectangles horizontaux de $\tilde{\mathcal{R}}$.*

Alors $\tilde{\mathcal{R}}'$ possède aussi la propriété ().*

Démonstration Notons \tilde{R} et \tilde{R}' les unions des rectangles des partitions de Markov $\tilde{\mathcal{R}}$ et $\tilde{\mathcal{R}}'$. On notera également \tilde{H} et \tilde{V} les unions des sous-rectangles horizontaux et verticaux de $\tilde{\mathcal{R}}$. Par définition, on a $\tilde{R}' = \tilde{H}$.

Dans cette démonstration, nous utiliserons les remarques suivantes :

Remarques

i) Pour tout compact D de M , disjoint des variétés invariantes de K et tel que pour tous temps t_1 et t_2 distincts, $X^{t_1}(D) \cap X^{t_2}(D)$ soit vide, l'orbite de D est topologiquement équivalente à $(D \times [0,1], \frac{\partial}{\partial t})$. En effet, la projection le long des orbites de D sur le bord d'entrée $\partial_1 M$ est continue et injective donc est un homéomorphisme. Il suffit alors de renormaliser le temps de sortie.

ii) Pour tous temps t_1 et t_2 distincts, l'intersection $X^{t_1}(\tilde{R} \setminus \tilde{H}) \cap X^{t_2}(\tilde{R} \setminus \tilde{H})$ est vide. En effet, $\tilde{\mathcal{R}}$ étant essentielle, pour tout x dans $\tilde{R} \setminus \tilde{H}$ et tout t strictement positif, $X^t(x)$ n'est pas dans \tilde{R} .

iii) La variété stable locale $W^s(K) \cap \tilde{R}$ est incluse dans \tilde{H} . De même, $W^u(K) \cap \tilde{R}$ est inclus dans l'union \tilde{V} des sous-rectangles verticaux de $\tilde{\mathcal{R}}$.

Soit donc C un cercle sur $\partial_1 M$ disjoint de $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}}')$. Puisque $\tilde{\mathcal{R}}$ vérifie la propriété (*), si C est disjoint de $\text{int}(\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}}))$, alors, C borde un disque disjoint de $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}})$ et, a fortiori, disjoint de $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}}')$.

Sinon, remarquons tout d'abord que l'intersection $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}}) \cap \partial_1 M$ est une sous-surface à bords de $\partial_1 M$ et que l'on peut supposer C en position générique par rapport au bord de cette sous-surface. En effet, le résultat du lemme est indépendant d'une isotopie de C à support disjoint de $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}}')$ (qui est compact et disjoint de C).

On note alors $C^0 = C \cap \text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}})$. D'après la remarque ci-dessus, C^0 est soit une courbe fermée si $C \subset \text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}})$, soit une union finie de segments inclus dans $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}}) \cap \partial_1 M$, à extrémités sur le bord de $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}})$. On note alors $C' = \text{adh}(C \setminus C^0)$; c'est cette fois une union finie de segments d'intérieurs disjoints de $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}})$, et à extrémités sur le bord de $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}})$.

L'orbite de C^0 est, d'après le i) de la remarque précédent la démonstration, un cylindre difféomorphe à $C^0 \times [0,1]$ le long duquel le champ X est topologiquement équivalent à $\frac{\partial}{\partial t}$. Or, les rectangles \tilde{R}_i sont d'une part transverses au champ X et donc au cylindre, et, d'autre part, disjoints du bord de M donc du bord de ce cylindre. On en déduit que l'intersection de l'orbite de C^0 et des \tilde{R}_i est une union de courbes simples, disjointes, compactes et dont les extrémités éventuelles sont situées sur le bord des \tilde{R}_i . Par un argument de position générale, on peut encore une fois supposer cette union finie. Notons $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ces courbes et Γ leur réunion.

On sait que Γ est disjointe de \tilde{H} (car C^0 est disjointe de $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}}')$) mais aussi de l'union des sous-rectangles verticaux $\tilde{V} = X^1(\tilde{H})$ (voir figure 2.9).

- Si une des courbes de Γ (disons γ_j incluse dans \tilde{R}_i) est fermée, alors C borde un disque disjoint de $W^s(K)$. En effet, γ_j borde alors un disque D sur un des \tilde{R}_i . La courbe γ_j est disjointe des sous-rectangles horizontaux et verticaux de \tilde{R}_i . Or, ces sous-rectangles rencontrent tous le bord des \tilde{R}_i , ce qui implique que le disque D est nécessairement disjoint de \tilde{H} et \tilde{V} .

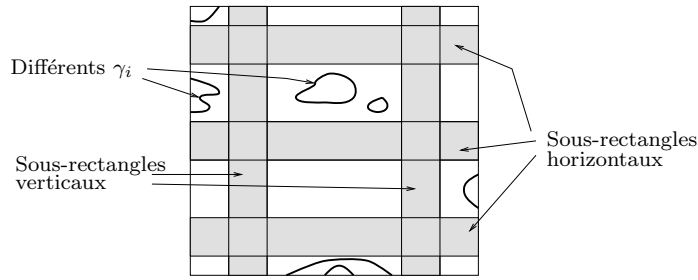


FIG. 2.9 – Position, a priori, des γ_i

Ceci implique, d’une part, que D est disjoint de $W^s(K)$ et de $W^u(K)$ et, d’autre part, que pour tous t_1 et t_2 distincts, $X^{t_1}(D) \cap X^{t_2}(D)$ est vide (voir les *ii* et *iii* de la remarque précédent la preuve). Par conséquent, d’après le *i*) de la même remarque, l’orbite de D dans M est difféomorphe à $D \times [0,1]$. Vu au travers de ce difféomorphisme, C est inclus dans le bord du disque $D \times \{0\}$ de $\partial_1 M$, ce disque étant disjoint de $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}}')$, ce qui conclut.

• Sinon, Γ est une union de segments dans l’union des rectangles \tilde{R} , les extrémités de ces segments étant sur le bord des rectangles \tilde{R}_i et Γ étant disjointe des unions de sous-rectangles horizontaux et verticaux \tilde{H} et \tilde{V} . La remarque précédent la preuve implique que les saturés des différents γ_i sont disjoints.

Sous-lemme 2.27 *Il existe une homotopie dans $\tilde{R} \setminus (\tilde{H} \cup \tilde{V})$ entre l’union de segments $\Gamma = \Gamma_0$ et une union de segments Γ_1 incluse dans le bord de \tilde{R} , l’homotopie (Γ_t) se passant à extrémités des segments fixées.*

Démonstration Pour qu’une telle homotopie (Γ_t) existe, il suffit que chaque composante connexe de $\tilde{R} \setminus (\tilde{H} \cup \tilde{V})$ soit simplement connexe et que son intersection avec le bord de \tilde{R} soit connexe et non vide.

Les \tilde{H}_i^j sont des sous-rectangles horizontaux qui traversent donc les \tilde{R}_i de part en part (de gauche à droite) et les \tilde{V}_k^l sont des sous-rectangles verticaux qui traversent donc les \tilde{R}_k de part en part (de bas à haut); on en déduit que $\tilde{R} \setminus (\tilde{H} \cup \tilde{V})$ est une union finie de sous-rectangles (semi-ouverts) d’adhérences disjointes (chaque composante de $\tilde{R} \setminus (\tilde{H} \cup \tilde{V})$ est donc simplement connexe). Dans chaque rectangle \tilde{R}_i , il y a au moins un \tilde{H}_i^j et au moins un \tilde{V}_i^l ; on en déduit que l’intersection d’une composante de $\tilde{R} \setminus (\tilde{H} \cup \tilde{V})$ avec le bord de \tilde{R} est toujours connexe. □

Sous-lemme 2.28 *Pour chaque s , l’orbite de Γ_s est difféomorphe à un cylindre $\Gamma_s \times [0,1]$ qui intersecte $\partial_1 M$ en $\Gamma_s \times \{0\}$. De plus, l’intersection du saturé de Γ_s et de \tilde{R} est égal à Γ_s .*

Démonstration Ceci provient encore une fois des remarques précédant la preuve. □

Fin de la démonstration du lemme 2.26: L’intersection de l’orbite de Γ^s et de $\partial_1 M$ réalise donc une homotopie (disjointe de $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}}')$ et à extrémités fixées) entre C^0 et une union de courbes à mêmes extrémités que C^0 et incluses dans le bord de $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}})$. En recollant cette dernière union de courbes à C' , on obtient un lacet sur $\partial_1 M$ disjoint de $\text{int}(\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}}))$ et qui

est donc homotope à 0 dans $\partial_1 M \setminus \text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}})$. L'homotopie entre C et ce lacet se passant hors de $\text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}}')$, C est donc homotope à 0 dans $\partial_1 M \setminus \text{Sat}(\tilde{\mathcal{R}}')$, ce qui conclut. \square

En appliquant le lemme 2.26 à des raffinements successifs de la partition R , on a montré :

Corollaire 2.29 *Soit maintenant \mathcal{R}' la partition de K dont les rectangles sont les composantes connexes de $\bigcap_{i=-N}^P X^i(R)$ (pour un certain N et un certain P fixés). Alors \mathcal{R}' est essentielle et vérifie la propriété (*).*

On remarque tout d'abord que le saturé de $\bigcap_{i=-N}^P X^i(R)$ est le même que celui de $\bigcap_{i=0}^{P+N} X^i(R)$. La démonstration se fait alors par récurrence : passer de $N + P$ à $N + P + 1$ revient à appliquer le lemme 2.26.

La démonstration de la proposition 2.24 découle du corollaire :

Démonstration de la proposition 2.24 Soit C un cercle sur $\partial_1 M$ disjoint de $W^s(K)$. L'orbite positive de tout point de C sort de M . Le temps de sortie étant continu et C étant compact, ce temps de sortie est borné par N .

Les points de $\bigcap_{i=-(N+1)}^{N+1} X^i(R)$ ne sortent pas de M , positivement et négativement avant un temps $N + 1$, donc sont disjoints de l'orbite de C . Le saturé de la partition \mathcal{R}' dont les rectangles sont les composantes connexes de $\bigcap_{i=-(N+1)}^{N+1} X^i(R)$ est donc disjoint de C .

Alors d'après le corollaire précédent, C borde sur $\partial_1 M$ un disque disjoint de $\text{Sat}(\mathcal{R}')$ et, a fortiori, de $W^s(K)$. \square

On a ainsi achevé la démonstration de 2.1 et de 2.2.

Le corollaire suivant de la proposition 2.24 sera bien utile dans la suite :

Corollaire 2.30 *Chaque composante connexe de la surface de sortie Σ^u contient une et une seule composante connexe de la lamination de sortie $\mathcal{L}^u = W^u(K) \cap M$. La composante connexe de Σ^u et la composante connexe de \mathcal{L}^u sont de même genre.*

Démonstration D'après la proposition 2.24, tout cercle de $\Sigma^u \setminus \mathcal{L}^u$ borde un disque de $\Sigma^u \setminus \mathcal{L}^u$, ce qui suffit à conclure. \square

Chapitre 3

Présentations finies équivalentes

Les types géométriques de partitions de Markov sont au coeur des descriptions combinatoires des flots hyperboliques que nous avons données dans le chapitre 1. Rappelons que nous avons montré que si deux ensembles selles saturés K et L de deux flots hyperboliques X et Y en dimension 3 admettent des partitions de Markov de même type géométrique, alors les germes de $[X, K]$ et $[Y, L]$ sont égaux. Par suite, les modèles des germes $[X, K]$ et $[Y, L]$ sont égaux. On caractérise donc la dynamique, à équivalence topologique près sur un voisinage filtrant canonique abstrait, par le type géométrique d'une partition de Markov.

Cependant, un ensemble selle saturé admet une infinité de partitions de Markov de types géométriques différents (en effet, un ensemble selle admet des partitions de Markov avec des rectangles de diamètre arbitrairement petit donc avec un nombre arbitrairement grand de rectangles). La suite naturelle, après les chapitres 1 et 2, d'une tentative de classification des flots hyperboliques en dimension 3 consiste à rechercher quand est-ce que deux types géométriques correspondent au même germe de flot le long d'un ensemble selle saturé.

Le but de ce chapitre est de définir un nombre fini d'opérations élémentaires sur les types géométriques telles que les types géométriques de deux partitions de Markov d'un même ensemble selle se déduisent toujours l'un de l'autre par une suite finies d'opérations élémentaires (ce que nous avons appelé le problème *3 faible*) dans l'introduction générale).

Plus précisément, rappelons que les théorème 1.3 et 2.1 nous autorisent à parler du modèle d'un type géométrique quelconque. On peut alors poser la définition suivante :

Définition 3.1 *Nous dirons que deux types géométriques T_1 et T_2 sont équivalents pour les flots si les modèles de T_1 et T_2 sont topologiquement équivalents.*

En d'autres termes, appelons (M, X) le modèle d'un type géométrique T_1 et notons K l'ensemble selle saturé maximal invariant de ce modèle. Par définition du modèle de T_1 , il existe une partition de Markov \mathcal{R}_1 de K dans M tel que \mathcal{R}_1 est de type géométrique T_1 . Alors un type géométrique T_2 est équivalent pour les flots au type T_1 si et seulement si il existe une partition de Markov \mathcal{R}_2 de K dans M telle que \mathcal{R}_2 est de type géométrique T_2 .

Remarque D'après le corollaire 2.2, on peut supposer que les partitions ci-dessus sont essentielles. Ainsi, dans ce chapitre où notre but est d'énumérer des types géométriques équivalents pour les flots, on pourra toujours ne considérer que des partitions essentielles.

Appelons *transitif* un type géométrique qui est le type géométrique d'une partition de Markov d'un ensemble selle saturé transitif. On peut formuler le résultat de ce chapitre à travers la proposition suivante :

Proposition 3.2 *Les types géométriques équivalents pour les flots à un type géométrique transitif donné sont (récursivement) énumérables.*

En fait les opérations élémentaires sur les partitions de Markov que nous allons utiliser pour montrer la proposition 3.2, sont plus intéressantes que la proposition elle-même. Un peu plus précisément, nous allons définir quatre types d'opérations élémentaires sur les partitions de Markov. Ces quatre types d'opérations consistent à (voir figure 3.1) :

- découper un rectangle en deux horizontalement ou verticalement (type 1),
- regrouper deux rectangles d'une partitions en les recollant l'un au dessus de l'autre ou côte-à-côte (quand on peut le faire) (type 1bis),
- dédoubler un rectangle d'une partition (le rectangle et son double se trouvant alors "l'un derrière l'autre" quand on suit le flot) (type 2),
- supprimer le double d'un rectangle (type 2bis).

Les opérations de types 1) et 1bis) sont inverses les unes des autres, ainsi que les opérations de types 2) et 2bis).

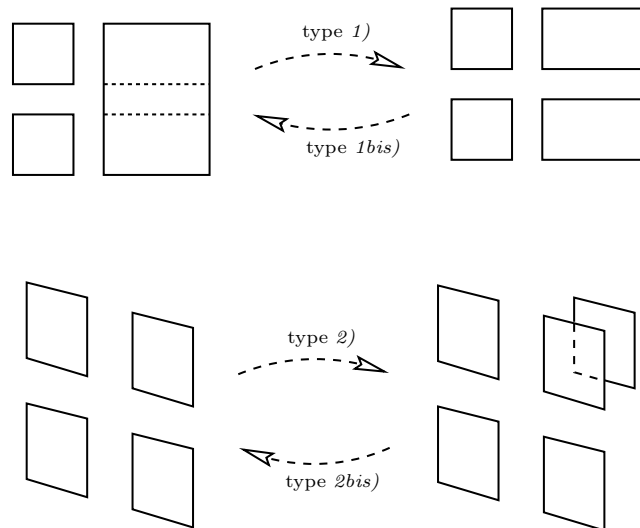


FIG. 3.1 – Les opérations de type 1), 1bis) (dans le sens horizontal), 2) et 2bis)

Nous montrerons alors la proposition suivante :

Proposition 3.3 *Soient \mathcal{R} et \mathcal{S} deux partitions de Markov essentielles d'un ensemble selle transitif K d'un champ de vecteurs hyperbolique X . Alors \mathcal{R} se déduit de \mathcal{S} par une suite finie d'opérations de types 1), 1bis), 2) et 2bis) et d'isotopies le long du flot de X .*

Remarques

— La réciproque à cette proposition sera claire une fois définie effectivement les opérations de types 1), 1bis), 2) et 2bis).

— On peut changer l'hypothèse de transitivité de K en l'hypothèse technique plus faible suivante: K est sans double-bord. Celle signifie que toute feuille de $W^s(K)$ est accumulée par d'autres feuilles et de même pour toute feuille de $W^u(K)$.

On comprend grâce à la proposition précédente par quelles opérations élémentaires est engendrée l'équivalence des types géométriques pour les flots. Ces opérations sont les traductions en termes de types géométriques des opérations de types 1), 1bis), 2) et 2bis) définies sur les partitions de Markov.

Il est intéressant de noter que la proposition 3.3 sera démontrée en deux étapes. En effet, on ne considérera d'abord que des partitions *tracées dans une même section locale*, c'est-à-dire telle qu'il existe une section locale Σ de K qui contient à la fois les rectangles de \mathcal{R} et \mathcal{S} et telle que que les rectangles de \mathcal{R} aussi bien que les rectangles de \mathcal{S} recouvrent $K \cap \Sigma$ (en particulier, les intersections de K avec les unions des rectangles de \mathcal{R} et \mathcal{S} sont égales). On aura alors le premier résultats suivant :

Proposition 3.4 *Soient deux partitions de Markov essentielle \mathcal{R} et \mathcal{S} d'un ensemble selle transitif K tracées dans une même section locale de K . Alors \mathcal{R} se déduit de \mathcal{S} par une suite finies d'opérations de types 1), 1bis).*

Appelons *réalisable pour les difféomorphismes* un type géométrique T tel qu'il existe un difféomorphisme hyperbolique f d'une surface compacte S , un ensemble selle saturé Λ de f et une partition de Markov \mathcal{R} de Λ sur S de type géométrique T . Les traductions en termes de types géométriques des opérations de types 1) et 1bis) engendrent une relation d'équivalence sur les types géométriques qui est bien sûr plus fine que l'équivalence pour les flots. Si l'on se restreint aux types géométriques *réalisables pour les difféomorphismes*, cette relation est simplement la relation d'équivalence induite par la conjugaison topologique des difféomorphismes hyperboliques des surfaces.

En effet, considérons un type géométrique T réalisable pour les difféomorphismes, un difféomorphisme hyperbolique f d'une surface compacte S , un ensemble selle saturé Λ de f et une partition de Markov \mathcal{R} de Λ sur S de type géométrique T . On peut considérer la suspension (\mathcal{M}, X, K) de (S, f, Λ) et voir S plongée dans \mathcal{M} comme une section locale (et, en l'occurrence, également globale) de K . Alors toute partition de Λ pour f peut être vue comme une partition de K tracée dans S et réciproquement. Deux partitions quelconques de Λ sont donc déduites l'une de l'autre par une suite d'opérations de types 1) et 1bis), ceci d'après la proposition 3.4.

Au chapitre 5, on décrira un algorithme qui donne une classification effective des difféomorphismes hyperboliques des surfaces. La discussion ci-dessus nous permet de voir cette classification comme une classification d'un sous-ensemble de flots hyperboliques en dimension 3 (ceux donnés par des types réalisables pour les difféomorphismes), pour une relation d'équivalence plus fine que celle induite par l'équivalence topologique.

Ce chapitre est essentiellement divisé en deux parties. Dans la première, on prouve les propositions 3.4 et 3.3. Dans la seconde, on traduit les effets des opérations de types 1), 1bis), 2) et 2bis) en termes de types géométriques. Ceci suffit à prouver la proposition 3.2.

Remarque Il est intéressant de noter que les résultats de ce chapitre (les propositions 3.3 et 3.4 suivies des traductions en termes de types géométriques des effets des opérations élémentaires) sont tout à fait les pendants de ceux de Williams ([Wi74]) et Parry-Sullivan ([PaSu]) dans le cadre des sous-shifts de type fini (ces résultats décrivent les relations qui engendrent l'équivalence induite par l'équivalence topologique des suspensions de sous-shifts sur les matrices qui présentent ces sous-shifts).

3.1 Les différentes partitions de Markov d'un ensemble selle saturé

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous n'allons considérer que des ensembles selles saturés vérifiant une hypothèse technique : les ensembles selles saturés *sans double-bord*, comme défini ci-dessous.

Définition 3.5 *Soit X un flot hyperbolique sur une variété compacte et K un ensemble hyperbolique saturé de X . Si toute feuille de $W^s(K)$ est accumulée par d'autres feuilles de $W^s(K)$ et si toute feuille de $W^u(K)$ est accumulée par d'autres feuilles de $W^u(K)$ alors on dit que K est sans double-bord.*

Les double-bords correspondent aux variétés stables et instables d'orbites qui n'ont pas d'intersection homocline et ne sont dans aucun cycle hétérocline, ils peuvent donc paraître comme la partie la plus simple des ensembles selles saturés (en quelque sorte, la partie Morse-Smale de l'ensemble selle). Pourtant, ils introduisent toujours des cas particuliers et compliquent lourdement certaines démonstrations. C'est pourquoi, on décidera de les éviter dans ce chapitre et à plusieurs reprises dans la suite.

Remarquons que tout ensemble hyperbolique saturé K sans double-bord possède en particulier les propriétés suivantes :

- toute feuille stable (resp. instable) bord est accumulée par $W^s(K)$ (resp. $W^u(K)$) d'un côté et d'un seul,
- par suite, toute orbite périodique s-bord (resp. u-bord) possède une et une seule séparatrice instable (resp. stable) bord.

Pour ne pas effrayer le lecteur par cette condition supplémentaire qui semble peu naturelle, remarquons que cette condition est moins forte que la transitivité topologique de K . Plus précisément :

Remarque Soit X un flot hyperbolique sur une variété compacte et K une pièce basique selle (c'est à dire un ensemble selle saturé transitif) de X . Alors,

- soit K est réduit à une orbite périodique selle,
- soit K n'a pas de double-bord.

En effet, si K n'est pas réduit à une seule orbite alors toute orbite \mathcal{O} de K est accumulée par d'autres orbites \mathcal{O}_n de K et, par continuité des variétés stables et instables, les variétés stables et instables $W^s(\mathcal{O}_n)$ et $W^u(\mathcal{O}_n)$ s'accumulent sur $W^s(\mathcal{O})$ et $W^u(\mathcal{O})$.

3.1.1 Partitions de Markov amples et ajustées

Dans le chapitre 1.2, nous avons défini et utilisé des rectangles et des partitions de Markov *amples* d'ensembles selles saturés K . Rappelons que, si \mathcal{R} est une partition ample de K dans une section locale Σ de K , alors, en particulier, l'union des rectangles de \mathcal{R} est un voisinage de $K \cap \Sigma$ dans Σ .

Cette définition est très pratique pour obtenir directement l'équivalence topologique de deux champs de vecteurs sur des voisinages d'ensembles selles (voir la proposition 1.33). Par contre, pour construire les différentes partitions de Markov d'un ensemble selle, il sera plus pratique d'utiliser des partitions par des rectangles *ajustés*:

Définition 3.6 *Soit K un ensemble selle saturé. Un rectangle ajusté R à K est un plongement h de $I \times J$ dans une section locale Σ de K , où I et J sont deux segments de \mathbb{R} , où le bord stable $\partial^s R = h(I \times \partial J)$ est formé de deux segments de $W^s(K) \cap \Sigma$ et le bord instable $\partial^u R = h(\partial I \times J)$ est formé de deux segments de $W^u(K) \cap \Sigma$.*

Si, dans la définition ci-dessus, ni le segment I , ni le segment J ne sont réduits à un point, alors on dit que le rectangle correspondant est *non-dégénéré*.

Comme dans le cas des rectangles amples, on supposera toujours un rectangle ajusté R muni de deux feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u de classe C^0 , à feuilles C^1 , triviaux, transverses l'un à l'autre, invariants par l'application de premier retour sur Σ et tels que $\partial^s R$ soit constitué de deux segments de feuilles de \mathcal{F}^s et $\partial^u R$ soit constitué de deux segments de feuilles de \mathcal{F}^u . Ceci implique en particulier que toute feuille de \mathcal{F}^s dans R joint les deux côtés instables de R et que toute feuille \mathcal{F}^u dans R joint les deux côtés stables de R .

On définit alors les notions de sous-rectangle (ajusté) horizontal, vertical d'un rectangle ajusté, de cube associé à un rectangle ajusté comme pour les rectangles amples.

Définition 3.7 *Une partition de Markov ajustée de K est la donnée d'une section locale Σ de K et d'une collection finie de rectangles ajustés disjoints R_1, \dots, R_n dans Σ tels que :*

— $K \cap \Sigma$ soit recouvert par l'union des R_i et K est le maximal invariant de l'union des cubes associés aux R_i ,

— Pour tous i , le premier retour de R_i sur Σ est bien défini; notons le $f(R_i)$.

— Pour tous i et j , l'intersection $f(R_i) \cap R_j$ a un nombre fini de composantes. Chacune de ces composantes est un à la fois un sous-rectangle (ajusté) horizontal de $f(R_i)$ et un sous-rectangle (ajusté) vertical de R_j .

— Il existe une métrique sur Σ telle que pour tout x appartenant à un R_i tel que $f(x)$ soit dans un R_j , tout vecteur tangent en x à \mathcal{F}^s soit contracté par f et tout vecteur tangent en x à \mathcal{F}^u soit dilaté par f .

Remarques

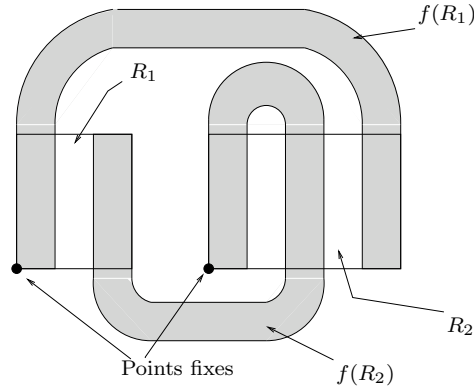


FIG. 3.2 – Une partition ajustée

— Si K est sans double bord alors, pour toute partition de Markov ajustée \mathcal{R} de K , tous les rectangles de \mathcal{R} sont nécessairement non-dégénérés.

— Comme pour les partitions amples, les propriétés de contraction-dilatation des vecteurs tangents à \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u exigées dans la définition ci-dessus implique que les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sur un rectangle R_i d'une partition ajustée de K prolongent les laminations $W^s(K) \cap R_i$ et $W^u(K) \cap R_i$. En particulier, comme les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont supposés triviaux, ceci implique que toute composante connexe de l'intersection d'une feuille de $W^s(K)$ (resp. $W^u(K)$) avec R_i est un segment qui joint les deux côtés instables (resp. stables) de R_i .

— Contrairement au cas des partitions amples, dans le cas d'une partition \mathcal{R} ajustée (en notant R l'union des rectangles de la partition), comme représenté à la figure 3.2, on a toujours $\partial^s f(R) \subset R$ et $\partial^u R \subset f(R)$ (voir le lemme 3.8).

On définit le type géométrique d'une partition de Markov ajustée exactement comme on a défini le type géométrique d'une partition de Markov ample.

L'union des rectangles d'une partition ajustée de K dans une section Σ ne forme pas un voisinage de $K \cap \Sigma$ dans Σ ; c'est pourquoi nous n'avons pas utilisé de telles partitions pour obtenir une caractérisation de la dynamique sur un voisinage de K .

Par contre, les bords des rectangles ajustés et des partitions ajustées de K sont des segments $W^s(K) \cap \Sigma$ et $W^u(K) \cap \Sigma$. Autrement dit, les contours des rectangles des partitions ajustées de K sont dessinés par les variétés invariantes de K ; cette propriété sera pratique pour construire les différentes partitions ajustées de K tracées dans Σ (voir surtout le chapitre 5).

En fait, dans ce chapitre, nous allons utiliser des partitions ajustées surtout car les collections de rectangles ajustés qui forment des partitions ajustées admettent une caractérisation très pratique :

Lemme 3.8 *Soit K un ensemble selle saturé sans double-bord et soit \mathcal{R} la donnée d'une section locale Σ et d'une collection finie de rectangles ajustés disjoints recouvrant $K \cap \Sigma$. On suppose que l'application de retour f sur Σ est bien définie sur les rectangles de \mathcal{R} et on note R l'union de ces rectangles. On suppose les rectangles de \mathcal{R} muni de deux*

feuilletages triviaux transverses \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u , invariants par f , et tels que, pour une métrique adaptée, f contracte (resp. dilate) uniformément les vecteurs tangents à \mathcal{F}^s (resp. \mathcal{F}^u). Alors on a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

1. \mathcal{R} est une partition de Markov ajustée de K ,
2. $\partial^s f(R) \subset \partial^s R$ et $\partial^u f(R) \supset \partial^u R$,
3. $(\partial^s f(R) \cap K) \subset (\partial^s R \cap K)$ et $(\partial^u f(R) \cap K) \supset (\partial^u R \cap K)$.

Remarque Soit R_i un rectangle ajusté d'un ensemble selle saturé K et tracé dans une section locale Σ de K . Si K est sans double-bord, alors R_i est non-dégénéré. Alors, pour tout côté δ de R_i , on peut désigner les deux côtés (locaux) de δ dans Σ de la façon suivante : le côté situé vers l'extérieur de R_i et le côté situé vers l'intérieur de R_i

Lemme 3.9 Soit K un ensemble selle saturé sans double-bord. Alors pour tout rectangle R_i d'une partition de Markov ajustée \mathcal{R} de K :

- tout côté stable de R_i est accumulé par $W^s(K)$ du côté de l'intérieur de R_i et seulement de ce côté,
- tout coin x de R_i est accumulé par des points de $K \cap \partial^u R_i$.

(On a bien sûr le même lemme en échangeant directions stables et instables).

Démonstration On montre d'abord la première affirmation. Soit Σ la section locale de K dans laquelle sont tracés les rectangles de \mathcal{R} et soit δ^s un côté stable de R_i . On raisonne par l'absurde et on suppose que δ^s est accumulé par des feuilles de $W^s(K) \cap \Sigma$ du côté situé vers l'extérieur de R_i .

Puisque R_i est un rectangle ajusté, les côtés instables de R_i sont portés par des feuilles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 de $W^u(K) \cap \Sigma$. Les feuilles de $W^s(K) \cap \Sigma$ qui accumulent δ^s à l'extérieur de R_i coupent \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 en des points qui ne sont pas dans R_i mais qui sont arbitrairement proches de R_i . Or K est saturé donc tout point d'intersection de $W^s(K)$ et \mathcal{F}_1 ou \mathcal{F}_2 est dans K . Par conséquent, δ^s est accumulé par des points de $(K \cap \Sigma) \setminus R_i$ (voir figure 3.3).

Mais K est recouvert par les rectangles de \mathcal{R} qui sont des compacts disjoints et sont en nombre fini. Donc R_i ne peut pas être accumulé par des points de $K \setminus R_i$.

On aboutit à une contradiction. Par conséquent, δ^s n'est pas accumulé par $W^s(K) \cap \Sigma$ à l'extérieur de R_i . Par suite, comme K n'a pas de double-bord, δ^s est accumulé par des feuilles de $W^s(K) \cap \Sigma$ du côté de l'intérieur de R_i . Ceci montre la première affirmation.

La seconde affirmation est une conséquence directe : les feuilles de $W^s(K) \cap \Sigma$ qui accumulent δ^s du côté de l'intérieur de R_i coupent nécessairement les côtés instables δ_1^u et δ_2^u de R_i en des points arbitrairement proches de δ^s ; comme K est saturé, ces points sont dans $\delta_1^u \cap K$ et $\delta_2^u \cap K$. \square

Démonstration du lemme 3.8

$1 \Rightarrow 2$: Par définition d'un rectangle ajusté, pour tout rectangle R_i de \mathcal{R} , les côtés stables de R_i sont des segments de $W^s(K)$ et les côtés instables de R_i sont des segments de $W^u(K)$. Comme K est saturé, on en déduit que les coins de R_i sont des points de K . Par suite, les coins de $f(R_i)$ sont des points de K .

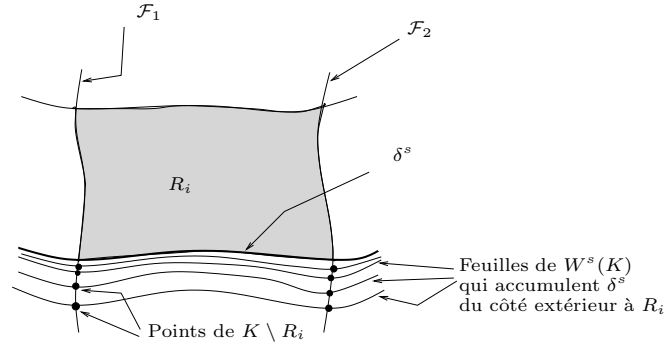


FIG. 3.3 – Si un rectangle ajusté R_i était accumulé à l'extérieur par des feuilles de $W^s(K)$, alors il serait accumulé à l'extérieur par des points de K

Puisque R recouvre $K \cap \Sigma$, tous les coins de $f(R_i)$ sont donc dans R . Puisque toute composante connexe de $R \cap f(R_i)$ est un sous-rectangle vertical de R , les coins de $f(R_i)$ ne peuvent être ni dans l'intérieur de R , ni sur le bord instable de R . Par conséquent, les coins de $f(R_i)$ sont nécessairement sur le bord stable de R . De plus, toute composante de $R \cap f(R_i)$ est également un sous-rectangle horizontal de $f(R_i)$; on en déduit que les deux coins inférieurs de $f(R_i)$ sont dans un même côté stable de R et de même pour les deux coins supérieurs. Par conséquent, les deux bords stables de $f(R_i)$ sont inclus dans le bord stable de R . On a ainsi montré l'inclusion $\partial^s f(R) \subset \partial^s R$; l'autre inclusion se montre de même.

$2 \Rightarrow 3$: est trivial puisque $K \cap \Sigma$ est invariant par f .

$3 \Rightarrow 2$: Par contradiction supposons que 3 soit vérifié par \mathcal{R} mais pas 2. Pour fixer les idées, supposons que $\partial^s f(R) \not\subset \partial^s R$ (la cas où le problème a lieu avec $\partial^u R$ se traite de même). Alors, on a nécessairement un coin d'un rectangle R_j qui est dans l'intérieur d'un côté stable d'un rectangle $f(R_i)$. Mais, si on note maintenant γ le côté instable de R_j partant de x , alors, sachant que x est dans l'intérieur d'un côté stable de $f(R_i)$ et sachant que les différents $f(R_k), k = 1 \dots n$ sont disjoints, on a un voisinage de x dans γ qui est disjoint de $\partial^u f(R)$. Mais, d'après le lemme 3.9, comme K est sans double-bord, x est accumulé par des points de $\gamma \cap K$. Par suite, $\partial^u f(R)$ ne peut pas contenir $\partial^u R_j \cap K$ et on contredit donc 3.

$2 \Rightarrow 1$: Comme on a des feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u triviaux invariants, toute composante connexe de $R_i \cap f(R_j)$ est un sous-rectangle à la fois de R_i et de $f(R_j)$. Il reste à montrer que ces sous-rectangles sont respectivement verticaux et horizontaux. Sous l'hypothèse 2, on se convainc facilement que les deux seuls problèmes à éviter sont ceux de la figure 3.4. Mais la figure de gauche est en fait impossible pour la raison suivante: d'après le lemme 3.9, comme K est sans double-bord, tout côté stable de R_i est accumulé par des feuilles de $W^s(K)$ du côté intérieur de R_i et seulement de ce côté, tout côté stable de $f(R_j)$ est accumulé par des feuilles de $W^s(K)$ du côté intérieur de $f(R_j)$ et seulement de ce côté. La figure de droite est impossible pour la raison transposée dans la direction instable. \square

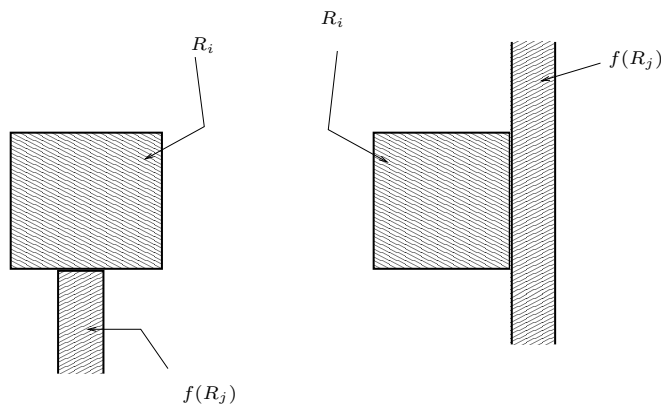


FIG. 3.4 – Deux types d’intersections interdites pour une partition de Markov mais qui vérifient la condition 2

Notre but dans ce chapitre est de rechercher l’ensemble des types géométriques des partitions de Markov d’un ensemble selle donné. Pour ce propos, il est indifférent de considérer des partitions de Markov amples ou des partitions de Markov ajustées : nous allons voir que l’ensemble des types géométriques de partitions de Markov amples d’un ensemble selle saturé K est égal à l’ensemble des types géométriques de partitions de Markov ajustées de cet ensemble K . Pour montrer cela, nous allons expliquer comment modifier une partition ample en une partition ajustée de même type géométrique et réciproquement.

- Rappelons que tout rectangle R d’une partition de Markov ample d’un ensemble selle saturé K possède deux feuilletages triviaux transverses qui prolongent $W^s(K) \cap R$ et $W^u(K) \cap R$. Puisque ces feuilletages forment des coordonnées globales sur R , il est immédiat qu’il existe un unique rectangle ajusté R' de K tel que $(K \cap R) \subset R' \subset R$.

Définition 3.10 Soit R un rectangle d’une partition de Markov ample d’un ensemble selle K . On appellera *coeur de R* l’unique rectangle ajusté R' tel que $(K \cap R) \subset R' \subset R$.

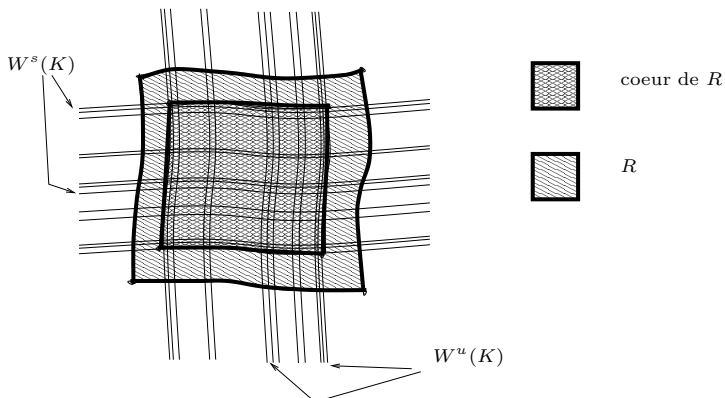


FIG. 3.5 – Un rectangle R et le coeur de R

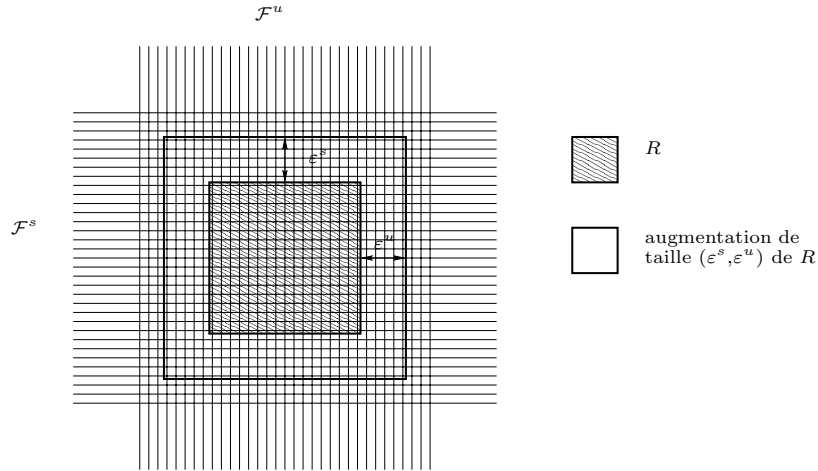


FIG. 3.6 – Un rectangle R et son augmentation R' de taille $(\varepsilon^s, \varepsilon^u)$

La preuve du lemme suivant est claire en utilisant les feuilletages stable \mathcal{F}^s et instable \mathcal{F}^u d'une partition ample.

Lemme 3.11 *Soit $\mathcal{R} = \{R_i\}$ une partition de Markov ample d'un ensemble selle K . Alors la collection des coeur des rectangles R_i est une partition de Markov ajustée de K de même type géométrique que \mathcal{R} .*

- Réciproquement, étant donné un rectangle ajusté, on peut augmenter un peu ce rectangle pour obtenir un rectangle ample. Nous allons voir que l'on *augmente* de façon appropriée tous les rectangles d'une partition de Markov ajustée, on obtient une partition de Markov ample de même type géométrique.

Soit $\mathcal{R} = \{R_i\}$ une partition de Markov ajustée d'un ensemble selle K dans une section locale Σ , soit f l'application de retour sur Σ et soit $R = \cup R_i$. Alors, on peut étendre les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u dont est muni R sur un voisinage U de R dans Σ (en gardant les propriétés de transversalité, d'invariance et de contraction-dilatation par f) (voir, par exemple, [PaTa, partie 2.3] ou [BLJ, proposition 5.3.1]).

Définition 3.12 *Quitte à restreindre le voisinage U de R , on peut supposer que ce voisinage est un produit sur lequel les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u forment des coordonnées globales. Alors, pour tout couple de réels positifs $(\varepsilon^s, \varepsilon^u)$ assez petits, l'augmentation de taille $(\varepsilon^s, \varepsilon^u)$ de \mathcal{R} sera la collection $\{\tilde{R}_i\}$ de rectangles amples tracés dans Σ définis comme suit :*

\tilde{R}_i est l'ensemble des points x de U tel que la feuille de \mathcal{F}^s qui contient x est à une distance inférieure à ε^s de R_i et la feuille de \mathcal{F}^u qui contient x est à une distance inférieure à ε^u de R_i (il est clair que \tilde{R}_i est alors un rectangle ample).

Lemme 3.13 *Soit \mathcal{R} une partition de Markov ajustée de K tracée dans une section locale Σ . Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\tilde{\mathcal{R}}$ l'augmentation de taille $(\varepsilon, \varepsilon)$ de \mathcal{R} . Alors, pour ε assez petit, $\tilde{\mathcal{R}}$ est une partition de Markov ample de K de même type géométrique que \mathcal{R} .*

Démonstration Tout d'abord, pourvu que ε soit assez petit, les rectangles de $\tilde{\mathcal{R}}$ sont disjoints. Par définition de l'augmentation d'une partition, ce sont des rectangles recouvrant $K \cap \Sigma$ et, en notant f l'application de retour sur Σ , ces rectangles sont munis de feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u invariants par f et dont les directions sont uniformément contractée et dilatée par f . Soit $\lambda < 1$ une constante de contraction.

Ces propriétés de contraction et dilatation des vecteurs tangents à \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u montrent que, pour tout j , $f(\tilde{R}_j)$ est l'augmentation du rectangle de taille $(\varepsilon_j^s, \varepsilon_j^u)$ du rectangle R_j où $\varepsilon_j^u \leq \lambda\varepsilon$ et $\varepsilon_j^s \geq \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Pour tous i et j , ceci et le fait que toute composante de $R_i \cap f(R_j)$ est à la fois un sous-rectangle vertical de R_i et un sous-rectangle horizontal de $f(R_j)$ montre que toute composante de $\tilde{R}_i \cap f(\tilde{R}_j)$ est à la fois un sous-rectangle vertical de \tilde{R}_i et un sous-rectangle horizontal de $f(\tilde{R}_j)$ (voir la figure 3.7). On en déduit de $\tilde{\mathcal{R}}$ est une partition ample de K .

Il est clair que $\tilde{\mathcal{R}}$ et \mathcal{R} ont même type géométrique (en notant \tilde{R} et R les unions des rectangles, on a une bijection entre les composantes connexes de $f(\tilde{R}) \cap \tilde{R}$ et celles de $f(R) \cap R$ données par l'inclusion). \square

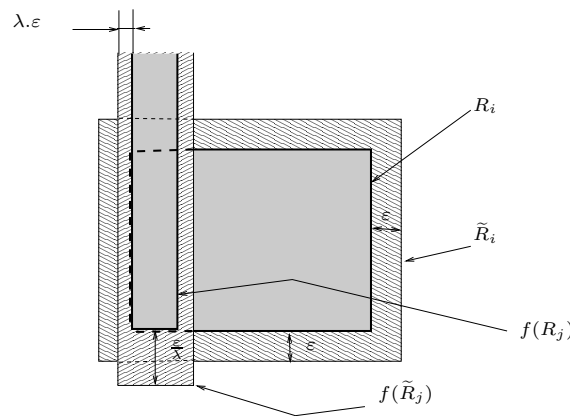


FIG. 3.7 – L'augmentation de \mathcal{R} et le résultat sur les rectangles de $f(\mathcal{R})$

3.1.2 Partitions de Markov d'un ensemble selle saturé tracées dans une même section locale

Le but de cette sous-partie est le suivant : On considère un ensemble selle saturé K et on veut montrer que deux partitions de Markov ajustées \mathcal{R} et \mathcal{S} de K tracées dans une même section locale de K se déduisent l'une de l'autre par une suite d'opérations très simples consistant à couper un rectangle en deux dans le sens horizontal ou vertical ou à effectuer l'opération inverse (recollement de deux rectangles l'un au-dessus de l'autre ou côte-à-côte).

Attention, pour nous, l'expression " \mathcal{R} est tracée dans Σ " signifie :

- que les rectangles de \mathcal{R} sont inclus dans Σ ,
- que les retours des rectangles de \mathcal{R} dans Σ sont bien définis,
- que l'union des rectangles de \mathcal{R} recouvre $K \cap \Sigma$.

Remarques

— Le fait important est que les deux partitions ci-dessus \mathcal{R} et \mathcal{S} soient tracées dans une même section locale Σ et pas quelle est cette section locale Σ exactement. Autrement dit, on pourra changer une première section Σ en une autre section locale Σ' pourvu que Σ' contienne aussi les rectangles de \mathcal{R} et \mathcal{S} , leur retours et telle que les rectangles de \mathcal{R} et \mathcal{S} recouvrent $\Sigma' \cap K$.

— On a déjà remarqué dans l'introduction que l'on peut se restreindre à ne considérer que des partitions essentielles. Ceci aura par exemple l'avantage suivant :

— Soit \mathcal{R} une partition ajustée essentielle de K tracée dans Σ . On note f l'application de retour (*a priori* seulement partiellement définie) sur Σ . Alors, quitte à étendre Σ en une autre section locale Σ' (dans laquelle est encore tracée \mathcal{R} , c'est-à-dire telle que $\Sigma' \cap K = \Sigma \cap K$), on pourra toujours supposer que, pour tout n , f^n est définie sur l'union des rectangles de R .

Il suffit, en effet, par exemple de multiplier le champ par une fonction lisse strictement positive pour que le temps de retour soit égal à 1, puis de remplacer Σ par la surface $\Sigma' = \Sigma \cup \mathcal{R}_\infty$ (où la surface \mathcal{R}_∞ associée à \mathcal{R} a été construite au chapitre précédent, corollaire 2.11 ; c'est une surface non-compacte, sur laquelle f est globalement définie et telle que $\mathcal{R}_\infty \cap K = R \cap K$).

— Supposons K réduit à une orbite périodique selle et notons alors x_1, \dots, x_n les points d'intersection de Σ avec K . Alors l'unique partition ajustée de K est la partition dont les n rectangles dégénérés sont les points x_1, \dots, x_n eux-mêmes. L'énumération des types géométriques dans ce cas est donc entièrement triviale.

Rappelons que si K est transitif, alors soit K est réduit à une orbite périodique isolée, soit K est sans double-bord (voir la remarque au début de la section). Comme le premier cas est trivial de notre point de vue (voir la remarque ci-dessus), le lecteur gêné pourra donc remplacer, dans toute la suite du chapitre, “sans double-bord” par “transitif”.

Nous allons maintenant définir des opérations élémentaires sur les partitions de Markov. Soit R un rectangle d'une partition de Markov ajustée de K tracé dans une section locale Σ .

Par définition d'une partition de Markov ajustée, \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u prolongent les laminations $W^s(K) \cap R$ et $W^u(K) \cap R$. D'autre part, comme les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont triviaux, toute composante d'intersection d'une feuille de \mathcal{F}^s (donc aussi de $W^s(K)$) avec R est un segment allant d'un bord instable de R à l'autre. On appellera *barreau horizontal* de R une composante d'intersection de $W^s(K)$ avec R . De même, on appellera *barreau vertical* de R une composante d'intersection de $W^u(K)$ avec R .

On suppose maintenant R muni d'orientations de ses bords horizontaux et verticaux. Les barreaux horizontaux de R sont alors ordonnés par l'orientation des côtés verticaux de R . De même, les barreaux verticaux de R sont ordonnés par l'orientation des côtés horizontaux de R .

On définit le bas, le haut, la gauche et la droite en décidant que les orientations des côtés verticaux et horizontaux de R vont de bas en haut et de gauche à droite.

On dira qu'un barreau horizontal δ_2 est “immédiatement au-dessus” d'un autre barreau horizontal δ_1 si δ_2 est au-dessus de δ_1 et s'il n'existe aucun barreau horizontal de R entre

δ_1 et δ_2 .

On définit de même l'expression "un barreau vertical de R est immédiatement à droite d'un autre".

Remarque Les extrémités d'un barreau horizontal de R sont des points de K : en effet, par définition d'un barreau horizontal, ce sont des points d'intersection d'un segment de $W^s(K)$ et des côtés verticaux de R (qui sont dans $W^u(K)$ par définition d'un rectangle ajusté) et K est saturé. Le barreau δ_2 est donc immédiatement au-dessus de δ_1 si et seulement si δ_2 est au-dessus de δ_1 et s'il n'existe aucun point de K dans la partie de R située strictement entre δ_1 et δ_2 .

Définition 3.14 Soit R un rectangle ajusté de K et soient δ_1 et δ_2 deux barreaux horizontaux de R tels que δ_2 est immédiatement au-dessus de δ_1 . On dira que l'on découpe R entre δ_1 et δ_2 si l'on remplace R par les deux sous-rectangle disjoints suivants : le sous-rectangle horizontal compris entre le bord inférieur de R et δ_1 et le sous-rectangle horizontal compris entre δ_2 et le bord supérieur de R .

Remarques

— Dans la définition ci-dessus, comme δ_2 est immédiatement au-dessus de δ_1 dans R , les deux sous-rectangles issus du découpage de R recouvrent $R \cap K$.

— De ceci, on déduit que si \mathcal{R}' est déduite de \mathcal{R} par une opération de type 1), alors on a $\partial^u R' \cap K = \partial^u R \cap K$.

De même, si δ_1 et δ_2 sont deux barreaux verticaux de R tels que δ_2 est immédiatement à droite de δ_1 . On dira que l'on découpe R entre δ_1 et δ_2 si l'on remplace R par les deux sous-rectangle disjoints suivants : le sous-rectangle vertical compris entre le bord gauche de R et δ_1 et le sous-rectangle vertical compris entre δ_2 et le bord droit de R .

Définition 3.15 Soit $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i=1\dots n}$ une partition de Markov ajustée de K tracée dans une section locale Σ . On note R l'union des rectangles de \mathcal{R} et f l'application de premier retour sur Σ .

On effectue une opération de type 1) dans le sens horizontal si on remplace la partition ajustée \mathcal{R} par la partition ajustée \mathcal{R}' , également tracée dans Σ et définie de la façon suivante : il existe un indice $i \leq n$ et deux barreaux horizontaux δ_1 et δ_2 de R_i tels que : — δ_2 est immédiatement au-dessus de δ_1 , — $f(\delta_1) \subset \partial^s R$ et $f(\delta_2) \subset \partial^s R$, — \mathcal{R}' est obtenue à partir de R en découpant R_i entre δ_1 et δ_2 et en conservant les autres rectangles.

On définit de façon analogue les opérations de type 1) dans le sens vertical (la condition sur les deux barreaux verticaux servant à l'opération est $\delta_1 \subset f(\partial^u R)$ et $\delta_2 \subset f(\partial^u R)$).

Remarques

— Si \mathcal{R} est une partition de Markov de K tracée dans Σ et si \mathcal{R}' est obtenue à partir de \mathcal{R} par une opération de type 1) (par exemple dans le sens horizontal pour fixer les idées), alors \mathcal{R}' est effectivement une partition de Markov ajustée de K (tracée dans Σ).

En effet, d'après la précédente remarque, \mathcal{R}' est une collection de rectangles ajustés, disjoints, recouvrant $K \cap \Sigma$ et munis de feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u vérifiant les propriétés désirées pour une partition de Markov. Il reste alors à vérifier par exemple le critère 3 du lemme 3.8. On note R' l'union des rectangles de \mathcal{R}' .

Par définition de \mathcal{R}' , on a $(\partial^u R' \cap K) = (\partial^u R \cap K)$. Comme \mathcal{R} est une partition de Markov, on a $f(\partial^u R \cap K) \supset (\partial^u R \cap K)$. Par conséquent, on a $f(\partial^u R' \cap K) \supset (\partial^u R' \cap K)$.

D'autre part, par définition de \mathcal{R}' , on a $\partial^u R' = \partial^u R \cup \delta_1 \cup \delta_2$ où δ_1 et δ_2 sont deux barreaux horizontaux d'un rectangle de R tel que $f(\delta_1) \subset \partial^s R$ et $f(\delta_2) \subset \partial^s R$. Comme \mathcal{R} est une bonne partition, on a $f(\partial^s R) \subset \partial^s R$. De tout ceci, on déduit, $f(\partial^s R') \subset \partial^s R'$. Par conséquent, \mathcal{R}' vérifie le critère 3 du lemme 3.8.

— Si \mathcal{R} est une partition de Markov, alors il n'existe qu'un nombre fini de couples de barreaux (δ_1, δ_2) qui vérifient les conditions requises pour une opération de type 1) (par exemple dans le sens horizontal pour fixer les idées).

En effet, tout d'abord δ_2 est entièrement déterminé par δ_1 . Maintenant, $f^{-1}(f(R) \cap R)$ est un nombre fini des sous-rectangles horizontaux de R (par définition d'une partition de Markov) et tout barreau horizontal δ_1 tel que $f(\delta_1) \subset \partial^s R$ est un côté horizontal d'un de ces sous-rectangles horizontaux.

On veut maintenant définir l'opération inverse :

Soit R_1 et R_2 deux rectangles d'une partition de Markov ajustés de K tracés dans Σ . On dira que R_2 est immédiatement au-dessus de R_1 s'il existe un rectangle ajusté R_0 tracé dans Σ muni de feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u , prolongeant ceux de R_1 et R_2 , transverses, triviaux, invariant et contracté-dilaté par f , tel que $R_0 \cap K = (R_1 \cup R_2) \cap K$ et tel que R_2 est au-dessus de R_1 dans R_0 .

On dira alors que l'on colle R_2 au-dessus de R_1 si l'on remplace les deux rectangles ajustés R_1 et R_2 par le seul rectangle R_0 .

On définit de même les expressions R_2 est à droite de R_1 et on colle R_2 à droite de R_1 .

Définition 3.16 Soit $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i=1\dots n}$ une partition de Markov ajustée de K tracée dans une section locale Σ . On note R l'union des rectangles de \mathcal{R} et f l'application de premier retour sur Σ .

On dira que l'on effectue une opération de type 1bis) dans le sens horizontal si on remplace la partition ajustée \mathcal{R} par la partition ajustée \mathcal{R}' , également tracée dans Σ et obtenu de la façon suivante : il existe une renumérotation des rectangles de \mathcal{R} et il existe un rectangle ajusté R_0 dans Σ telle que :

- le rectangle R_2 est immédiatement au-dessus du rectangle R_1 dans R_0 ,
- le bord haut de R_1 est disjoint de $f(\partial^s R)$ ainsi que le bord inférieur de R_2 ,
- \mathcal{R}' est la collection de rectangles ajustés $\{R_0, R_3, \dots, R_n\}$.

On définit par de façon analogue les opérations de type 1bis) dans le sens vertical (la condition intermédiaire est que les images par f du bord droit de R_1 et du bord gauche de R_2 soient disjointes de $\partial^u R$).

Remarques

— Si \mathcal{R} est une partition de Markov de K tracée dans Σ et si \mathcal{R}' est obtenue à partir de \mathcal{R} par une opération de type 1) (par exemple, en recollant un rectangle R_2 au-dessus d'un rectangle R_1 pour former un rectangle R_0), alors \mathcal{R}' est une partition de Markov ajustée de K tracée dans Σ .

En effet, les exigences sur R_0 impliquent que \mathcal{R}' est une collection de rectangles ajustés, disjoints, recouvrant $K \cap \Sigma$ et munis de feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u qui vérifient les propriétés désirées pour une partition de Markov. Il reste alors à vérifier par exemple le critère 3 du lemme 3.8 et on note pour cela R' l'union des rectangles de \mathcal{R}' .

Par définition de \mathcal{R}' , on a $(\partial^u R' \cap K) = (\partial^u R \cap K)$. Comme \mathcal{R} est une partition de Markov, on a $f(\partial^u R \cap K) \supset (\partial^u R \cap K)$. Par conséquent, on a $f(\partial^u R' \cap K) \supset (\partial^u R' \cap K)$.

D'autre part, par définition de \mathcal{R}' et en notant δ_1 et δ_2 les bords supérieurs de R_1 et inférieur de R_2 , on a $\partial^u R = \partial^u R' \cup \delta_1 \cup \delta_2$ et, d'autre part, $\delta_1 \cap f(\partial^s R) = \emptyset$ et $\delta_2 \cap f(\partial^s R) = \emptyset$. Comme \mathcal{R} est une bonne partition, on a $f(\partial^s R) \subset \partial^s R$. De tout ceci, on déduit que $f(\partial^s R') \subset \partial^s R'$. Par conséquent, \mathcal{R}' vérifie le critère 3 du lemme 3.8. et est donc une partition de Markov ajustée.

— Par ailleurs, il est clair que les opérations de type 1) et 1bis) ont été définies pour être inverses l'une de l'autre. Plus précisément, si \mathcal{R}' est déduite de \mathcal{R} par une opération de type 1) alors il existe une opération de type 1bis) qui transforme \mathcal{R}' en \mathcal{R} . Et réciproquement.

Le but de cette sous-partie est de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.17 *Supposons K sans double-bord (ou transitif) et soient deux partitions \mathcal{R} et \mathcal{S} ajustées de K tracées dans une même section locale Σ . Alors \mathcal{S} se déduit de \mathcal{R} par une suite d'opérations de types 1) et 1bis).*

La démonstration de cette proposition passe par la définition de raffinements successifs d'une partition donnée.

Définition 3.18 *Soient \mathcal{R} et \mathcal{S} deux partitions de Markov ajustées essentielles de K toute deux tracées dans une même section locale Σ . On note R et S les unions des rectangles de \mathcal{R} et \mathcal{S} . Alors, on notera $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ la collection des composantes connexes de $R \cap S$.*

Proposition 3.19 *Si \mathcal{R} et \mathcal{S} sont deux partitions de Markov ajustées de K dans une même section locale Σ , alors $\mathcal{T} = \mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ est aussi une partition de Markov ajustée de K .*

Démonstration Il est immédiat que \mathcal{T} est une collection de rectangles ajustés disjoints dont l'union recouvre $K \cap \Sigma$. Ces rectangles héritent des feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u provenant au choix des rectangles de \mathcal{R} ou \mathcal{S} .

Il suffit de vérifier par exemple que \mathcal{T} vérifie le troisième critère du lemme 3.8. Remarquons alors que $\partial^s T$ est par construction inclus dans $\partial^s R \cup \partial^s S$. De plus, également par construction, tout point de $(\partial^s R \cup \partial^s S) \cap T$ est en fait dans $\partial^s T$. Comme T recouvre K , on obtient finalement $\partial^s T \cap K = (\partial^s R \cap K) \cup (\partial^s S \cap K)$. Comme \mathcal{R} et \mathcal{S} vérifient le critère 3 du lemme 3.8, on en déduit que \mathcal{T} vérifie également ce critère. \square

Si $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i=1\dots n}$ est une partition ajustée de K dans Σ , et si on note f l'application de retour sur Σ , alors remarquons que la collection des rectangles $\{f(R_i)\}_{i=1\dots n}$ est également une partition de Markov ajustée de K . On notera $f(\mathcal{R})$ cette partition.

Définition 3.20 *Soit \mathcal{R} une partition de Markov ajustée de K tracée dans une section locale Σ , soit f l'application de retour sur Σ et N est un entier positif. On appellera $N^{\text{ième}}$ raffinement de \mathcal{R} , et on notera $\mathcal{R}^{[N]}$ la partition ajustée $f^{-N}(\mathcal{R}) \wedge \dots \wedge \mathcal{R} \wedge \dots \wedge f^N(\mathcal{R})$.*

Remarque En manipulant directement la définition de $\mathcal{R}^{[n]}$, on vérifie que, pour tous p et q , on a $\mathcal{R}^{[p+q]} = (\mathcal{R}^{[p]})^{[q]}$.

On aura également besoin de la notion suivante :

Définition 3.21 Soient \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux partitions de Markov ajustées de K tracées dans une même section locale Σ . Alors, on dit que \mathcal{R} est plus fine que \mathcal{R}' si tout rectangle de \mathcal{R} est inclus dans un rectangle de \mathcal{R}' .

Remarques

— Si on note R et R' les unions des rectangles de \mathcal{R} et \mathcal{R}' , comme on a nécessairement $R \cap K = R' \cap K$, on vérifie facilement que \mathcal{R} est plus fine que \mathcal{R}' si et seulement si que le bord de R intersecté avec K contient le bord de R' intersecté avec K .

— Si \mathcal{R} est plus fine que \mathcal{R}' alors $\mathcal{R} \wedge \mathcal{R}' = \mathcal{R}$.

— Si q est plus grand que p , alors $\mathcal{R}^{[q]}$ est bien sûr plus fine que $\mathcal{R}^{[p]}$.

Lemme 3.22 Soit \mathcal{R} une partition ajustée de K . Alors $\mathcal{R}^{[1]}$ se déduit de \mathcal{R} par une suite d'opérations de type 1).

Avant de montrer ce lemme, remarquons que ce lemme et l'égalité $\mathcal{R}^{[p+q]} = (\mathcal{R}^{[p]})^{[q]}$ impliquent immédiatement le :

Corollaire 3.23 Soit \mathcal{R} une partition ajustée de K . Pour tout entier N positif, $\mathcal{R}^{[N]}$ se déduit de \mathcal{R} par une suite d'opérations de type 1).

Démonstration du lemme 3.22 On commence par montrer que $\mathcal{R} \wedge f(\mathcal{R})$ se déduit de \mathcal{R} par une suite d'opérations de type 1) dans le sens vertical.

On note R l'union des rectangles de \mathcal{R} . Par définition, d'une partition de Markov, les composantes de $R \cap f(R)$ sont des sous-rectangles verticaux $\{V_i^j\}_{i \leq n, j \leq v_i}$ de R . L'union des V_i^j recouvre bien sûr $R \cap K$. La partition $\mathcal{R} \wedge f(\mathcal{R})$ est donc obtenue en découpant \mathcal{R} entre des couples de barreaux verticaux immédiatement successifs $(\delta_1, \delta_2), \dots, (\delta_{2r-1}, \delta_{2r})$; ces barreaux sont les côtés instables des V_i^j qui ne sont pas dans $\partial^u R$.

De plus, les sous-rectangles V_i^j sont les composantes de $R \cap f(R)$ donc le bord vertical de ces sous-rectangles est inclus dans $\partial^u R \cup \partial^u f(R)$. Par conséquent, pour tout $i \leq 2r$, $\delta_i \subset f(\partial^u R)$.

On part de \mathcal{R} . On découpe \mathcal{R} entre les deux barreaux immédiatement successifs δ_1 et δ_2 et l'on obtient une partition $\mathcal{R}_{prov,1}$. Comme $\delta_1 \subset f(\partial^u R)$ et $\delta_2 \subset f(\partial^u R)$, on a bien ainsi effectué une opération de type 1) dans le sens vertical. Les rectangles de $\mathcal{R}_{prov,1}$ sont des sous-rectangles verticaux de \mathcal{R} et le bord instable de $\mathcal{R}_{prov,1}$ contient celui de \mathcal{R} donc les δ_i sont des barreaux verticaux de $\mathcal{R}_{prov,1}$ tels que $\delta_i \subset f(\partial^u R_{prov,1})$. On peut donc découper, par une opération de type 1), $\mathcal{R}_{prov,1}$ entre les barreaux verticaux successifs δ_3 et δ_4 . On obtient une partition $\mathcal{R}_{prov,2}$ et on peut continuer jusqu'à $\mathcal{R}_{prov,n} = \mathcal{R} \wedge f(\mathcal{R})$.

Par conséquent, $\mathcal{R} \wedge f(\mathcal{R})$ se déduit de \mathcal{R} par une suite d'opérations de type 1) dans le sens vertical.

Maintenant, si f^{-1} est bien définie sur les rectangles d'une partition \mathcal{S} , alors on montre exactement comme ci-dessus que $\mathcal{S} \wedge f^{-1}(\mathcal{S})$ est obtenue à partir de \mathcal{S} par une suite d'opérations de type 1) dans le sens horizontal.

Avec $\mathcal{S} = \mathcal{R} \wedge f(\mathcal{R})$, ceci prouve que $f^{-1}(\mathcal{R} \wedge f(\mathcal{R})) \wedge (\mathcal{R} \wedge f(\mathcal{R}))$ se déduit de $\mathcal{R} \wedge f(\mathcal{R})$ par une suite d'opérations de type 1) dans le sens horizontal. Il suffit alors de remarquer que $\mathcal{R}^{[1]} = f^{-1}(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{R} \wedge f(\mathcal{R}) = f^{-1}(\mathcal{R} \wedge f(\mathcal{R})) \wedge (\mathcal{R} \wedge f(\mathcal{R}))$. \square

On a de plus le lemme suivant :

Lemme 3.24 *Soient \mathcal{R} , \mathcal{R}' et \mathcal{S} trois partitions de Markov ajustées de K tracées dans une même section locale Σ . On suppose que \mathcal{R}' se déduit de \mathcal{R} par une opération de type 1). Alors $\mathcal{R}' \wedge \mathcal{S}$ se déduit de $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ par une suite d'opérations de type 1).*

Démonstration Par hypothèse, il existe deux barreaux horizontaux δ_1 et δ_2 d'un rectangle de \mathcal{R} tels que δ_2 est immédiatement au dessus de δ_1 , tels que et tels que \mathcal{R}' est obtenue en découpant \mathcal{R} entre ces deux barreaux.

Les rectangles de $\mathcal{T} = \mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ sont des sous-rectangles des rectangles de \mathcal{R} . Par conséquent, δ_1 induit dans $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ un nombre fini de barreaux $\delta_1^1, \dots, \delta_1^r$ et δ_2 induit un nombre fini de barreaux $\delta_2^1, \dots, \delta_2^r$.

On note R l'union des rectangles de \mathcal{R} et T l'union des rectangles de $\mathcal{T} = \mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$. Il n'y a aucune feuille de $K \cap R$ entre δ_1 et δ_2 . Par ailleurs, rappelons que T recouvre $R \cap K$. Par conséquent, soit δ_1^i et δ_2^i sont deux barreaux d'un même rectangle de \mathcal{T} et δ_2^i est immédiatement au-dessus de δ_1^i dans ce rectangle, soit δ_1^i et δ_2^i sont tout deux des côtés stables de rectangles de \mathcal{T} . Il est clair que $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ est la partition obtenue en découpant $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ entre tous les couples (δ_1^i, δ_2^i) (si δ_1^i et δ_2^i sont des côtés de rectangles de \mathcal{T} , on peut considérer l'opération de découpage associée comme triviale).

Pour montrer la proposition, il suffit maintenant de vérifier que, pour tout $i \leq r$, on a $f(\delta_1^i) \subset \partial^s T$ et $f(\delta_2^i) \subset \partial^s T$. On a $\delta_1^i \subset \delta_1$ et $f(\delta_1) \subset \partial^s R$ donc $f(\delta_1^i) \subset \partial^s R$. Par ailleurs, on a $\mathcal{T} = \mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ donc \mathcal{T} est plus fine que \mathcal{R} et donc $(\partial^s T \cap K) \supset (\partial^s R \cap K)$. On en déduit que $f(\delta_1^i \cap K) \subset \partial^s T$. Maintenant, s'il n'était pas vrai que $f(\delta_1^i) \subset \partial^s T$, on aurait nécessairement un coin d'un rectangle de \mathcal{T} dans l'intérieur de $f(\delta_1^i)$ donc dans l'intérieur de $f(T)$: ceci contredirait le fait que \mathcal{T} est une partition de Markov (précisément, ceci contredirait l'inclusion $f(\partial^u T) \supset \partial^u T$). \square

Le corollaire 3.23 et le lemme 3.24 impliquent que :

Corollaire 3.25 *Soient \mathcal{R} et \mathcal{S} des partitions ajustées de K tracées dans une même section locale Σ et soit N un entier positif. Alors $\mathcal{R}^{[N]} \wedge \mathcal{S}$ se déduit de $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ par une suite d'opérations de type 1).*

Puisque toute opération de type 1) possède une opération inverse de type 1bis), on obtient les deux corollaires suivants :

Corollaire 3.26 *Soient \mathcal{R} une partition ajustée de K et soit N un entier positif. Alors \mathcal{R} se déduit de $\mathcal{R}^{[N]}$ par une suite d'opérations de type 1bis).*

Corollaire 3.27 *Soient \mathcal{R} et \mathcal{S} des partitions ajustées de K tracées dans une même section locale Σ et soit N un entier positif. Alors $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ se déduit de $\mathcal{R}^{[N]} \wedge \mathcal{S}$ par une suite d'opérations de type 1bis).*

Lemme 3.28 Soient \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux partitions de Markov ajustées de K tracées dans une même section locale Σ . Alors il existe N tel que $\mathcal{R}^{[N]}$ soit plus fine que \mathcal{R}' .

Démonstration On remarque d'abord que les diamètres des rectangles de $\mathcal{R}^{[N]}$ tendent uniformément vers 0 quand N tend vers l'infini. Notons en effet C un majorant des largeurs et hauteurs des rectangles de \mathcal{R} . Les propriétés de contraction-dilatation de f montrent qu'il existe $\lambda < 1$ tel que la largeur de tout rectangle de $f(R)$ et la hauteur de tout rectangle de $f^{-1}(R)$ sont inférieures à λC . Par induction, on en déduit que tout rectangle de $\mathcal{R}^{[N]} = f^{-N}(\mathcal{R}) \wedge \dots \wedge \mathcal{R} \wedge \dots \wedge f^N(\mathcal{R})$ est de largeur et de hauteur inférieure à $\lambda^N C$.

On note R' l'union des rectangles de \mathcal{R}' . D'une part, la simple transversalité de \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que le bifeuilletage de R' se prolonge sur la boule (dans Σ) de rayon δ autour l'union des rectangles de R' en un bifeuilletage produit. Par conséquent, pour tout rectangle R_0 qui a ses quatre coins dans des rectangles de \mathcal{R}' alors soit R_0 est inclus dans un rectangle de \mathcal{R}' , soit R_0 est de diamètre plus grand que δ . D'autre part, R' recouvre K et tout rectangle ajusté a ses quatre coins dans K . Il en résulte que tout rectangle ajusté de K , tracé dans Σ et de taille inférieure à δ est inclus dans un rectangle de \mathcal{R}' .

Le lemme est donc vrai en prenant N tel que $C\lambda^N \leq \delta$. \square

Remarques

— On a prouvé que pour toute partition ajustée \mathcal{R} de K et pour tout $\delta > 0$, il existe un entier N tel que chaque rectangle $\mathcal{R}^{[N]}$ est de diamètre inférieur à δ .

— En fait, la démonstration ci-dessus n'utilise pas les propriétés "markoviennes" des rectangles de la partition \mathcal{R}' . On a en fait prouvé que si \mathcal{R} est une partition de Markov ajustée de K dans Σ et si \mathcal{R}' est une collection de rectangles disjoints dans Σ , dont l'union recouvre $K \cap \Sigma$ et munis de feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u avec les propriétés habituelles, alors il existe N tel que $\mathcal{R}^{[N]}$ est plus fine que \mathcal{R}' .

On a maintenant rassembler les notions et les lemmes nécessaires à la démonstration de la proposition 3.19.

Démonstration de la proposition 3.19 D'après le lemme 3.28, il existe un entier positif N tel que $\mathcal{S}^{[N]}$ est plus fine que \mathcal{R} , puis il existe un entier positif M tel que $\mathcal{R}^{[M]}$ est plus fine que $\mathcal{S}^{[N]}$.

Alors :

- $\mathcal{R}^{[M]}$ se déduit de \mathcal{R} par une suite d'opérations de type 1) (corollaire 3.23).
- $\mathcal{R}^{[M]} = \mathcal{R}^{[M]} \wedge \mathcal{S}^{[N]}$ car $\mathcal{R}^{[M]}$ est plus fine que $\mathcal{S}^{[N]}$.
- $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}^{[N]}$ se déduit de $\mathcal{R}^{[M]} \wedge \mathcal{S}^{[N]}$ par une suite d'opérations de type 1bis) (lemme 3.25)
- $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}^{[N]} = \mathcal{S}^{[N]}$ car $\mathcal{S}^{[N]}$ est plus fine que \mathcal{R} .
- $\mathcal{S}^{[N]}$ se déduit de \mathcal{S} par une suite d'opérations de type 1) donc \mathcal{S} se déduit de $\mathcal{S}^{[N]}$ par une suite d'opérations de type 1bis).

De ces cinq points successifs, on déduit que \mathcal{S} se déduit de \mathcal{R} par une suite d'opérations de type 1) et 1bis). \square

3.1.3 Partitions de Markov quelconques d'un ensemble selle saturé

Un ensemble selle saturé K possède bien sûr une infinité de partitions de Markov tracées dans des sections locales distinctes, c'est-à-dire une infinité de partitions dont les intersections des rectangles avec K sont distinctes. On ne veut pas se limiter à énumérer les partitions de Markov de K tracées dans même section locale. Nous allons ici montrer que deux partitions essentielles quelconques de K se déduisent toujours l'une de l'autre par une suite finie d'opérations de types 1), 1bis) et d'opérations de types 2) et 2bis) que nous allons définir.

Définissons maintenant les opérations 2) et 2bis). Remarquons pour cela que si R est un rectangle ajusté d'un ensemble selle K d'un champ X , alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $X^t(R)$ est un rectangle ajusté de K .

Définition 3.29 Soit $\mathcal{R} = \{R_i\}$ une partition de Markov essentielle d'un ensemble selle saturé K d'un champ de vecteurs X . On note R l'union des rectangles de \mathcal{R} . Quitte à multiplier X par une fonction lisse strictement positive, on suppose le temps de retour sur R partout égal à 1.

— On dira que \mathcal{R} est transformé en \mathcal{R}' par une opération de type 2) si, éventuellement après avoir renuméroté les rectangles de \mathcal{R} , la partition \mathcal{R}' est donnée comme la collection de rectangles $\{R_1, \dots, R_n, X^{\frac{1}{2}}(R_n)\}$.

— On dira que \mathcal{R} est transformé en \mathcal{R}' par une opération de type 2bis) si, éventuellement après avoir renuméroté les rectangles de \mathcal{R} , on a $R_n = X^{\frac{1}{2}}(R_{n-1})$ et si \mathcal{R}' est la collection de rectangles $\{R_1, \dots, R_{n-1}\}$.

Remarques

— Si \mathcal{R} est une partition essentielle et si \mathcal{R}' est obtenue à partir de \mathcal{R} par une opération de type 2), on vérifie que \mathcal{R}' est une partition essentielle de K .

Il faut trouver pour cela une section locale Σ' dans laquelle sont tracés les rectangles de \mathcal{R}' . Il suffit pour cela de considérer pour Σ' l'union d'une section Σ dans laquelle sont tracés les rectangles de \mathcal{R} et de $X^{\frac{1}{2}}(U)$ où U est un voisinage de R_n dans Σ . Si U est assez petit (en fait, si $U \cap K = R_n \cap K$), l'union des rectangles de \mathcal{R}' recouvre $K \cap \Sigma'$. En notant $R'_n = X^{\frac{1}{2}}(R_n)$, le rectangle R'_n hérite des feuilletages stables et instables de R_n et comme R'_n est disjoint de $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$, il est facile de trouver une métrique pour laquelle on a encore de bonnes propriétés de contraction-dilatation de ces feuilletages. Enfin, l'application de retour f' sur Σ' est telle que $f'(R_i) = f(R_i)$ pour $i \leq n-1$, $f'(R_n) = R'_n$ et $f'(R'_n) = f(R_n)$. Comme R_n est un sous-rectangle horizontal de lui-même et que R'_n est un sous-rectangle vertical de lui-même, on en déduit que \mathcal{R}' est une partition de Markov ajustée de K . On déduit également des relations entre f et f' que \mathcal{R}' est essentielle.

— De même, si \mathcal{R} est une partition essentielle et si \mathcal{R}' est obtenue à partir de \mathcal{R} par une opération de type 2bis), on montre que \mathcal{R}' est une partition essentielle de K .

— Les opérations de type 2bis) sont les inverses des opérations de type 2) au sens suivant : si \mathcal{R}' est obtenu à partir de \mathcal{R} par une opération de type 2) alors il existe une opération de type 2bis) qui transforme \mathcal{R}' en \mathcal{R} . Et réciproquement.

On parlera ci-après d'isotopie d'une partition essentielle \mathcal{R} le long du flot, ceci signifiera une isotopie de l'union des rectangles de \mathcal{R} le long des orbites du flot. Remarquons qu'une isotopie le long du flot transforme bien sûr une partition essentielle ajustée en une partition essentielle ajustée de même type géométrique.

Au cours d'une isotopie le long du flot tout point x est transporté en un point $X^{T(x)}(x)$. Si pour tout x , le temps $T(x)$ est inférieur à T , alors on dira que l'isotopie le long du flot se passe en temps inférieur à T . De même on parlera d'isotopie en temps positif, négatif, etc.

Remarque Soit $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$, soit $R = \cup_i R_i$ et supposons que l'on a multiplié le champ par une fonction lisse strictement positive de façon à ce que le temps de retour sur R soit uniformément égal à 1. Si $\mathcal{R}' = \{R_1, \dots, R_n, R_{n+1}\}$ où R_{n+1} est isotope à R_n par une isotopie le long du flot en temps strictement positif et strictement inférieur à 1, alors \mathcal{R}' est déduite de \mathcal{R} par une opération de type 2) et une isotopie de \mathcal{R} le long du flot.

Proposition 3.30 *Soit K un ensemble selle saturé sans double-bord (ou transitif) et soient \mathcal{R} et \mathcal{S} deux partitions essentielles de K .*

Alors \mathcal{S} se déduit de \mathcal{R} par une suite d'isotopies le long du flot et d'opérations de type 1), 1bis), 2) et 2bis).

Démonstration On note comme toujours R et S les unions des rectangles de \mathcal{R} et \mathcal{S} . Il existe alors une fonction lisse strictement positive φ telle que le temps de retour sur R par le flot de $\widehat{X} = \varphi.X$ soit uniformément égal à 1.

Lemme 3.31 *Il existe alors une partition $\widetilde{\mathcal{S}}$ déduit de \mathcal{S} par une suite d'opérations de type 2) (et d'isotopies le long du flot) tel que le temps de retour sur l'union \widetilde{S} des rectangles de $\widetilde{\mathcal{S}}$ par le flot de \widehat{X} soit strictement inférieur à 1.*

Démonstration On considère la fonction lisse strictement positive ψ telle que le temps de retour sur S par le flot de $\widetilde{X} = \psi.X$ soit uniformément égal à 1. Comme $\frac{\psi}{\varphi}$ est une fonction continue bien définie sur la variété compacte, cette fonction est bornée par une constante M .

Pour tout réel t , on note $X^t(\mathcal{S})$ la partition essentielle dont les rectangles sont les images par X^t des rectangles de \mathcal{S} . On considère alors la partition $\widetilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \widetilde{X}^{\frac{1}{M}}(\mathcal{S}) \cup \widetilde{X}^{\frac{2}{M}}(\mathcal{S}) \cup \dots \cup \widetilde{X}^{\frac{M-1}{M}}(\mathcal{S})$. C'est une partition manifestement déduite de \mathcal{S} par des opérations de type 2) (et des isotopies le long du flot).

Le temps de retour sur l'union \widetilde{S} des rectangles de $\widetilde{\mathcal{S}}$ par le flot de \widetilde{X} est strictement inférieur à $\frac{1}{M}$. Par conséquent, le temps de retour sur l'union \widetilde{S} des rectangles de $\widetilde{\mathcal{S}}$ par le flot de \widehat{X} est strictement inférieur à 1. \square

Quand on parlera de temps de retour, de temps d'isotopie le long du flot, il s'agira maintenant toujours du flot de \widehat{X} sans qu'on le précise. Ceci dit, remarquons qu'il existe un réel $\tau > 0$ tel que le temps de retour sur S est partout minoré par τ .

• On montre exactement comme au lemme 3.28 qu'il existe N_1 tel que, pour tout $N \geq N_1$, chaque rectangle de $(\widetilde{\mathcal{S}})^{[N]}$ est inclus dans l'union des cubes associés à \mathcal{R} .

• Les rectangles de \mathcal{R} et de \mathcal{S} sont des compacts transverses au champ X . Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que tout disque de diamètre inférieur à δ tracé dans S peut être rendu disjoint de R par une isotopie le long du flot en temps strictement inférieur à $\frac{\tau}{2}$. D'après la remarque suivant le lemme 3.28, il existe $N_2 \geq N_1$ tel que tout rectangle de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ est de diamètre inférieur à δ . Pour chaque rectangle de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ il existe donc une isotopie le long du flot en temps strictement inférieur à $\frac{\tau}{2}$ qui rend ce rectangle disjoint de \mathcal{R} . Puisque le temps de retour sur S (donc sur l'union des rectangles de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$) est supérieur à τ , ces isotopies induisent une isotopie de l'union de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ (qui rend cette union de rectangles disjointe de R).

La partition $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ est une collection de rectangles transverses à X et inclus dans les cubes associés aux rectangles de \mathcal{R} . On peut donc définir la projection π de l'union des rectangles de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ sur l'union R des rectangles de \mathcal{R} le long des orbites du flot (on doit projeter en suivant l'orbite négative des points de l'union des rectangles de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$). Puisque les rectangles de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ sont disjoints de R , cette projection est continue. Par invariance de $W^s(K)$ et $W^u(K)$, il est clair que l'on obtient une collection de sous-rectangles (non-nécessairement disjoints) de \mathcal{R} que l'on notera $\pi((\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]})$.

Le temps de retour sur l'union des rectangles de la partition $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ est partout inférieur à 1 (par construction au lemme 3.31). Autrement dit, l'union des rectangles de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ coupe tout segment d'orbite de K de longueur 1. Comme le temps de retour sur r est uniformément égal à 1, l'union des rectangles de $\pi((\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]})$ recouvre $R \cap K$.

Les bords des rectangles de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ donc les bords des rectangles de $\pi((\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]})$ sont formés de feuilles bords de $W^s(K)$ et de $W^u(K)$.

Lemme 3.32 *Il existe un entier positif M tel que l'intérieur de tout rectangle de $\mathcal{R}^{[M]}$ est disjoint de l'union des bords des rectangles de $\pi((\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]})$.*

Démonstration Les rectangles de $\pi((\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]})$ recouvrent K mais ne sont pas nécessairement disjoints. On doit se ramener à des rectangles disjoints pour pouvoir appliquer des résultats déjà prouvés.

Toute composante d'intersection d'une feuille de $W^s(K)$ avec l'union R des rectangles de \mathcal{R} est un barreau horizontal d'un rectangle de R . Si γ est un barreau horizontal de R provenant d'une feuille bord de $W^s(K)$ et si γ n'est pas dans le bord stable de R , alors on définit le barreau horizontal γ' voisin de γ : c'est le barreau de R qui est immédiatement au-dessus ou immédiatement au-dessous de γ suivant le côté où γ est bord. Si on découpe R entre γ et son voisin γ' on obtient une nouvelle collection de rectangles disjoints, recouvrant encore $K \cap R$ et dont le bord contient le barreau γ .

On remarque alors que les bords des rectangles de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ sont dans des feuilles bords de $W^s(K)$ et $W^u(K)$. Par conséquent, les bords des rectangles de $\pi((\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]})$ sont inclus dans des barreaux horizontaux et verticaux de R provenant de feuilles bord de $W^s(K)$ et $W^u(K)$. En découpant R entre tous ces barreaux et leurs voisins, on obtient une collection \mathcal{T} de rectangles disjoints, recouvrant $K \cap R$ et dont les bords contiennent les bord des rectangles de $\pi((\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]})$. Les rectangles de \mathcal{T} héritent des feuilletages stables et instables de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$.

Le lemme 3.28 (voir la remarque suivant ce lemme) montre qu'il existe un entier positif M tel que l'intérieur de tout rectangle de $\mathcal{R}^{[M]}$ est disjoint du bord des rectangles de \mathcal{T} donc du bord des rectangles $\pi((\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]})$. \square

• Puisque tout rectangle de $\mathcal{R}^{[M]}$ est disjoint du bord des projections de tous les rectangles de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$, le cardinal de la fibre de de la projection π de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ sur \mathcal{R} est constant sur chaque rectangle de $\mathcal{R}^{[M]}$.

On note alors P_1, \dots, P_r les rectangles de $\mathcal{R}^{[M]}$ et α_i le cardinal de la fibre de π au dessus de P_i (puisque la projection des rectangles de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ recouvre $K \cap R$, on a $\alpha_i > 0$ pour tout i). On considère alors la partition $P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,\alpha_1}, \dots, P_{r,1}, P_{r,2}, \dots, P_{r,\alpha_r}$ où $P_{i,j} = X^{j\varepsilon}(P_i)$ avec $\varepsilon < \frac{1}{\max_i \alpha_i}$. Par définition, $\mathcal{P} = \{P_{i,j}\}$ est une partition essentielle de K obtenue par des opérations de type 2) (et des isotopies le long du flot) à partir de $\mathcal{R}^{[M]}$.

On note $\mathcal{V} = \pi^{-1}(\mathcal{R}^{[M]})$ (c'est-à-dire la partition dont les rectangles sont les sous-rectangles de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ qui se projettent sur des rectangles de $\mathcal{R}^{[M]}$). Comme α_i est le cardinal de la fibre de π au-dessus de P_i , il est clair que $\mathcal{P} = \{P_{i,j}\}$ est isotope le long du flot à la partition \mathcal{V} qui est une partition plus fine que $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$.

Alors, d'après la sous-partie précédente, \mathcal{P} se déduit de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ par une suite d'opérations de types 1) et 1bis).

• En résumé,

- $\mathcal{R}^{[M]}$ se déduit de \mathcal{R} par une suite d'opérations de type 1) (corollaire 3.23),
- \mathcal{P} se déduit de $\mathcal{R}^{[M]}$ par une suite d'opérations de type 2) (et d'isotopies le long du flot),
- \mathcal{V} est isotope le long du flot à \mathcal{P} ,
- $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ se déduit de \mathcal{V} par une suite d'opérations de types 1) et 1bis) (proposition 3.19),
- $\tilde{\mathcal{S}}$ se déduit de $(\tilde{\mathcal{S}})^{[N_2]}$ par une suite d'opérations de type 1bis) (corollaire 3.23),
- $\tilde{\mathcal{S}}$ se déduit de \mathcal{S} par une suite d'opérations de type 2) donc \mathcal{S} se déduit de $\tilde{\mathcal{S}}$ par une suite d'opérations de type 2bis).

On a donc prouvé la proposition. \square

3.2 Traduction en termes de types géométriques

Nous allons maintenant traduire en termes de types géométriques les changements élémentaires de partitions de Markov de type 1), 1bis), 2) et 2bis). Plus formellement, si \mathcal{R}' est une partition de Markov (ajustée) déduite de \mathcal{R} par une opération élémentaire de type 1), 1bis), 2) et 2bis), on veut déduire le type géométrique de \mathcal{R}' de celui de \mathcal{R} . Ceci prouvera la proposition 3.2.

3.2.1 Types géométriques d'une même partition

Rappels sur les types géométriques

Peut-être est-il bon de rappeler qu'un type géométrique T est la donnée de $\{n, \{h_i\}, \{v_k\}, \Phi, \varepsilon\}$ où $\{h_i\}$ et $\{v_k\}$ sont deux collections de n nombres,

Φ est une application de $\{(i, j) \mid i \leq n, j \leq h_i\}$ dans $\{(k, l) \mid k \leq n, l \leq v_k\}$,

ε est une application de $\{(i, j) \mid i \leq n, j \leq h_i\}$ dans $\{+, -\}$.

Soit $\mathcal{R} = \{\Sigma, \{R_i\}_{i=1\dots n}\}$ une partition de Markov (ample ou ajustée), soit f l'application de retour sur Σ et soit R l'union des rectangles \mathcal{R} . Avec les notations ci-dessus, le type géométrique T est associé à la partition \mathcal{R} si et seulement si :

— pour tout $i \leq n$, l'intersection $f^{-1}(f(R_i) \cap R)$ est constituée de h_i composantes connexes (ces composantes connexes sont nécessairement des sous-rectangles horizontaux de R_i par définition d'une partition de Markov) que l'on numérote $H_i^1, \dots, H_i^{h_i}$ selon l'ordre induit par l'orientation des verticales de R_i .

— pour tout $k \leq n$, l'intersection $R_k \cap f(R)$ est constituée de v_k composantes connexes qui sont nécessairement des sous-rectangles verticaux que l'on numérote $V_k^1, \dots, V_k^{v_k}$ selon l'ordre induit par l'orientation des horizontales de R_k .

— pour tout (i, j) tel que $i \leq n$ et $j \leq h_i$, on a $\Phi(i, j) = (k, l)$ si et seulement si f envoie H_i^j sur V_k^l ,

— pour tout (i, j) tel que $i \leq n$ et $j \leq h_i$, en notant $(k, l) = \Phi(i, j)$, on a $\varepsilon(i, j) = +$ si et seulement si f restreinte au à la source à H_i^j (et donc restreinte au but à V_k^l) envoie l'orientation des verticales de R_i sur l'orientation des verticales de R_k .

Comme on l'a déjà fait remarquer (voir la remarque page 67) et comme on le voit ci-dessus, un type géométrique n'est pas uniquement associé à une partition de Markov en tant que collection de rectangles : il dépend également du choix d'une numérotation des rectangles et de choix d'orientation des côtés horizontaux de chacun des rectangles (rappelons qu'un choix d'orientation des côtés horizontaux induits automatiquement une orientation des côtés verticaux).

Les opérations de types 1), 1bis), 2) et 2bis) ont été définies "éventuellement après renumérotation des rectangles". De même, on n'a pas défini d'orientation privilégiées des côtés des rectangles d'une partition résultant d'une opération d'un de ces types.

Nous devons donc commencer par énumérer les différents types géométriques d'une même partition de Markov (vue comme simple collection de rectangles).

Changement de numérotation des rectangles

Tout changement de numérotation des rectangles d'une partition de Markov à n rectangles correspond naturellement à une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$. La proposition suivante découle alors immédiatement de la définition du type géométrique associé à une partition de Markov.

Proposition 3.33 *On note $T = \{n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi, \varepsilon\}$ le type géométrique d'une partition \mathcal{R} munie d'une indexation de ses rectangles et d'une orientation des horizontales de*

chacun de ses rectangles. On note alors T' le type géométrique de \mathcal{R} correspondant au changement de numérotation σ des rectangles.

$$\text{Alors } T' = \{n, \{h_{\sigma^{-1}(i)}\}, \{v_{\sigma^{-1}(i)}\}, \sigma \circ \Phi \circ \sigma^{-1}, \varepsilon \circ \sigma^{-1}\}.$$

Changement d'orientation des horizontales d'un rectangle

On doit alors décrire l'effet de l'inversion de l'orientation des horizontales d'un rectangle d'une partition de Markov (rappelons que, l'orientation des verticales d'un rectangle étant induite par l'orientation des horizontales, tout changement d'orientation des horizontales induit un changement d'orientation des verticales).

Le changement d'orientation des horizontales et verticales du rectangle R renverse l'indexation des sous-rectangles horizontaux $H_r^1, \dots, H_r^{h_r}$ et verticaux $V_r^1, \dots, V_r^{v_r}$. C'est pourquoi, on définit, pour tout $r \leq n$:

$$\begin{aligned} s_r^v &: \{(i, j) \mid i \leq n, j \leq h_i\} \rightarrow \{(i, j) \mid i \leq n, j \leq h_i\} \\ &\quad (i, j) \mapsto (i, j) \text{ si } i \neq r \\ &\quad (r, j) \mapsto (r, h_r + j - 1) \\ s_r^h &: \{(k, l) \mid k \leq n, l \leq v_k\} \rightarrow \{(k, l) \mid k \leq n, l \leq v_k\} \\ &\quad (k, l) \mapsto (k, l) \text{ si } k \neq r \\ &\quad (r, l) \mapsto (r, v_r + l - 1) \end{aligned}$$

Par ailleurs, il faut bien sûr tenir compte des changements d'orientations des verticales pour la définition de la partie “ ε ” du type géométrique. C'est pourquoi on définit

$$\begin{aligned} \eta_r &: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{+, -\} \\ &\quad i \mapsto + \text{ si } i \neq r \\ &\quad r \mapsto - \end{aligned}$$

On déduit alors la proposition suivante directement de la définition du type géométrique d'une partition de Markov.

Proposition 3.34 *On note $T = \{n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi, \varepsilon\}$ le type géométrique d'une partition \mathcal{R} munie d'une indexation de ses rectangles et d'une orientation des horizontales de chacun de ses rectangles. On note alors \tilde{T} le type géométrique de \mathcal{R} correspondant à l'inversion de l'orientation des horizontales du rectangle R_r .*

Alors $\tilde{T} = \{n, \{h_i\}, \{v_i\}, \tilde{\Phi}, \tilde{\varepsilon}\}$ où :

- $\tilde{\Phi} = s_r^h \circ \Phi \circ s_r^v$
- si on note $(k, l) = \tilde{\Phi}(i, j)$ alors $\tilde{\varepsilon}(i, j) = \varepsilon \circ s_r^v(i, j) \cdot \eta_r(i) \cdot \eta_r(k)$ avec la convention que $++ = -- = +$ et $+- = -+ = -$.

Il est clair que l'effet (sur le type géométrique) de l'inversion de l'orientation des horizontales de plusieurs rectangles R_{r_1}, \dots, R_{r_s} d'une partition de Markov est le composé des effets de l'inversion de l'orientation des horizontales de chacun des rectangles, dans n'importe quel ordre.

3.2.2 Traduction des opérations de types 1) et 1bis)

Le but va maintenant être de traduire, en termes de types géométriques, les différentes opérations élémentaires sur les partitions introduites dans la partie 3.1.

Opération de type 1) dans le sens horizontal

On considère maintenant une partition \mathcal{S} obtenue à partir \mathcal{R} via une opération de type 1) dans le sens horizontal et on veut décrire un type géométrique de \mathcal{S} à partir de la donnée d'un type géométrique de \mathcal{R} ("un" type géométrique car les numérotations des rectangles et les orientations des côtés ne sont pas fixées).

Rappelons que \mathcal{S} est obtenue en découpant un rectangle de \mathcal{R} entre deux barreaux horizontaux δ_1 et δ_2 tels que : — δ_2 est immédiatement au-dessus de δ_1 ,
— $f(\delta_1) \subset \partial^s R$ et $f(\delta_2) \subset \partial^s R$.

En fait, on choisit de fixer les numérotations de rectangles et les orientations des côtés comme suit :

- on note R_1, \dots, R_n les rectangles de \mathcal{R} où R_n est le rectangle que l'on va découper (dorénavant, δ_1 et δ_2 sont des barreaux horizontaux de R_n),
- on choisit des orientations des horizontales et des verticales des R_i avec la seule exigence que δ_2 soit au-dessus de δ_1 dans R_n .
- on note alors S_1, \dots, S_n, S_{n+1} les rectangles de \mathcal{S} où $S_i = R_i$ pour $i \leq n-1$, où S_n est la partie de R_n située en-dessous de δ_1 et S_{n+1} est la partie de R_n située au-dessus de δ_2 .
- l'orientation des horizontales et des verticales des rectangles de \mathcal{S} est celle induite par l'orientation des horizontales et des verticales des rectangles de \mathcal{R} .

Un type géométrique T de \mathcal{R} et un type géométrique \tilde{T} de \mathcal{S} sont fixés par ces numérotations et ces orientations. Notre but est de décrire le type géométrique \tilde{T} en fonction de T et du choix du barreau horizontal δ_1 de R_n (le choix de δ_2 est entièrement déterminé par celui de δ_1).

Remarquons maintenant que l'hypothèse $f(\delta_1) \subset \partial^s R$ et $f(\delta_2) \subset \partial^s R$ implique directement que δ_1 et δ_2 sont des bords stables de composantes de $f^{-1}(f(R_n) \cap R)$. En notant, $H_n^1, \dots, H_n^{h_n}$ ces composantes et en utilisant, de plus, le fait que δ_2 est immédiatement au-dessus de δ_1 , on obtient qu'il existe $j \leq h_n - 1$ tel que δ_1 est le bord supérieur de H_n^j et δ_2 est le bord inférieur de H_n^{j+1} . Par suite, il existe $j \leq h_n - 1$ tel que :

- S_n est le sous-rectangle horizontal situé entre le bord inférieur de R_n et le bord supérieur de H_n^j ,
- S_{n+1} est le sous-rectangle horizontal de R_n situé entre le bord inférieur de H_n^{j+1} et le bord supérieur de R_n .

On note S l'union des rectangles de \mathcal{S} .

Remarquons que $S \subset R$ et que S contient $f^{-1}(f(R) \cap R)$. Par conséquent, on a $f(S) \cap S = f(R) \cap S$. En notant $V_k^1, \dots, V_k^{v_k}$ les composantes de $f(R) \cap R_k$, ordonnées par l'orientation des horizontales de R_k , on en déduit que :

- si $k \leq n-1$ alors $f(S) \cap S_k$ est formé des v_k sous-rectangles verticaux $V_k^1, \dots, V_k^{v_k}$,

— si $k = n$ ou $k = n + 1$ alors $f(S) \cap S_k$ est formé des v_n sous-rectangles verticaux $V_n^1 \cap S_k, \dots, V_n^{v_n} \cap S_k$.

Par conséquent, $f^{-1}(f(S) \cap S)$ est formé de $v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + 2v_n$ sous-rectangles horizontaux que l'on notera \tilde{H}_i^j en les ordonnant suivant l'orientation des verticales des S_i (qui coïncide, par hypothèse, avec l'orientation des verticales des R_i). Plus précisément, ces sous-rectangles horizontaux sont les préimages par f des $V_k^l \cap S$ et donc :

— si $f(H_i^j) = V_n^l$ alors H_i^j contient deux sous-rectangles $\tilde{H}_i^{\tilde{J}} = f^{-1}(V_k^l) \cap S_n$ et $\tilde{H}_i^{\tilde{J}+1} = f^{-1}(V_k^l) \cap S_{n+1}$ si $\varepsilon(i, j) = +$, et contient deux sous-rectangles $\tilde{H}_i^{\tilde{J}} = f^{-1}(V_k^l) \cap S_{n+1}$ et $\tilde{H}_i^{\tilde{J}+1} = f^{-1}(V_k^l) \cap S_n$ si $\varepsilon(i, j) = -$,

— si $f(H_i^j) = V_k^l$ avec $k < n$ alors H_i^j est exactement égal à un des rectangles $\tilde{H}_i^{\tilde{J}}$

On doit enfin rappeler que H_n^j est dans S_n si $j \leq j_0$ et dans S_{n+1} si $j > j_0$.

Ceci montre la proposition suivante :

Proposition 3.35 *Soit \mathcal{S} la partition déduite de $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ en découpant le rectangle rectangle R_n horizontalement entre $H_n^{j_0}$ et $H_n^{j_0+1}$.*

On note S_1, \dots, S_{n+1} les rectangles de \mathcal{S} où $S_i = R_i$ si $i \leq n - 1$ où S_n et S_{n+1} sont les moitiés inférieure et supérieure de R_n . On suppose que les orientations des horizontales et des verticales des rectangles de \mathcal{S} sont les orientations des horizontales et des verticales des rectangles de \mathcal{R} .

On note $T = \{n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi, \varepsilon\}$ le type géométrique de \mathcal{R} et on note $\tilde{T} = \{n + 1, \{\tilde{h}_i\}, \{\tilde{v}_i\}, \tilde{\Phi}, \tilde{\varepsilon}\}$ le type géométrique de \mathcal{S} .

Alors les entiers \tilde{h}_i, \tilde{v}_i et les fonctions $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\varepsilon}$ sont donnés par l'algorithme suivant :

$\tilde{v}_i = v_i$ si $i \leq n$ et $\tilde{v}_{n+1} = v_n$.

Pour $i = 1$ à $n - 1$

Initialiser \tilde{j} à la valeur 1

Pour $j = 1$ à $j = h_i$,

Notons $(k, l) = \Phi(i, j)$.

Si $k < n$ alors $\tilde{\Phi}(i, \tilde{j}) = (k, l)$ $\tilde{\varepsilon}(i, \tilde{j}) = \varepsilon(i, j)$

Augmenter \tilde{j} de 1

Si $k = n$ et $\varepsilon(i, j) = +$ alors $\tilde{\Phi}(i, \tilde{j}) = (n, l)$ $\tilde{\varepsilon}(i, \tilde{j}) = +$
 $\tilde{\Phi}(i, \tilde{j} + 1) = (n + 1, l)$ $\tilde{\varepsilon}(i, \tilde{j} + 1) = +$

Augmenter \tilde{j} de 2

Si $k = n$ et $\varepsilon(i, j) = -$ alors $\tilde{\Phi}(i, \tilde{j}) = (n + 1, l)$ $\tilde{\varepsilon}(i, \tilde{j}) = -$
 $\tilde{\Phi}(i, \tilde{j} + 1) = (n, l)$ $\tilde{\varepsilon}(i, \tilde{j} + 1) = -$

Augmenter \tilde{j} de 2

$\tilde{h}_i = \tilde{j} - 1$

Initialiser \tilde{j} à la valeur 1

Pour $j = 1$ à $j = j_0$,

Notons $(k,l) = \Phi(n,j)$

Si $k < n$ alors $\tilde{\Phi}(n,\tilde{j}) = (k,l) \quad \tilde{\varepsilon}(n,\tilde{j}) = \varepsilon(n,j)$

Augmenter \tilde{j} de 1

Si $k = n$ et $\varepsilon(n,j) = +$ $\tilde{\Phi}(n,\tilde{j}) = (n,l) \quad \tilde{\varepsilon}(n,\tilde{j}) = +$

$\tilde{\Phi}(n,\tilde{j}+1) = (n+1,l) \quad \tilde{\varepsilon}(n,\tilde{j}+1) = +$

Augmenter \tilde{j} de 2

Si $k = n$ et $\varepsilon(n,j) = -$ $\tilde{\Phi}(n,\tilde{j}) = (n+1,l) \quad \tilde{\varepsilon}(n,\tilde{j}) = -$

$\tilde{\Phi}(n,\tilde{j}+1) = (n,l) \quad \tilde{\varepsilon}(n,\tilde{j}+1) = -$

Augmenter \tilde{j} de 2

$\tilde{h}_n = \tilde{j} - 1$

Initialiser \tilde{j} à la valeur 1

Pour $j = j_0 + 1$ à $j = h_n$,

Notons $(k,l) = \Phi(n,j)$.

Si $k < n$ alors $\tilde{\Phi}(n+1,\tilde{j}) = (k,l) \quad \tilde{\varepsilon}(n+1,\tilde{j}) = \varepsilon(n,j)$

Augmenter \tilde{j} de 1

Si $k = n$ et si $\varepsilon(n,j) = +$ alors $\tilde{\Phi}(n+1,\tilde{j}) = (n,l) \quad \tilde{\varepsilon}(n+1,\tilde{j}) = +$

$\tilde{\Phi}(n+1,\tilde{j}+1) = (n+1,l) \quad \tilde{\varepsilon}(n+1,\tilde{j}+1) = +$

Augmenter \tilde{j} de 2

Si $k = n$ et si $\varepsilon(n,j) = -$ alors $\tilde{\Phi}(n+1,\tilde{j}) = (n+1,l) \quad \tilde{\varepsilon}(n+1,\tilde{j}) = -$

$\tilde{\Phi}(n+1,\tilde{j}+1) = (n,l) \quad \tilde{\varepsilon}(n+1,\tilde{j}+1) = -$

Augmenter \tilde{j} de 2

$\tilde{h}_{n+1} = \tilde{j} - 1$

Opération 1) dans le sens vertical

On veut maintenant décrire un type géométrique d'une partition \mathcal{S} obtenue à partir \mathcal{R} via une opération de type 1) dans le sens vertical. Étant donné la lourdeur de la description directe, on va plutôt se ramener au cas précédent par une pirouette.

Rappelons que \mathcal{S} est obtenue en découpant un rectangle de \mathcal{R} entre deux barreaux verticaux δ_1 et δ_2 tels que :

- δ_2 est immédiatement à droite de δ_1 dans R_i ,
- $f^{-1}(\delta_1) \subset \partial^u R$ et $f^{-1}(\delta_2) \subset \partial^s R$.

On utilise alors la remarque suivante :

Remarque Soit K un ensemble selle saturé d'un champ X sur une variété \mathcal{M} et soit $\mathcal{R} = \{\Sigma, \{R_i\}\}$ une partition de Markov de K pour X . On note f l'application de retour par le flot de X sur Σ .

Alors on vérifie facilement que K est également un ensemble selle saturé pour le champ $-X$. L'application sur Σ par le flot de $-X$ est l'application f^{-1} . Quand on passe de X à X^{-1} , les directions stables et instables sont échangées (ne parlons plus d'horizontales et de verticales pour ne pas faire de confusion). Les barreaux instables pour f sont donc les barreaux stables pour f^{-1} . De plus, la condition de découpage entre deux barreaux

instables pour f est exactement la condition de découpage entre deux barreaux stables pour f^{-1} .

Par conséquent, si on considère la partition \mathcal{R} non plus pour f , mais pour f^{-1} , on ramène une opération de type 1) dans le sens vertical à une opération de type 1) dans le sens horizontal.

On vérifie facilement que l'on a le lemme suivant :

Lemme 3.36 *Soit \mathcal{R} une partition de Markov essentielle tracée dans une section Σ et soit f l'application de retour sur Σ . On suppose f^{-1} bien définie sur l'union des rectangles de \mathcal{R} .*

On note $T = \{n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi, \varepsilon\}$ le type géométrique de \mathcal{R} vue comme partition pour f et \tilde{T} le type de \mathcal{R} vue comme pour f^{-1} (avec la même numérotation des rectangles et les mêmes orientations des bords). Alors, on a $\tilde{T} = \{n, \{v_i\}, \{h_i\}, \Phi^{-1}, \varepsilon\}$.

On s'est alors ramené au cas précédent : pour obtenir un type géométrique \tilde{T} de la partition \mathcal{S} obtenue par découpage de \mathcal{R} dans le sens vertical, il suffit, d'après la remarque précédente (et en notant T un type géométrique de \mathcal{R}) :

- de considérer le type géométrique T' de \mathcal{R} vue comme partition pour la dynamique inverse (en utilisant le lemme 3.36),
- d'appliquer la proposition 3.35 pour déduire $(\tilde{T})'$ de la partition \mathcal{S} (vue comme partition pour la dynamique inverse) à partir du type T' ,
- d'appliquer à nouveau le lemme 3.36 pour déduire le type \tilde{T} du type $(\tilde{T})'$.

Opération de type 1bis)

Il faut également traduire l'effet en termes de types géométriques des opérations de type 1bis). Cependant, rappelons que les opérations de type 1bis) sont les inverses des opérations de type 1). Supposons qu'une partition \mathcal{S} soit déduite d'une partition \mathcal{R} par une opération de type 1bis) dans le sens horizontal. Alors, pour déduire un type géométrique de la partition \mathcal{S} à partir d'un type géométrique de la partition \mathcal{R} , il suffit d'inverser la procédure de la proposition 3.35. Pour ne pas trop alourdir cette partie, je laisse le lecteur le faire.

3.2.3 Traduction des opérations de types 2) et 2bis)

Opération de type 2)

Nous devons maintenant traduire l'effet du dédoublement d'un rectangle d'une partition $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, on pourra toujours supposer que c'est le rectangle R_n que l'on dédouble.

On note $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n, S_{n+1}\}$ la partition déduite de \mathcal{R} par dédoublement de R_n , indiquée de façon à ce que $S_i = R_i$ pour $i \leq n$ et $S_{n+1} = X^{\frac{1}{2}}(R_n)$. On note S l'union des

rectangles de \mathcal{S} . On note f l'application de retour sur R et \tilde{f} l'application de retour sur S . On a alors (par définition des rectangles de \mathcal{S}):

- $\tilde{f}(S_i) = f(R_i)$ si $i \leq (n-1)$,
- $\tilde{f}(S_n) = S_{n+1}$
- $\tilde{f}(S_{n+1}) = f(R_n)$.

On en déduit immédiatement la proposition suivante :

Proposition 3.37 *Soit $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_{n+1}\}$ la partition déduite de $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ en dédoublant le rectangle R_n . On suppose les rectangles indicés tels que $S_i = R_i$ si $i \leq n$ et $S_{n+1} = X^{\frac{1}{2}}(R_n)$. On suppose que les orientations des horizontales et des verticales des rectangles de \mathcal{S} sont induites par les orientations des horizontales et des verticales des rectangles de \mathcal{R} . On note $T = \{n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi, \varepsilon\}$ le type géométrique de \mathcal{R} .*

Alors le type géométrique de \mathcal{S} est $\tilde{T} = \{n+1, \{\tilde{h}_i\}, \{\tilde{v}_i\}, \tilde{\Phi}, \tilde{\varepsilon}\}$ où :

- $\tilde{h}_i = h_i$ si $i \leq n-1$, $\tilde{h}_n = 1$, $\tilde{h}_{n+1} = h_n$,
- $\tilde{v}_i = v_i$ si $i \leq n$ et $\tilde{v}_{n+1} = 1$,
- $\tilde{\Phi}(i, j) = \Phi(i, j)$ si $i \leq n-1$ ou si $i = n+1$, $\tilde{\Phi}(n, 1) = (n+1, 1)$,
- $\tilde{\varepsilon}(i, j) = \varepsilon(i, j)$ si $i \leq n-1$ ou si $i = n+1$, $\tilde{\varepsilon}(n, 1) = +$.

Opération de type 2bis)

Avec un raisonnement inverse, on obtient immédiatement la proposition suivante :

Proposition 3.38 *On suppose donnée une partition $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_{n+1}\}$ tel que, si f est l'application de retour sur l'union des rectangles de \mathcal{R} , alors $f(R_n) = R_{n+1}$. Soit alors $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ la partition déduite de celle-ci en supprimant le rectangle R_n (opération de type 2bis)).*

On suppose les rectangles de \mathcal{S} numérotés de la façon à ce que $S_i = R_i$ si $i \leq n$. On suppose que les orientations des horizontales et des verticales des rectangles de \mathcal{S} sont les orientations des horizontales et des verticales des rectangles de \mathcal{R} . On note $T = \{n+1, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi, \varepsilon\}$ le type géométrique de \mathcal{R} .

Alors le type géométrique de \mathcal{S} est $T' = \{n, \{\tilde{h}_i\}, \{\tilde{v}_i\}, \tilde{\Phi}, \tilde{\varepsilon}\}$ où :

- $\tilde{h}_i = h_i$ si $i \leq n-1$, $\tilde{h}_n = h_{n+1}$,
- $\tilde{v}_i = v_i$ si $i \leq n-1$ et $\tilde{v}_n = v_{n+1}$,
- $\tilde{\Phi}(i, j) = \Phi(i, j)$ si $i \leq n-1$ et $\tilde{\Phi}(n, j) = \Phi(n+1, j)$,
- $\tilde{\varepsilon}(i, j) = \varepsilon(i, j)$ si $i \leq n-1$ et $\tilde{\varepsilon}(n, j) = \varepsilon(n+1, j)$.

3.2.4 Démonstration de la proposition 3.2

Démonstration de la proposition 3.2 Soit T un type géométrique. Alors, d'après le théorème 2.1, il existe un modèle (M, X) dont l'ensemble selle saturé maximal invariant K admet une partition essentielle de type géométrique T . Si T est transitif, alors, par définition, K est transitif.

On veut énumérer les types géométriques équivalents pour les flots à T c'est-à-dire, par définition énumérer tous les types géométriques de partitions de Markov de (X, K) . Rappelons que l'on peut se limiter aux partitions essentielles, d'après le corollaire 2.2.

La proposition 3.30 montre que deux partitions de Markov essentielles quelconques de K se déduisent l'une de l'autre par une suite d'opérations de quatre types que nous avons appelés $1)$, $1bis)$, $2)$ et $2bis)$. Étant donné une partition \mathcal{R} de K , il n'existe qu'un nombre fini d'opérations de type $1)$, $1bis)$, $2)$ et $2bis)$ que l'on peut effectuer sur K (c'est clair, par définition, pour les types $1bis)$, $2)$ et $2bis)$; pour ce qui est du type $1)$, voir les remarques suivant la définition de ce type d'opérations).

Étant donné une partition \mathcal{R} de K , on peut donc construire ainsi un arbre dont la racine est \mathcal{R} , dont les sommets sont toutes les partitions de K et tel qu'une partition \mathcal{R}_2 est sur un fils d'une autre partition \mathcal{R}_1 si et seulement si on déduit \mathcal{R}_2 à partir de \mathcal{R}_1 via une seule opération de type $1)$, $1bis)$, $2)$ ou $2bis)$.

Grâce aux résultats de la présente partie, si on connaît un type géométrique d'un sommet, on connaît tous les types géométriques de ce sommet, ainsi que ceux de tous ces fils et celui de son père (c'est-à-dire de tous ces voisins sur l'arbre).

Il suffit alors de choisir un parcours surjectif de l'arbre et d'annoncer les types géométriques des sommets que l'on rencontre au fur et à mesure du parcours. \square

Chapitre 4

Flots en dimension 3 et suspensions de difféomorphismes de surfaces

Au cours de chacun des chapitres précédents, on a remarqué des différences fondamentales entre l'étude générale des flots hyperboliques en dimension 3 et celle des difféomorphismes hyperboliques des surfaces. Cependant, rappelons qu'on peut associer canonicquement un flot hyperbolique sur une variété de dimension 3 à tout difféomorphisme hyperbolique de surface en considérant la suspension de ce difféomorphisme. Ceci nous amène à nous demander comment détecter, sur les présentations combinatoires que nous avons introduites, la différence entre un flot hyperbolique quelconque (en dimension 3) et la suspension d'un difféomorphisme hyperbolique de surface.

Le problème global dépend trop du plongement des ensembles hyperboliques dans la variété considérée. Par ailleurs, notre démarche a d'abord consisté à essentiellement ramener l'étude globale des champs hyperboliques à une étude en germe le long d'un ensemble selle saturé. On se pose donc le problème plus précis suivant :

(★) *Comment lit-on que le germe d'un champ de vecteurs, en dimension 3, le long d'un ensemble selle saturé est, ou n'est pas, le germe de la suspension d'un difféomorphisme de Smale de surface le long d'un ensemble selle saturé ?*

Cette formulation nécessite des commentaires. Remarquons tout d'abord qu'un ensemble selle (transitif) d'un champ de vecteurs en dimension 3 possède toujours un voisinage en restriction auquel le champ est équivalent à la suspension d'un difféomorphisme de surface compacte au voisinage d'un *ensemble basique hyperbolique* (*basic set* en anglais), c'est-à-dire d'un ensemble hyperbolique maximal invariant d'un de ses voisinages (et transitif). En effet :

Choisissons une transversale locale Σ et une partition de Markov \mathcal{R} dans Σ de l'ensemble selle considéré. L'application de premier retour f sur Σ est bien définie sur l'union des rectangles R ; on peut inclure $R \cup f(R)$ dans une surface compacte S . Le difféomorphisme f est défini d'une famille de n rectangles disjoints de S sur une famille de n rectangles disjoints de S , on peut donc le compléter en un difféomorphisme de S ; le maximal invariant de R est alors un ensemble basique.

Notre problème (★) s'intéresse à un point de vue plus global. En effet, un mot parti-

culièrement important dans la formulation ci-dessus est le mot “saturé”. Dans la construction du difféomorphisme que nous venons de donner, l’ensemble basique peut ne pas être une pièce basique (une pièce basique est saturée). En effet, P. Blanchard et J. Franks ont montré (voir [BlFr]) que certains sous-shifts de type fini n’étaient pas associés à des pièces basiques de difféomorphismes de surfaces. Dans le même esprit, [BLJ] donne des obstructions à ce que certains types géométriques soient *réalisables pour les difféomorphismes*, c’est à dire correspondent à des partitions de Markov d’ensembles saturés de difféomorphismes de Smale de surfaces compactes.

Remarques

— Rappelons que l’on s’intéresse aux germes le long d’ensembles saturés car ce sont les seuls germes qui caractérisent la dynamique sur un voisinage invariant, les seuls germes qui sont isolés du reste de la dynamique par des voisinages filtrants, etc. En bref, ce sont les seules “pièces basiques” possibles du jeu de reconstruction de la dynamique.

— Les obstructions de [BlFr] et [BLJ] ne permettent pas *a priori* d’exhiber de germe de champ de vecteurs le long d’une ensemble selle saturé qui ne soit le germe d’une suspension le long d’un ensemble selle saturé : deux choix de transversales du même ensemble selle donne lieu à des types géométriques et même à des sous-shifts différents. Un des types géométriques (ou des sous-shifts) peut être réalisable pour les difféomorphismes et pas l’autre, (comme le montrera l’exemple de la figure 4.2).

Nous allons montrer deux approches du problème (*). Une des approches visera essentiellement à caractériser les types géométriques *réalisables pour les difféomorphismes*, l’autre approche consiste à rechercher des *sections de Birkhoff*.

Types géométriques réalisables pour les difféomorphismes — Types géométriques de suspensions

Notre première approche est la suivante. On considère un ensemble selle saturé K d’un champ hyperbolique X et on considère le type géométrique T d’une bonne partition de Markov de K . On se demande alors si le germe de $[X, K]$ est le germe de la suspension d’un difféomorphisme hyperbolique f d’une surface compacte le long d’un ensemble selle saturé Λ_f tel que (f, Λ_f) admet une partition de Markov de type géométrique T .

Il est équivalent de se demander si le type géométrique T est *réalisable pour les difféomorphismes*, selon la définition suivante :

Définition 4.1 *Un type géométrique T est réalisable pour les difféomorphismes s’il existe un difféomorphisme hyperbolique f d’une surface compacte et un ensemble selle saturé Λ_f de f admettant une partition de Markov de type T .*

(L’équivalence entre les deux formulations “[X, K] est le germe de la suspension de (f, Λ) qui admet une partition de type T ” et “ T est réalisable pour les difféomorphismes” découle immédiatement de la proposition 1.33).

La formulation en termes de réalisabilité est débarrassée de toute référence aux champs de vecteurs. Cependant, nous allons effectivement utiliser les champs de vecteurs pour montrer une caractérisation des types réalisables pour les difféomorphismes.

Notre outil de travail pour déterminer si un type géométrique est réalisable pour les difféomorphismes ou pas est la surface Σ^u associée au type géométrique T .

Rappelons que cette surface est obtenue comme intersection du saturé (par les orbites du flot) d'une partition ample essentielle de type T d'un ensemble selle K avec le bord de sortie d'un voisinage filtrant de K (lemme 1.41). D'autre part, Σ^u peut être reconstruite par recollement de rectangles le long de segments de leurs bords selon une combinatoire qui déterminée par le type géométrique T (lemme 1.42). Pour énoncer la caractérisation, rappelons simplement que les rectangles que l'on recolle sont les adhérences des composantes de $R \setminus f^{-1}(R)$, où R est l'union des rectangles d'une partition essentielle de type T et f l'application de retour sur cette partition. L'ensemble $R \setminus f^{-1}(R)$ contient les bord stables de R . Les images dans Σ des bords stables de R seront appelées les toits des tours de Σ^u . On a alors la caractérisation suivante :

Théorème 4.2 *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le type géométrique T est réalisable pour les difféomorphismes,*
2. — *La surface abstraite Σ^u associée à T se plonge dans une union finie de tores T_1, \dots, T_n ,*
 - *il existe sur ces tores un nombre fini de cercles plongés disjoints C_1^u, \dots, C_l^u tels que l'intersection de Σ^u avec l'union des C_i^u est exactement égale à l'union des toits des tours de Σ^u ,*
 - *chacun des cercle C_i^u peut être orienté de façon compatible avec les orientations de tous les toits de tours de Σ^u qu'il contient.*

Pour un type géométrique T , on a défini au chapitre 2 (notation 2.6) une suite de surfaces compactes à bords et coins notée $\mathcal{R}_{p,q}$ associée à T et aux entiers relatifs p et q (avec $p \leq q$). Si \mathcal{R} est une partition ample essentielle de type T pour un champ X et si le temps de retour sur l'union des rectangles R est égal à 1, alors on peut voir $\mathcal{R}_{p,q}$ comme l'union des $X^k(R)$ avec k entiers et $p \leq k \leq q$. Dans le cas où T est le type géométrique d'une partition de Markov pour un difféomorphisme hyperbolique f de surface compacte S , la surface $\mathcal{R}_{p,q}$ est simplement l'union des images par f^k (où $p \leq k \leq q$) des rectangles de la partition : pour tous p et q , la surface $\mathcal{R}_{p,q}$ est alors plongée dans la surface compacte S . Si on a $p \leq p' \leq q' \leq q$, on a bien sûr $\mathcal{R}_{p',q'} \subset \mathcal{R}_{p,q}$.

Définition 4.3 *Pour tous p et q , on appelle genre de $\mathcal{R}_{p,q}$, le genre minimal d'une surface sans bord dans laquelle on peut plonger $\mathcal{R}_{p,q}$. On définit alors le genre du type géométrique T comme la borne supérieure (quand p et q varient dans \mathbb{Z} avec $p \leq q$) des genres des surfaces $\mathcal{R}_{p,q}$ associées à T .*

Dans le premier appendice de ce chapitre, on montrera le corollaire suivant du théorème 4.2 :

Corollaire 4.4 *Un type géométrique est réalisable pour les difféomorphismes si et seulement s'il est de genre fini.*

Bien que démontré dans cet ordre, le théorème 4.2 et le corollaire 4.4 gagnent à être compris dans l'ordre inverse :

— Tout d'abord, la seule obstruction à la réalisabilité d'un type géométrique est la non-finitude de ce type.

— De plus, on a un critère effectif pour décider si un type géométrique est de genre fini ou non.

Remarque Bonatti et Jeandenans ont donné dans [BLJ] une autre caractérisation des types géométriques qui sont de genre fini. Cette caractérisation oblige à construire la surface $\mathcal{R}_{0,6n}$ associée au type géométrique (n est le nombre de rectangles du type géométrique). Dans sa thèse ([Jea]), Jeandenans a montré que les types de genres finis sont réalisables par homéomorphismes de surfaces compactes (sans réussir à obtenir des réalisations par des difféomorphismes de Smale).

Étonnamment, l'utilisation des flots donne une caractérisation complète. La démonstration s'avère par ailleurs beaucoup plus courte, et la caractérisation que l'on obtient n'oblige pas à construire de plus en plus d'itérés des partitions de Markov quand le nombre de rectangles augmente.

Le théorème 4.2 donne une réponse au problème (\star) , à travers le corollaire 4.7.

Définition 4.5 *Définissons les types géométriques de suspensions comme les types géométriques de partitions de Markov essentielles d'ensembles selles saturés de suspensions de difféomorphismes de Smale de surfaces compactes.*

Puisqu'à un type géométrique est uniquement associée une surface de sortie Σ^u , on peut poser la définition suivante :

Définition 4.6 *On dira que la surface de sortie $\Sigma^{u'}$ est obtenue à partir de la surface de sortie Σ^u par une opération élémentaire s'il existe des types géométriques T et T' tel que $\Sigma^{u'}$ correspond au type T' , Σ^u correspond au type T et T' est obtenu à partir de T via une opération élémentaire de type 1), 1bis), 2) ou 2bis) définie au chapitre précédent.*

Les effets des opérations élémentaires de types 1), 1bis), 2) et 2bis) ont été décrits au chapitre précédent et nous allons par ailleurs rappeler dans la première partie du présent chapitre comment obtenir la surface de sortie correspondant à un type donné. Les effets des opérations élémentaires sur les surfaces de sortie s'en déduisent directement. L'énoncé suivant est alors un corollaire immédiat du théorème 4.2. Cependant, la réponse à (\star) donnée par ce corollaire n'est pas effective : la caractérisation des types de suspensions est *a priori* non-décidable.

Corollaire 4.7 *Soit T un type géométrique et soit Σ^u la surface de sortie correspondante. Alors T est un type géométrique de suspension s'il existe une surface de sortie $\tilde{\Sigma}^u$ déduite de Σ^u par une suite finie de mouvements élémentaires et vérifiant la condition 2 du théorème 4.2.*

Germes admettant des sections de Birkhoff

La seconde approche du problème (\star) consiste à affaiblir les propriétés exigées : au lieu d'exiger d'un germe d'être le germe d'une suspension, on demande à ce germe d'être le germe d'un champ admettant une *section de Birkhoff*.

Pour être une suspension un flot doit admettre une surface compacte, sans bord, transverse au champ et coupant tout segment d'orbite d'une certaine longueur. Les sections de Birkhoff introduites dans [Bi17] sont des surfaces compactes, coupant tout segment d'orbite de longueur suffisante et "transverses presque partout" au champ. Plus précisément,

Définition 4.8 *Étant donné une variété compacte \mathcal{M} et un champ de vecteurs sans singularité X sur \mathcal{M} , une section de Birkhoff de (\mathcal{M}, X) est une surface compacte à bord S immergée dans \mathcal{M} , telle que :*

- le bord de S est constitué d'un nombre fini d'orbites périodiques de X ,
- $S \setminus \partial S$ est transverse à X ,
- $S \setminus \partial S$ est plongé dans \mathcal{M} ,
- il existe un temps τ tel que tout segment d'orbite de X de longueur τ coupe S ,

Remarque Le fait que S soit plongé sauf peut-être le long de son bord signifie qu'il peut arriver plusieurs feuillettes de S sur ses composantes de bord.

Définition 4.9 *Soit maintenant, le germe $[X, K]$ d'un champ X le long d'un ensemble selle saturé K .*

On dit que le germe $[X, K]$ admet une section de Birkhoff s'il existe un champ de hyperbolique sur une variété \mathcal{M} , portant le germe $[X, K]$ comme germe d'ensemble selle saturé et admettant une section de Birkhoff S dont le bord est constitué d'orbites de K .

On dit que le germe $[X, K]$ est un germe de suspension s'il existe une suspension de difféomorphisme hyperbolique de surface compacte portant le germe $[X, K]$ comme germe d'ensemble selle saturé.

Cette fois-ci les outils utilisés sont les laminations d'entrée \mathcal{L}^s et de sortie \mathcal{L}^u associée au germe d'un champ X le long d'un ensemble selle saturé K . Rappelons que ces laminations, introduites dans la partie 1.1.2, sont les intersections des variétés stables et instables de K avec les bords d'entrée et de sortie d'un voisinage filtrant de K .

Nous allons construire deux graphes Γ^s et Γ^u à partir des laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u . Ces laminations ne possèdent qu'un nombre fini de feuilles compactes qui sont naturellement orientées. Les sommets des graphes Γ^s et Γ^u seront les feuilles compactes des laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u . De plus, toute demi-feuille non-compacte de \mathcal{L}^s ou \mathcal{L}^u spirale sur une feuille compacte. Une arête de Γ^s (resp. Γ^u) joindra donc deux feuilles compactes s'il existe une feuille non-compacte de \mathcal{L}^s (resp. \mathcal{L}^u) spiralant sur les côtés droits et gauches de ces feuilles compactes. (On ne tiendra donc pas compte des feuilles compactes spiralant sur deux côtés gauches ou deux côtés droits.)

Ainsi, deux sommets qui sont dans une même composante connexe de Γ^s (resp. Γ^u) correspondent à des feuilles compactes qui sont dans une même composante connexe de \mathcal{L}^s (resp. \mathcal{L}^u). On parlera donc parfois de composante du bord d'entrée (resp. de sortie) d'un

voisinage filtrant portant une composante connexe de Γ^s (resp. de Γ^u): on sous-entend “portant la composante connexe de \mathcal{L}^s ou \mathcal{L}^u correspondante”. On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.10 *Soit (X, K) un ensemble selle saturé transitif, soient Γ^s et Γ^u les graphes construits à partir des laminations d’entrée et sortie associées à K . Considérons la propriété 3 suivante :*

3. — *Dans les graphes Γ^s et Γ^u , tout sommet est le sommet de départ d’au plus une arête et le sommet d’arrivée d’au plus une arête (les composantes connexes de Γ^s et Γ^u sont donc soit des cycles orientés, soit des segments orientés),*
- *le nombre de composantes non-cycliques de Γ^s est égal au nombre de composantes non-cycliques de Γ^u ,*
- *deux sommets de Γ^s qui sont dans des composantes connexes distinctes du graphe Γ^s (resp. Γ^u) correspondent à des feuilles compactes qui sont dans des composantes connexes distinctes de la lamination \mathcal{L}^s (resp. \mathcal{L}^u),*
- *toute composante du bord d’entrée (resp. de sortie) du modèle de K portant un cycle de Γ^s (resp. Γ^u) est un tore, toute composante portant une composante non-cyclique est une sphère.*

Alors on a les deux implications suivantes :

- *si $[X, K]$ est un germe de suspension, alors (X, K) vérifie la condition 3,*
- *si (X, K) vérifie la condition 3 alors le germe $[X, K]$ admet une section de Birkhoff.*

Remarques

— Rappelons que Fried a montré que tout flot d’Anosov transitif admet une section de Birkhoff ([Fr83]). Christy a distingué les attracteurs *cohérents* et *incohérents* dont il a montré qu’ils admettent et n’admettent pas de sections de Birkhoff. Puisque les flots d’Anosov transitifs et les attracteurs se transforment en pièces basiques de dimension 1 via des opérations de dérivé d’Anosov, notre théorème généralisera ces résultats. Remarquons cependant que, contrairement au résultat d’existence systématique de Fried et quasi-systématique de Christy, la condition 3 demande aux laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u d’avoir une forme assez spéciale par rapport à la forme générale.

— Je suis persuadé que la condition 3 est aussi nécessaire pour admettre une section de Birkhoff. Cependant la preuve demanderait (essentiellement) de manipuler des chirurgies dite de Dehn non-plus effectuées sur les flots d’Anosov, mais sur des champs de Smale et des applications de retours mélangeant un comportement de difféomorphisme de Smale et d’homéomorphisme pseudo-Anosov. La mise au propre de tout cela pourrait être un peu longue.

— Si on se donne le type géométrique T d’une partition de Markov essentielle d’un germe $[X, K]$, alors la condition 3 se traduit en une condition portant sur les surfaces Σ^s et Σ^u associées au type T (ceci sera fait dans l’appendice B).

Le théorème 4.10 permet de donner facilement des exemples de types géométriques qui ne sont pas des types de suspensions (en fait, on n’utilise qu’une toute petite partie du théorème 4.10). On montrera donc (par un exemple) le corollaire suivant :

Corollaire 4.11 *Il existe un germe de champ de vecteurs en dimension 3, le long d'une pièce basique selle qui n'est pas un germe de suspension.*

4.1 Types géométriques réalisables pour les difféomorphismes

4.1.1 Rappels et précisions sur les surfaces Σ^s , Σ^u , $\mathcal{R}_{p,q}$ et \mathcal{R}_∞

Notre outil principal pour caractériser les types réalisables pour les difféomorphismes est la surface de sortie Σ^u (et son analogue d'entrée Σ^s). Nous allons rappeler trois définitions successives de la surface Σ^u ; la deuxième (la plus technique et la plus effective) sera celle que nous utiliserons réellement pour montrer le théorème 4.2.

On n'utilise ici que de partitions amples essentielles.

Définition initiale (abstraite) :

Les ensembles Σ^s et Σ^u sont, par définition, les intersections du saturé (par le flot) d'une partition de Markov ample essentielle $\mathcal{R} = \{R_i\}$ d'un ensemble selle saturé K avec les bords $\partial_1 M$ et $\partial_2 M$ d'un voisinage filtrant de K . On a montré (lemme 1.41) que ces ensembles sont des surfaces compactes à bords. D'autre part, ces surfaces ne dépendent que du type géométrique T de \mathcal{R} (proposition 1.38).

Définition constructive (formule explicite) :

On a donné, dans la partie 2.2.1, une formule explicite pour la surface Σ^u .

Comme habituellement, on note R l'union des rectangles de la partition et f l'application de premier retour sur R . Par définition d'une bonne partition de Markov, $R_i \cap f^{-1}(R)$ est constitué, de sous-rectangles horizontaux $H_i^1, \dots, H_i^{h_i}$ de R_i et ces sous-rectangles horizontaux ne contiennent pas les bords stables de R_i .

Il s'en suit que $R_i \setminus f^{-1}(R)$ est une union de sous-rectangles horizontaux semi-ouverts $A_i^0, \dots, A_i^{h_i}$ (par "semi-ouverts", on entend des sous-rectangles horizontaux privés d'un ou deux de leurs côtés horizontaux). Si $j \neq 0, h_i$, le sous-rectangle A_i^j est entre H_i^j et H_i^{j+1} . Le sous-rectangle A_i^0 est en dessous de H_i^1 et le sous-rectangle $A_i^{h_i}$ est au-dessus de $H_i^{h_i}$.

Par suite, A_i^0 et $A_i^{h_i}$ sont tous deux privés d'un de leurs côtés horizontaux et chaque A_i^j (où $j \neq 0, h_i$) est privé de ses deux côtés horizontaux. L'adhérence \bar{A}_i^j est donc l'union de A_i^j et d'un ou deux de ses côtés. En notant $A = \bigcup_{i,j} A_i^j$, les côtés horizontaux de \bar{A} sont soit dans $\bar{A} \setminus A$, soit dans le bord horizontal $\partial^s R$ de R .

On suppose, quitte à multiplier X par une fonction lisse strictement positive appropriée, que l'application de retour f coïncide avec le temps 1 du flot de X . Alors quitte à isotoper le bord de sortie de M le long du flot, Σ^u est alors donnée par la formule suivante (voir la partie 2.2.1) :

$$\Sigma^u = \bigcup_{x \in \bar{A}} X^{\psi^u(x)}(x)$$

où ψ^u peut, par exemple, être n'importe quelle fonction réelle lisse définie sur \bar{A} telle que :

- ψ^u prend ses valeurs dans $[1,2]$,
- ψ^u vaut 2 sur $\bar{A} \setminus A$ et vaut 1 sur $A \cap \partial^s R$,
- la différentielle de ψ^u est nulle sur $\bar{A} \setminus A$ et sur $A \cap \partial^s R$. (voir la figure 2.4)

Notation 4.12 On notera $(\star\star)$ les conditions sur la fonction ψ^u énoncées ci-dessus.

Définition constructive (par recollement de sous-rectangles) :

Comme l'énonce le lemme 1.42, la surface Σ^u est homéomorphe à la surface construite en considérant l'union disjointes des sous-rectangles \bar{A}_i^j et en recollant les côtés horizontaux constituant $\bar{A} \setminus A$ sur des segments disjoints de $A \cap \partial^s R$ via f (voir figure 1.6). Ceci nous permet de construire la surface Σ^u directement à partir du type géométrique T .

Ponts et tours

L'ensemble \bar{A} est une union de sous-rectangles disjoints des R_i . Dans la suite, il sera commode de distinguer les deux types de composantes de \bar{A} .

Définitions 4.13

— Si $j \neq 0, h_i$ alors $\bar{A}_i^j \setminus A_i^j$ est constitué de deux côtés horizontaux de \bar{A}_i^j . On dira que la projection (par X^{ψ^u}) sur Σ^u de \bar{A}_i^j est un pont de Σ^u . Les images des côtés horizontaux de \bar{A}_i^j seront les pieds de ce ponts.

— Si $j = 0$ ou $j = h_i$ alors $\bar{A}_i^j \setminus A_i^j$ est constitué d'un seul côté horizontal de \bar{A}_i^j , l'autre côté horizontal étant dans $\partial^s R_i$. On dira que la projection sur Σ^u de \bar{A}_i^j est une tour de Σ^u . L'image du côté horizontal situé dans $\bar{A}_i^j \setminus A_i^j$ sera le pied de la tour et l'image de l'autre côté horizontal sera le toit de la tour.

La (troisième) définition de Σ^u implique que tout pied de pont ou de tour est un sous-segment du toit d'une tour (on dira que *les pieds sont posés sur les toits*).

On appellera alors *cycle de tours* une suite finie de tours T_1, \dots, T_n telles que le pied de T_2 est posé sur le toit de T_1 , le pied de T_3 est posé sur le toit de T_2, \dots , et le pied de T_1 est posé sur le toit de T_n .

Par exemple, la surface Σ^u associée au type géométrique à un rectangle (de la suspension) du fer à cheval (voir figure 1.6) possède deux tours T_1 et T_2 et un pont P . Une des deux tours (disons T_1) forme un cycle à elle-seule (le pied de T_1 est posé sur le toit de T_1 elle-même). Le pied de T_2 est également posé sur le toit de T_1 et les deux pieds de P sont posés sur le toit de T_2 .

Orientations

Les tours de Σ^u sont des projections de sous-rectangles. En fait, une tour est presque un rectangle plongé: le seul défaut d'injectivité de la projection restreinte à une tour provient de ce que le pied d'une tour peut être posé sur son propre toit. Ceci nous permet de parler de côtés stables et instables d'une tour. Le pied et le toit de la tour sont les côtés stables ou horizontaux de cette tour, les deux autres côtés sont ses côtés instables.

Remarquons par ailleurs que la surface Σ^u est transverse au champ. L'orientation de la variété ambiante induit donc une orientation de Σ^u .

Ces deux remarques vont nous permettre de définir des orientations des côtés stables et instables des tours et des âmes des cycles de tours :

Convention

— On décide d'orienter les côtés instables d'une tour de Σ^u du toit de la tour vers son pied.

— Un cycle de tours est homéomorphe à un anneau. La convention ci-dessus induit en particulier une orientation des âmes des cycles de tours.

— Puisque Σ^u est orientée, toute orientation des côtés instables des tours induit une orientation des côtés stables. En particulier, les toits des tours sont maintenant munis d'une orientation.

Remarque Les côtés stables et instables des sous-rectangles \bar{A}_i^j sont orientés par les orientations des horizontales et des verticales des rectangles de la partition \mathcal{R} . On fera attention à ce que les orientations définies ci-dessus des côtés stables et instables des tours de Σ^u ne coïncident pas, *a priori* avec ces orientations des côtés stables et instables des \bar{A}_i^j

On peut donner des définitions analogue pour Σ^s . Celle-ci est en particulier définie comme l'image de $\text{adh}(R \setminus f(R))$ par X^{ψ^s} où ψ^s est une fonction que l'on peut choisir vérifiant une condition analogue à $(\star\star)$. On remarquera que les pieds et les toits des ponts et des tours de Σ^s sont maintenant des côtés *instables*.

Les définitions ci-dessus donnent un sens précis au théorème 4.2.

Les surfaces $\mathcal{R}_{p,q}$ et \mathcal{R}_∞

D'autres outils de travail importants seront les surfaces $\mathcal{R}_{p,q}$ et \mathcal{R}_∞ . Voyons d'abord comment sont définies ces surfaces.

On considère une partition de Markov essentielle \mathcal{R} d'un ensemble selle saturé K d'un champ de vecteurs X . On note, comme habituellement, R l'union des rectangles de \mathcal{R} . On peut toujours multiplier X par une fonction lisse strictement positive telle que le temps de retour sur R soit égal à 1, ce que l'on fait. On défini alors, pour tout p et q entiers tels que $p \leq q$,

$$\mathcal{R}_{p,q} = \bigcup_{k=p}^q X^k(R) \text{ et } \mathcal{R}_\infty = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} X^k(R)$$

Remarques

— Notons que si $p' \leq p$ et $q \leq q'$ alors $\mathcal{R}_{p,q}$ se plonge, par définition, dans $\mathcal{R}_{p',q'}$ et, pour tout p et q , $\mathcal{R}_{p,q}$ se plonge dans \mathcal{R}_∞ .

— On notera généralement $f = X^1$ l'application de premier retour sur $\mathcal{R}_{p,q}$ et \mathcal{R}_∞ . Cette application n'est que partiellement définie sur $\mathcal{R}_{p,q}$ mais est globalement définie sur \mathcal{R}_∞ .

— Les ensembles $\mathcal{R}_{p,q}$ et \mathcal{R}_∞ , munis de l'application $f = X^1$, ne dépendent pas, à conjugaison topologique près, de la partition essentielle \mathcal{R} mais seulement de son type géométrique T , d'après les propositions 1.33 et 1.38.

— Ces ensembles sont bien les mêmes que ceux définis à la notation 2.6 comme il a été remarqué après le corollaire 2.11.

Les corollaires 2.9 et 2.11 montrent que :

- pour tous p et q finis, $\mathcal{R}_{p,q}$ est une surface compacte à bord et coins,
- \mathcal{R}_∞ est une surface (non-compacte) séparée, à bord et coins.

Remarquons que, par définition, $\mathcal{R}_{p,q}$ et \mathcal{R}_∞ sont transverses au champ X et coupent tout segment d'orbite de longueur 1 respectivement contenus dans les ouvrages $\mathcal{P}_{p,q}$ et \mathcal{P}_∞ (voir la partie 2.1). On rappelle alors que, pour tout $p \leq 0$ et tout $q \geq 1$, $\mathcal{P}_{p,q}$ est un voisinage de K alors que \mathcal{P}_∞ est un voisinage invariant de K .

4.1.2 Démonstration de $1 \Rightarrow 2$

On suppose donné un type T réalisable pour les difféomorphismes. On considère alors un difféomorphisme de Smale f d'une surface compacte S_f dont une pièce basique Λ_f admet une partition de Markov \mathcal{R} de type T . Le lemme suivant nous permet de supposer que l'ensemble non-errant de f est réduit à l'union de Λ_f et d'un nombre fini d'orbites périodiques puits et sources.

Lemme 4.14 *Soit g un difféomorphisme hyperbolique d'une surface compacte et Λ_g un ensemble selle de g .*

Le germe de g le long de Λ_g est topologiquement conjugué au germe d'un autre difféomorphisme de Smale \tilde{g} d'une surface compacte \tilde{S}_g le long d'une pièce basique $\tilde{\Lambda}_g$ tel que l'ensemble non-errant de \tilde{g} est réduit à l'union de $\tilde{\Lambda}_g$ et d'un nombre fini d'orbites périodiques puits ou sources. De plus, si (g, Λ_g) admet une bonne partition de Markov de type géométrique T , alors $(\tilde{g}, \tilde{\Lambda}_g)$ admet aussi une bonne partition de Markov de type T .

Démonstration Rappelons que, dans [BLJ, chapitre 3], les auteurs construisent un voisinage invariant canonique $\Delta(g, \Lambda_g)$ de tout ensemble selle Λ_g d'un difféomorphisme hyperbolique de surface g . Ce voisinage est une sous-surface à bord et à coins de S_g , les coins étant alternativement des puits et des sources de g . La dynamique sur un côté de $\Delta(g, \Lambda_g)$ est une simple dynamique nord-sud. On peut donc, comme le font Bonatti et Langevin, recoller deux à deux les arêtes de $\Delta(g, \Lambda_g)$; on obtient alors la surface \tilde{S}_g désirée, le difféomorphisme \tilde{g} étant induit par la restriction de g à $\Delta(g, \Lambda_g)$.

D'autre part, l'intérieur du domaine $\Delta(g, \Lambda_g)$ contient toute bonne partition de Markov de (g, Λ_g) . Le difféomorphisme \tilde{g} étant, par construction, conjugué à g sur l'intérieur de $\Delta(g, \Lambda_g)$, ceci montre la deuxième affirmation. \square

On note (\mathcal{M}, X, K) la suspension de (S_f, f, Λ_f) . La surface S_f est maintenant vue plongée dans \mathcal{M} , transversalement à X , l'application f étant maintenant vue comme l'application de retour sur S_f par le flot de X . Cette application coïncide d'ailleurs avec le temps 1 du flot de X . La partition \mathcal{R} est une partition de Markov de K pour le champ X , incluse dans S_f . Les propriétés des difféomorphismes hyperboliques des surfaces implique que cette partition est alors automatiquement essentielle (voir [BLJ, proposition 5.5.1]).

L'ensemble non-errant de X n'est constitué que de K et d'un nombre fini d'orbites périodiques puits et sources. Il n'existe donc (à isotopie le long du flot près) qu'un seul voisinage filtrant M de K dans \mathcal{M} et le bord de M n'est constitué que de tores (voir la partie 1.4).

La surface Σ^u associée à T est réalisée ici comme l'intersection du saturé de l'union des rectangles de \mathcal{R} avec $\partial_2 M$. Cette surface est donc bien plongée dans un nombre fini de tores.

Lemme 4.15 *Quitte à remplacer (M, X, S_f) en un triplet topologiquement équivalent, il existe des cercles C_1^u, \dots, C_l^u plongés dans $\partial_2 M$, deux-à-deux disjoints et dont l'intersection avec Σ^u est exactement égale à l'union des toits des tours de Σ^u . Ces cercles sont les composantes connexes de l'intersection $\partial_2 M \cap S_f$.*

Démonstration Par définition d'une suspension, le temps de retour sur S_f par le flot de X est partout égal à 1.

Ensuite, quitte à isotoper $\partial_2 M$ le long du flot, la surface Σ^u est définie par la formule $\Sigma^u = \bigcup_{x \in \bar{A}} X^{\psi^u(x)}(x)$ où ψ^u vérifie la condition $(\star\star)$ (voir les rappels sur Σ^u). En particulier, ψ^u ne prend alors de valeur entière que sur les côtés stables des composantes de \bar{A} .

Enfin, quitte à perturber le plongement de S_f , on peut supposer que S_f est transverse à $\partial_2 M$. On peut donc supposer, en plus des propriétés précédentes, que S_f intersecte $\partial_2 M$ selon un nombre fini de cercles plongés disjoints C_1^u, \dots, C_l^u .

L'union de sous-rectangles \bar{A} est incluse dans R donc dans S_f , la fonction ψ^u ne prend de valeur entière que sur $\partial^s A$ et le temps de retour sur S_f est égal à 1 : de ces trois propriétés, on déduit que $\Sigma^u \cap S_f$ est exactement égale à l'image par X^{ψ^u} des côtés stables de \bar{A} .

Ceci signifie, par définition des pieds et des toits, que $\Sigma^u \cap S_f$ est exactement égale à l'union des pieds et des toits des ponts et des tours de Σ^u . Comme, de plus, les pieds des ponts et des tours de Σ^u sont inclus dans les toits des tours, $\Sigma^u \cap S_f$ est exactement égal à l'union des toits des tours de Σ^u .

Enfin, comme $S_f \cap \partial_2 M$ est une union de cercles plongés disjoints C_1^u, \dots, C_l^u , ceci montre le lemme. □

Lemme 4.16 *Soit C un des cercles C_1^u, \dots, C_l^u construits au lemme précédent. Notons T_1, \dots, T_n les tours dont les toits sont inclus dans C . Alors on peut orienter C de façon compatible avec les orientations des toits des tours T_1, \dots, T_n .*

Démonstration Le cercle C est une composante d'intersection de S_f et $\partial_2 M$: les deux côtés (locaux) de C dans $\partial_2 M$ correspondent donc aux deux côtés (locaux) de S_f dans \mathcal{M} . D'autre part, S_f étant transverse au champ, ces deux côtés peuvent être désignés de la façon suivante : celui vers lequel pointe X et l'autre.

La surface Σ^u est définie comme la projection par X^{ψ^u} de $\bar{A} = \text{adh}(R \setminus f^{-1}(R))$ où on peut choisir, pour ψ , en particulier n'importe quelle fonction qui vérifient les conditions $(\star\star)$.

Soit \bar{A}_i^j une composante de \bar{A} qui est projetée sur une tour T (donc $j = 0$ ou $j = h_i$). Le sous-rectangle \bar{A}_i^j a un côté stable dans $\partial^s R$ et un côté stable dans $\bar{A}_i^j \setminus A_i^j$. On peut choisir ψ^u compatible avec les conditions $(\star\star)$ et qui est croissante le long des côtés instables de \bar{A}_i^j quand on va de $\bar{A}_i^j \cap \partial^s R$ vers $\bar{A}_i^j \setminus A_i^j$.

Rappelons alors que $\bar{A}_i^j \cap \partial^s R$ est projeté par X^{ψ^u} sur le toit de T , $\bar{A}_i^j \setminus A_i^j$ sur le pied de T et les côtés instables de \bar{A}_i^j sur les côtés instables de T .

Le fait que \bar{A}_i^j soit inclus dans S_f et le fait que ψ^u soit croissante le long du côté instable de \bar{A}_i^j quand on va de $\bar{A}_i^j \cap \partial^s R$ vers $\bar{A}_i^j \setminus A_i^j$ montre donc que l'orientation des côtés instables de T allant du toit de T vers le pied de T pointe du côté de S_f où pointe le champ X .

Ceci prouve que l'orientation des côtés instables des tours T_1, \dots, T_n pointe toujours du côté de S_f où pointe le champ X .

On a donc montré que l'orientation des côtés instables de T_1, \dots, T_n du toit vers le pied pointe toujours du même côté de C . L'orientation des toits des tours étant précisément induite par celle des côtés instables, ceci prouve que l'on peut orienter C de façon compatible avec les orientations des toits de T_1, \dots, T_n . \square

Le fait que $\partial_2 M$ ne soit constitué que de tores, puis les lemmes 4.15 et 4.16 montre l'implication $1 \Rightarrow 2$ du théorème 4.2.

4.1.3 Démonstration de $2 \Rightarrow 1$

On suppose donné un type géométrique T qui vérifie la condition 2 du théorème 4.2.

Première étape: il existe un champ X sur un voisinage filtrant M et une partition essentielle \mathcal{R} dans M réalisant la condition 2 pour la surface Σ^u et une condition analogue pour Σ^s

La condition 2 affirme qu'il existe un plongement de la surface abstraite Σ^u (associée au type T) dans un nombre fini de tores, ce plongement vérifiant certaines propriétés. Nous allons tout d'abord montrer que l'on peut effectivement réaliser ce plongement comme l'intersection d'une partition essentielle de type T avec le bord de sortie d'un voisinage filtrant. Pour ne pas faire de confusion, nous allons temporairement noter $\Sigma^u(T)$ la surface Σ^u abstraite et $\Sigma^u(\mathcal{R}, M)$ la réalisation de Σ^u comme intersection du saturé de \mathcal{R} avec $\partial_2 M$.

Lemme 4.17 *Pour tout plongement abstrait de la surface $\Sigma^u(T)$ dans une surface S , il existe un champ X sur un voisinage filtrant M d'un ensemble selle saturé K et une partition essentielle \mathcal{R} de K tel que le plongement de $\Sigma^u(\mathcal{R}, M)$ dans $\partial_2 M$ réalise le plongement de $\Sigma^u(T)$ dans S .*

Démonstration Notons \tilde{S} la surface abstraite homéomorphe au bord d'entrée $\partial_2 \tilde{M}$ du modèle \tilde{M} de T ; la surface $\Sigma^u(T)$ est plongée dans \tilde{S} d'après le corollaire 2.2.

D'autre part, par définition du modèle, le couple $(S, \Sigma^u(T))$ est obtenu en attachant des anses à $(\tilde{S}, \Sigma^u(T))$, ces anses étant attachées sur des cercles disjoints de $\Sigma^u(T)$. On

peut alors attacher les mêmes anses sur \widetilde{M} (comme dans la partie 1.3.1), on obtient un champ X sur un voisinage filtrant M d'un ensemble selle saturé. Cet ensemble selle saturé admet une partition essentielle \mathcal{R} de type géométrique T et le plongement de $\Sigma^u(\mathcal{R}, M)$ dans $\partial_2 M$ réalise le plongement de $\Sigma^u(T)$ dans S . \square

Maintenant nous allons voir que si le plongement de $\Sigma^u(\mathcal{R}, M)$ dans $\partial_2 M$ vérifie la condition 2, alors le plongement de $\Sigma^s(\mathcal{R}, M)$ dans $\partial_1 M$ vérifie automatiquement une condition analogue.

Lemme 4.18 *Soit X un champ de Smale défini sur un voisinage filtrant M d'un ensemble selle saturé K et soit \mathcal{R} une partition essentielle de K dans M . On suppose que le plongement de $\Sigma^u(\mathcal{R}, M)$ dans $\partial_2 M$ vérifie la condition 2. Alors :*

- $\partial_1 M$ est une union de tores,
- il existe des cercles C_1^s, \dots, C_k^s plongés dans $\partial_1 M$, deux-à-deux disjoints tels que l'intersection de $C^s = C_1^s \cup \dots \cup C_k^s$ avec $\Sigma^s(\mathcal{R}, M)$ est égale à l'union des toits des tours de $\Sigma^s(\mathcal{R}, M)$,
- les cercles de C^s peuvent être orientés de façon compatibles avec les orientations des toits de tours de $\Sigma^s(\mathcal{R}, M)$.

Comme il n'est question, dans la preuve suivante, que de $\Sigma^u(\mathcal{R}, M)$ et de $\Sigma^s(\mathcal{R}, M)$, on abandonne ces lourdes notations. Dans cette démonstration et dans la suite, Σ^s et Σ^u désigne les réalisations de ces surfaces comme $\Sigma^u(\mathcal{R}, M)$ et de $\Sigma^s(\mathcal{R}, M)$.

Démonstration du lemme 4.18 On note Φ l'application dite *d'entrée-sortie* définie de $\partial_1 M \setminus W^s(K)$ dans $\partial_2 M \setminus W^u(K)$ qui a un point x de $\partial_1 M \setminus W^s(K)$ associe l'unique point d'intersection de l'orbite de x avec $\partial_2 M$. Puisque Σ^s et Σ^u sont définies comme les intersections du saturé (par le flot) de l'union des rectangles de \mathcal{R} respectivement avec $\partial_1 M$ et $\partial_2 M$, on a $\Phi(\Sigma^s \setminus W^s(K)) = \Sigma^u \setminus W^u(K)$.

Par hypothèse, il existe une union C^u de cercles C_1^u, \dots, C_l^u plongés disjoints dans $\partial_2 M$ dont l'intersection avec Σ^u est exactement égale à l'union des toits des tours de Σ^u . Notons I^u l'union de cercles C^u privée de Σ^u . Chaque composante de I^u est un segment joignant une extrémité d'un toit de Σ^u à une extrémité d'un toit de Σ^u .

Remarquons que les extrémités des toits des tours de Σ^u sont les projections sur $\partial_2 M$, le long du flot, des coins des rectangles de \mathcal{R} (par construction de Σ^u , les toits sont les projections des bords stables des rectangles de \mathcal{R}). De même, les extrémités des toits des tours de Σ^s sont les projections le long du flot, sur $\partial_1 M$, des coins des rectangles de \mathcal{R} . On se rappelle alors que Φ est la projection le long du flot de $\partial_1 M \setminus W^s(K)$ sur $\partial_2 M \setminus W^u(K)$. Chaque composante de $\Phi^{-1}(I^u)$ est donc un segment, plongé dans $\partial_1 M$, disjoint de Σ^s et joignant une extrémité de toit de tour de Σ^s à une extrémité de toit de tour de Σ^s .

On considère alors l'union de $\Phi^{-1}(I^u)$ et des toits des tours de Σ^s ; on obtient ainsi un nombre fini de cercles C_1^s, \dots, C_k^s plongés dans $\partial_1 M$, deux-à-deux disjoints. Soit C^s l'union de ces cercles. Par construction, $C^s \cap \Sigma^s$ est exactement égale à l'union des toits de Σ^s .

Il faut maintenant vérifier que l'on peut orienter les cercles de C^s de façon compatible avec les orientations des toits de Σ^s . Ceci revient à montrer qu'une composante de $\Phi^{-1}(I^u)$

joint toujours une extrémité droite de toit de Σ^s à une extrémité gauche de toit de Σ^s , ce que nous allons faire (on définit la gauche et la droite en décidant que les toits sont orientés de gauche à droite).

Puisque les cercles de C^u peuvent être orientés de façon compatible avec les orientations des toits de Σ^u , toute composante de I^u joint une extrémité droite de toit de Σ^u à une extrémité gauche de toit de Σ^u . On remarque alors qu'on a orienté les côtés instables des tours de Σ^u de leur toit vers leur pied, c'est-à-dire, vu à travers $(X^{\psi^u})^{-1}$, du bord stable des rectangles de \mathcal{R} vers leur intérieur. Il s'en suit qu'une extrémité droite d'un toit de Σ^u correspond, via $(X^{\psi^u})^{-1}$, au coin bas-droit ou haut-gauche d'un rectangle de \mathcal{R} et une extrémité gauche au coin bas-gauche ou haut-droit d'un rectangle de \mathcal{R} . De même, les extrémités gauches des toits des tours de Σ^s correspondent, via $(X^{\psi^s})^{-1}$, aux coins gauche-haut et droit-bas des rectangles de \mathcal{R} , les extrémités droites aux coins gauche-bas et droit-haut. Enfin, remarquons que sur les extrémités des toits des tours de Σ^s , Φ coïncide avec $X^{\psi^u} \circ (X^{\psi^s})^{-1}$. Tout ceci montre que qu'une composante de $\Phi^{-1}(I^u)$ joint toujours une extrémité droite de toit de Σ^s à une extrémité gauche.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\partial_1 M$ n'est constitué que de tores. Remarquons d'abord que le voisinage filtrant M est une variété à bord qui supporte un champ non-singulier et transverse aux bords : la caractéristique d'Euler de $\partial_1 M$ est donc égale à la caractéristique d'Euler de $\partial_2 M$. On en déduit la dichotomie suivante : soit $\partial_1 M$ n'est formé que de tores, soit au moins une des composantes connexes de $\partial_1 M$ est une sphère.

Cependant, les cercles C_1^s, \dots, C_k^s intersectent toutes les âmes des cycles de tours de Σ^s et surtout intersectent toujours ces âmes selon la même orientation (on vient de montrer que les C_i^s peuvent être orientés de façon compatible avec l'orientation des toits des tours). Ceci implique que toutes les âmes des cycles de tours de Σ^s sont dans des classes d'homologie non-nulles des composantes de $\partial_1 M$ qui les portent.

En particulier, aucune composante de $\partial_1 M$ ne peut être une sphère et toutes sont donc des tores. \square

Remarques

Considérons maintenant un champ X sur un voisinage filtrant M , une partition \mathcal{R} et des unions de cercles C^s et C^u comme construit dans le lemme précédent. Comme dans la preuve de ce lemme, on note Φ l'application entrée-sortie de M . Alors :

1) Quitte à multiplier X par une fonction numérique lisse strictement positive, on peut supposer que le temps de retour sur R est uniformément égal à 1 et quitte à isotoper les bords de sortie et d'entrée de M , les surfaces Σ^u et Σ^s sont données par des fonctions ψ^u et ψ^s qui vérifient $(\star\star)$ et une condition analogue.

2) La preuve du lemme montre qu'on peut supposer que $C^s \setminus \Sigma^s$ est l'image par Φ^{-1} de $C^u \setminus \Sigma^u$.

3) De plus, aux extrémités des toits de Σ^u , l'application Φ^{-1} coïncide avec $X^{\psi^s} \circ (X^{\psi^u})^{-1}$ et donc avec le temps -2 du flot de X (en ayant supposé que ψ^u et ψ^s vérifient $(\star\star)$). Modulo une isotopie de $\partial_2 M$ le long du flot dont le support disjoint de Σ^u , on pourra donc supposer que $C^s \setminus \Sigma^s$ est l'image par X^{-2} de $C^u \setminus \Sigma^u$. Comme le support de l'isotopie est disjoint de Σ^s et Σ^u , on préserve les propriétés de ψ^u et ψ^s .

4) Enfin, modulo une nouvelle isotopie de $\partial_2 M$ le long du flot dont le support est disjoint de Σ^s , Σ^u , C^s et C^u , on peut de plus supposer que le temps de passage de $\partial_1 M$ à $\partial_2 M$ est supérieur ou égal à 2.

5) Par ailleurs, si toute composante connexe de M rencontre \mathcal{R} , alors toute composante connexe de M rencontre le maximal invariant K de \mathcal{R} , donc toute composante connexe de $\partial_2 M$ rencontre $W^u(K)$ et, par suite, toute composante connexe de $\partial_2 M$ rencontre Σ^u . Par conséquent, quitte à supprimer les composantes de M qui ne rencontrent pas \mathcal{R} , on supposera que toute composante connexe de $\partial_2 M$ rencontre Σ^u .

Notation 4.19 *On note X un champ défini sur un voisinage filtrant M d'un ensemble selle admettant une partition essentielle \mathcal{R} dans M , vérifiant la condition 2 du théorème 4.2 donc la conclusion du lemme 4.18 et tels que :*

- le temps de retour sur R , là où il est défini, est uniformément égal à 1,
- $\Sigma^u = \bigcup_{x \in \bar{A}} X^{\psi^u}(x)$ où ψ^u vérifie $(\star\star)$,
- $\Sigma^s = \bigcup_{x \in \text{adh}(R \setminus f(R))} X^{\psi^s}(x)$ où ψ^s vérifie une condition analogue à $(\star\star)$,
- $C^u \setminus \Sigma^u = X^2(C^s \setminus \Sigma^s)$,
- le temps de passage par le flot de $\partial_1 M$ à $\partial_2 M$ est partout supérieur ou égal à 2
- toute composante connexe de $\partial_2 M$ rencontre Σ^u .

Deuxième étape : Complétion de M en une variété \mathcal{M} sans bord.

Il sera pratique pour nous de distinguer deux types de cercles dans C^u :

- on note C_{ess}^u l'ensemble des cercles de C^u qui ne sont pas homologues à 0 dans $\partial_2 M$,
- on note C_0^u l'ensemble des cercles C^u qui sont homologues à 0 dans $\partial_2 M$.

Rappelons par ailleurs que les cercles de C^u sont orientés de façon compatible avec l'orientation des toits des tours de Σ^u .

Lemme 4.20 *Un cercle de C^u est dans C_{ess}^u si et seulement s'il rencontre un cycle de tours de Σ^u .*

Démonstration Remarquons d'abord que tout cercle de C^u qui rencontre un cycle de tours contient le toit d'une des tours de ce cycle et coupe donc l'âme de ce cycle de tours.

Les cercles de C^u sont orientés de façon compatible avec les orientations des toits des tours de Σ^u ; par conséquent, tout cercle coupant un cycle de tours de Σ^u coupe toujours ce cycle selon la même orientation. Ceci prouve que tout cercle de C^u coupant un cycle de tours de Σ^u est dans C_{ess}^u .

Soit T une composante de $\partial_2 M$. Par hypothèse, T est un tore et T rencontre Σ^u .

Il est facile de voir que toute composante connexe de Σ^u contient un cycle de tours donc il existe nécessairement un cycle de tours sur T . Soit γ_1 l'âme de ce cycle de tours. Puisque C^u contient les toits des tours, il existe aussi un cercle γ_2 de C^u coupant γ_1 . Comme γ_1 coupe γ_2 toujours selon la même orientation, γ_1 et γ_2 sont tous deux non-homologues à 0 et non-homologues entre eux.

Soit maintenant C un cercle de C^u ne rencontrant aucun cycle de tours de T . Comme les différents cercles de C^u sont deux-à-deux disjoints, C ne rencontre ni γ_1 , ni γ_2 . Par conséquent, C est disjoint de deux cercles non-homologues à 0 et non-homologues entre eux donc est homologue à 0 dans T . \square

Corollaire 4.21 *Tous les cercles (orientés) de C_{ess}^u tracés sur une même composante de $\partial_2 M$ sont homologues.*

Démonstration Soient deux cercles C_1 et C_2 tracés sur une même composante T de $\partial_2 M$. Le fait que C_1 soit homologue à $\pm C_2$ provient simplement de ce que T est un tore et que C_1 est disjoint de C_2 .

Pour prouver que $+C_1$ est homologue à $+C_2$, on reprend la preuve du lemme précédent : d'après cette preuve, C_1 , C_2 et les âmes de tous les cycles de tours tracés sur T sont non-homologues à 0 dans T . Par suite, comme C_1 coupe l'âme d'un cycle de tours, il coupe en fait les âmes de tous les cycles de tours tracés sur T ; de même pour C_2 . Les cercles C_1 et C_2 coupent donc une même âme de cycle de tours et cela toujours selon la même orientation (d'après l'hypothèse 2), ce qui achève la preuve. \square

Nous allons maintenant compléter M en une variété compacte sans bord \mathcal{M} en collant des tores pleins sources et puits sur $\partial_1 M$ et $\partial_2 M$.

Remarquons que, d'après les hypothèses de la notation 4.19, la surface $\mathcal{R}_{-1,1}$ est plongée dans M (transverse à X) et les toits des tours de Σ^s et Σ^u (qui sont égaux à $X^{-1}(\partial^u R)$ et $X^1(\partial^s R)$) sont inclus dans le bord de $\mathcal{R}_{-1,1}$.

On complète alors (M, X) de la façon suivante. Soit T une composante de $\partial_2 M$ et soit (N, Y) un tore plein puits. Soit C un cercle (orienté) de C_{ess}^u tracé sur T . Soit γ un cercle orienté dans la classe du générateur privilégié de l'homologie du bord de N et soit D un disque transverse à Y dans N tel que $\partial D = \gamma$. On recolle εC sur γ où $\varepsilon = \pm$ est choisi de façon à ce que la réunion de $\mathcal{R}_{-1,1}$ et de D soit topologiquement transverse au champ issu du recollement des champs X et Y (l'arête entre $\mathcal{R}_{-1,1}$ et D consiste en l'union des toits des tours de Σ^u portés par C).

Remarquons que le lemme 1.56 et le corollaire 4.21 montrent que la classe d'équivalence topologique du recollement ne dépend pas des choix de C et γ .

Notation 4.22 *On note (\mathcal{M}, X) la variété sans bord et le champ de Smale sur \mathcal{M} obtenus en recollant sur (M, X) des tores plein puits et sources avec la règle ci-dessus.*

Troisième étape: Dans \mathcal{M} , la surface $(\bigcup_{k=1}^{+\infty} X^k(R)) \setminus R$ est plongée dans un nombre fini de disques, transverses au champ X et disjoints

On veut pouvoir parler de côtés gauche et droit des cercles de C^u .

Définition 4.23 *Soit C un cercle de C^u . On appelle gauche le côté (local) de C défini de la façon suivante. Pour toute tour T ayant son toit sur C , le voisinage du toit de T dans T est situé du côté gauche local de C . Pour toute tour T' ayant son pied sur C , le voisinage du pied de T' dans T' est situé du côté droit local de C .*

Cette définition a bien un sens (on définit les mêmes côtés gauches et droits locaux de C pour toutes tours T et T'). En effet :

- l'orientation de C est compatible avec les orientation des toits que C contient,
- l'orientation du toit d'une tour est induite par l'orientation des côtés instables de cette tour,
- les côtés instables d'une tour sont orientés du toit vers le pied de la tour.

Rappelons par ailleurs que, par définition de Σ^u (voir la troisième définition), la fonction X^{ψ^u} restreinte à $A = R \setminus f^{-1}(R)$ est bijective. Ceci nous permet de poser la définition suivante :

Définition 4.24 *On définit $\varphi^u : \Sigma^u \rightarrow \mathbb{R}$ comme l'unique fonction telle que $X^{-\varphi^u} \circ X^{\psi^u} = Id_{R \setminus f^{-1}(R)}$.*

Lemme 4.25 *On peut étendre φ^u en une fonction définie sur $\partial_2 M$, à valeurs dans $[1,2]$, continue hors des cercles de C^u , tendant vers 1 du côté gauche de ces cercles et tendant vers 2 du côté droit.*

Démonstration Au départ, φ^u est définie sur Σ^u . La définition de φ^u et les propriétés de ψ^u impliquent que φ^u est continue sur $\Sigma^u \setminus C^u$ tend vers 1 du côté gauche de ces cercles de C^u et tendant vers 2 du côté droit. On peut donc prolonger φ^u sur la réunion de Σ^u et d'un voisinage tubulaire U des cercles de C^u dans $\partial_2 M$ en une fonction continues en dehors de C^u , tendant vers 1 à gauche et vers 2 à droite. Enfin, étant donné l'adhérence D d'une composante de $\partial_2 M \setminus (\Sigma^u \cup U)$, la fonction φ^u est définie et continue sur le bord de D donc peut être prolongée en une fonction continue sur D . \square

On définit alors, pour tout entier i positif, la surface S_i par la formule :

$$S_i = \text{adh} \left(\bigcup_{x \in \partial_2 M} X^{-\varphi^u(x)+i}(x) \right)$$

- S_i est une surface compacte à bords, homéomorphe à $\partial_2 M$ découpée le long de C^u .
- La surface S_i contient $X^i(R) \setminus X^{i-1}(R)$ (par définition de φ^u) et son bord est formée des côtés gauches des cercles de $X^{i-1}(C^u)$ et des côtés droits des cercles de $X^{i-2}(C^u)$.
- S_i est plongée dans \mathcal{M} car toute orbite ne coupe $\partial_2 M$ qu'en au plus un point, elle est transverse à X car $\partial_2 M$ l'est.
- De plus, pour tous entiers positifs i et j distincts, les intérieurs des surfaces à bords S_i et S_j sont disjoints : ceci provient encore directement de la définition de S_i et du fait que chaque orbite ne coupe $\partial_2 M$ qu'en au plus un point.

On considère maintenant la réunion $S_0^+ = \bigcup_{k=0}^{+\infty} S_k$. C'est une surface non compacte, à bord, contenant $\bigcup_{k=1}^{+\infty} X^k(R) \setminus R$. Des remarques sur les surfaces S_i ci-dessus, on déduit que toute composante de S_0^+ possède au moins une composante de bord et que le bord de S_0^+ est réduit aux côtés droits des cercles de $X^{-1}(C^u)$.

Lemme 4.26 *La surface S_0^+ est plongée dans \mathcal{M} .*

Démonstration La surface S_0^+ est injectivement immergée dans \mathcal{M} car les surfaces S_i sont plongées et sont deux-à-deux disjointes. Grâce à la définition des S_i et de S_0^+ , on vérifie que si l'immersion n'était pas propre alors il existerait un point x de $\partial_2 M$ telle que l'orbite strictement positive de x reviendrait arbitrairement près de $\partial_2 M$. Ceci est bien sûr impossible car $\partial_2 M$ est transverse au champ et car aucune orbite n'intersecte $\partial_2 M$ en plus d'un point. \square

Enfin, par construction la surface S_0^+ est transverse à X .

Proposition 4.27 *La surface S_0^+ est composée d'un nombre fini de disques et d'un nombre fini de couronne semi-ouvertes.*

Lemme 4.28 *Pour tout cercle C de C_0^u , le côté droit de C est le bord d'un disque dans $\partial_2 M$.*

Démonstration Pour tout cercle C de C_0^u , par définition de C_0^u , soit le côté droit, soit le côté gauche de C est le bord d'un disque dans $\partial_2 M$; l'autre côté de C est donc le bord d'un tore privé d'un disque. Il est par conséquent suffisant de montrer que le côté gauche de C ne borde pas un disque dans $\partial_2 M$, ce que nous allons faire.

Soit S la surface bordée par le côté gauche de C dans $\partial_2 M$. Remarquons tout d'abord qu'une tour est soit incluse dans S , soit d'intérieur disjoint de S (car C^u ne contient aucun point de l'intérieur des tours). De plus, par définition des côtés gauches et droits de C aucune tour incluse dans S ne peut avoir son pied sur C .

Soit T_0 une tour tel que C contient le toit de T_0 . Par définition du côté gauche de C , la surface S contient T_0 et le pied de T_0 est donc dans l'intérieur de S . Le pied de T_0 est posé sur le toit d'une autre tour T_1 . La tour T_1 est nécessairement incluse dans S donc le pied de T_1 est dans l'intérieur de S . Le pied de T_1 est posé sur le toit d'une tour T_2 , etc. Comme il n'y a qu'un nombre fini de tours, on en déduit que S contient un cycle de tours.

Rappelons que l'âme d'un cycle de tours n'est jamais homotope à 0 dans $\partial_2 M$ (voir la démonstration du lemme 4.20). Par conséquent, S ne peut pas être un disque, ce qui conclut. \square

Démonstration de la proposition 4.27 Rappelons que, pour tout i , la surface S_i est définie par $S_i = \text{adh}(\bigcup_{x \in \partial_2 M} X^{-\varphi^u(x)+i}(x))$. On considère l'ensemble $\tilde{S} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} S_i$.

On vérifie alors que la projection de \tilde{S} dans $\partial_2 M$ qui au point $X^{-\varphi^u(x)+i}(x)$ associe le point x fait de \tilde{S} un revêtement à une infinité de feuillets de $\partial_2 M$ (il suffit de remarquer que φ^u n'est discontinue que le long des cercles de C^u et que la différence des valeurs à gauche et à droite vaut 1) (les différents relevés d'un points x sont les différents points $X^{-\varphi^u(x)+i}(x)$ quand i varie dans \mathbb{Z}). Par définition de \tilde{S} et φ^u , pour tout lacet c , l'automorphisme de revêtement associé à c est l'application $x \mapsto X^i(x)$ où i est la somme algébrique des intersections avec les cercles de C^u , qui est aussi égal à la somme algébrique des intersections de c avec les cercles de C_{ess}^u . Le revêtement \tilde{S} est donc le revêtement cyclique de $\partial_2 M$ associé aux cercles de C_{ess}^u .

Maintenant, $S_0^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ se plonge naturellement dans $\tilde{S} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} S_i$. Rappelons que S_0^+ est bordée par les côtés droits des cercles de $X^{-1}(C^u)$.

Soit donc C un cercle de $X^{-1}(C^u)$. Alors :

— si C est dans $X^{-1}(C_0^u)$ alors le côté droit de C borde un disque D dans $\partial_2 M$ et *a fortiori* dans \tilde{S} . D'une part, le relevé d'un cercle de C_{ess}^u est non-homotope à 0 dans \tilde{S} , le disque D ne contient pas de cercle de $X^{-1}(C_{ess}^u)$. D'autre part, s'il existe un cercle C' de $X^{-1}(C_0^u)$ dans D alors le côté droit de C' borde un disque dans D . Donc les côtés droits de C et C' ne bordent pas de sous-surface de D . Il n'existe donc pas de sous-surface non-triviale de D bordée par des côtés droits de cercles de $X^{-1}(C^u)$.

— si C est dans $X^{-1}(C_{ess}^u)$ alors le côté droit de C borde une couronne semi-ouverte S dans \tilde{S} (toute composante de \tilde{S} est un cylindre et C est non-homotope à 0 sur ce cylindre). D'une part, s'il existe un cercle C' de $X^{-1}(C_{ess}^u)$ sur S alors les cercles orientés C et C' sont homologues sur \tilde{S} donc il n'existe pas de sous-surface de S bordée par les côtés droits de C et C' . D'autre part, si C' est un cercle de $X^{-1}(C_0^u)$ sur S , alors le bord droit de C' borde un disque de S donc il n'existe pas de sous-surface de S bordé par les côtés droits de C et C' . Il n'existe donc pas de sous-surface non-triviale de S bordée par des côtés droits de cercles de $X^{-1}(C^u)$.

Toute sous-surface connexe de \tilde{S} bordée par des côtés droits de cercles de $X^{-1}(C^u)$ est soit un disque, soit une couronne semi-ouverte. Par conséquent toute composante connexe de S_0^+ est soit un disque, soit une couronne semi-ouverte.

Il n'y a qu'un nombre fini de telle composantes puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de cercles de $X^{-1}(C^u)$ et que toute composante de S_0^+ possède une composante de bord dans $X^{-1}(C^u)$. \square

Lemme 4.29 *A isotopie près le long du flot, toute couronne ouverte de S_0^+ peut être complétée par un point d'une orbite périodique puits en un disque transverse.*

Remarque prliminaire Soit (N, X) un tore plein puits. Soit C un cercle dans la classe du générateur privilégié de ∂N . Soit D un disque plongé dans N , transverse à X et dont le bord est C . Soit Σ une couronne semi-ouverte dans N , bordée par C telle que :

- pour tout x de ∂N , la couronne Σ coupe tout segment de longueur 1 de l'orbite positive de x ,
- l'union du disque D et de la couronne Σ n'est pas topologiquement transverse à X le long de C .

On se convainc facilement (par exemple avec le modèle linéaire de (N, X)) que D n'a qu'un point d'intersection avec l'orbite puits : on note p ce point. Alors, on se convainc également qu'il existe une isotopie le long de Y envoyant C sur $D \setminus \{p\}$ (par exemple, on montre que C et $D \setminus \{p\}$ sont des revêtements de ∂N l'application de revêtement consistant à pousser par le flot pendant des temps positifs).

Démonstration On est dans la situation de la remarque ci-dessus :

Soit Σ une couronne ouverte de S_0^+ . Cette couronne est plongée dans une composante N de $\mathcal{M} \setminus X^{-1}(M)$, transversalement à X . La composante N munie de la restriction de X est un tore plein puits.

De plus, par construction, Σ est transverse à X , le bord de Σ est un cercle C de ∂N qui est dans la classe du générateur privilégié de ∂N et, pour tout point x de ∂N , Σ coupe tout segment de longueur 1 de l'orbite positive de x .

Soit D l'unique disque (à isotopie le long du flot près) transverse à X dans N et dont le bord est le cercle C . Alors l'union de D et R est topologiquement transverse le long de $C \cap \partial^s R$ par construction de \mathcal{M} et l'union de Σ et de R est également topologiquement transverse le long de cette arête. Par conséquent, l'union de D et de Σ n'est pas topologiquement transverse à X .

La remarque préliminaire permet de conclure. \square

Notation 4.30 *On notera S^+ l'union de S_0^+ et d'un nombre fini de points des orbites périodiques puits de façon à ce que toute composante de S^+ soit un disque fermé transverse au champ.*

La surface S^+ est donc une union de disques fermés, transverses à X , dont le bord est formé des cercles de $X^{-1}(C^u)$ et dans lesquels sont plongés $(\bigcup_{k=1}^{+\infty} X^k(R)) \setminus R$.

De façon similaire, on peut plonger $(\bigcup_{k=-1}^{-\infty} X^k(R)) \setminus R$ dans une union finie S^- de disques transverses dont le bord est $X^1(C^s)$. Ces disques sont obtenu en poussant par le flot $\partial_1 M$ découpé le long de C^s .

Si on suppose que le temps de passage de $\partial_1 M$ à $\partial_2 M$ est toujours plus grand que 2, l'intérieur de S^- est disjointe de l'intérieur de S^+ alors que $X^1(C^s \setminus \Sigma^s)$ (qui est une partie du bord de S^- est égal à $X^{-1}(C^u \setminus \Sigma^u)$ (qui est une partie du bord de S^+

Dernière étape : Plongement de $\bigcup_{-\infty}^{+\infty} X^k(R)$ dans une surface transverse sans bord

Lemme 4.31 *L'union de $S^+ \cup S^- \cup R$ forme une surface compacte sans bord, plongée dans \mathcal{M} , transverse à X et contenant $\bigcup_{-\infty}^{+\infty} X^k(R)$.*

Démonstration Rappelons que :

- Le bord de S^+ est constitué de $X^{-1}(C^u) = X^{-1}(C^u \setminus \Sigma^u) \cup X^{-1}(C^u \cap \Sigma^u)$,
- le bord de S^- est constitué de $X^1(C^s) = X^1(C^s \setminus \Sigma^s) \cup X^1(C^s \cap \Sigma^s)$.

Par ailleurs, on a construit M , C^s et C^u de façon à avoir les égalités suivantes :

- $X^1(C^s \setminus \Sigma^s) = X^{-1}(C^u \setminus \Sigma^u)$,
- $X^{-1}(C^u \cap \Sigma^u)$ est l'image par X^{φ^u} des toits de Σ^u , c'est-à-dire est égal à $\partial^s R$,
- de façon similaire, $X^1(C^s \cap \Sigma^s) = \partial^u R$.

Ceci montre que $S^- \cup S^+ \cup R$ n'a pas de bord. Par ailleurs, par construction, S^+ et S^- sont disjointes de R . Donc $S \equiv S^+ \cup S^- \cup R$ est une surface compacte sans bord plongée dans \mathcal{M} . Par construction, S contient $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} X^k(R)$.

Reste à montrer que S est transverse à X . Remarquons d'abord que chacune des parties S^+ , S^- et R est transverse à X . D'autre part, $S^+ \cup R$ est topologiquement transverse à X le long de $\partial^s R$ car $S^+ \cup R$ contient $\bigcup_{k=0}^{+\infty} X^k(R)$ qui est transverse à X le long de $\partial^s R$. Par un argument similaire, $S^- \cup R$ est topologiquement transverse à X le long de $\partial^u R$. La surface $S \equiv S^+ \cup R \cup S^-$ est donc topologiquement transverse à X au voisinage des coins de R (où se recolle les trois parties de R) donc $S^+ \cup S^-$ est également topologiquement

transverse à X le long de $X^1(C^s \setminus \Sigma^s) = X^{-1}(C^u \setminus \Sigma^u)$, ce qui achève la démonstration (voir la figure 4.1). \square

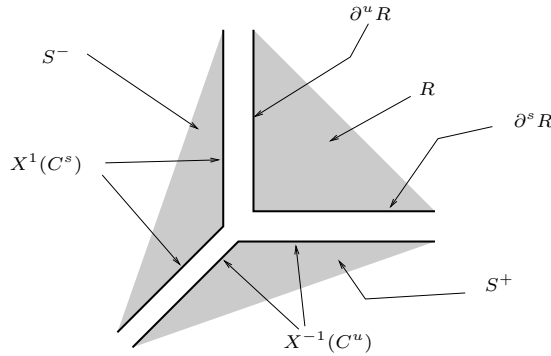


FIG. 4.1 – Le recollement de S^- , S^+ et R au voisinage d'un coin de R (le champ X est transverse au plan de la figure)

Il reste à montrer le lemme suivant :

Lemme 4.32 *Il existe τ tel que la surface S coupe tout segment d'orbite de longueur τ .*

Démonstration L'ensemble non-errant de X est par construction égal à l'ensemble selle maximal invariant de R et à un nombre fini d'orbites périodiques puits et sources (une orbite par composante de $\mathcal{M} \setminus M$). On utilise deux faits qui découlent de la construction de S :

- S contient \mathcal{R}_∞ donc il existe un voisinage invariant \mathcal{U} de K tel que S coupe tout segment d'orbite de longueur 1 dans \mathcal{U} (précisément l'ouvrage \mathcal{P}_∞ associé à \mathcal{R} , voir le chapitre 2.1 pour la définition de \mathcal{P}_∞),
- S coupe tout segment d'orbite de longueur 1 dans les tores pleins puits et sources constituant $\mathcal{M} \setminus M$.

Alors $\partial_1 M \setminus \mathcal{U}$ et $\partial_2 M \setminus \mathcal{U}$ sont inclus dans des compacts de $\partial_1 M \setminus W^s(K)$ et $\partial_2 M \setminus W^u(K)$. Par conséquent, le temps de passage de $\partial_1 M \setminus \mathcal{U}$ à $\partial_2 M \setminus \mathcal{U}$ est borné : notons τ_0 une borne de ce temps. Alors, pour tout $x \in M \setminus \mathcal{U}$, l'orbite positive de x sort de M après un temps au plus τ_0 (et comme M est un voisinage filtrant, alors l'orbite reste ensuite dans $\mathcal{M} \setminus M$). De même, pour l'orbite négative de x .

Il suffit alors de prendre τ plus grand que $\tau_0 + 2$ (orbites qui ne sont pas dans \mathcal{U}) et que 1 (orbites qui sont dans \mathcal{U}). \square

Conclusion

On a donc construit une surface S compacte sans bord, telle que tout segment d'orbite de longueur τ de X coupe S . Cette surface est topologiquement transverse à X . Quitte à lisser S , l'application de premier retour sur S est donc un difféomorphisme f qui est alors nécessairement de Smale. Le triplet (\mathcal{M}, X, K) est alors nécessairement la suspension de $(S, f, K \cap S)$ et \mathcal{R} est une partition de $K \cap S$ pour f . Ceci montre l'implication $2 \Rightarrow 1$ du théorème 4.2.

4.1.4 Exemple d'un type géométrique de suspension qui n'est pas réalisable

Soit T le type géométrique de la partition obtenue comme suit :

— On considère d'abord une partition a deux rectangles du fer à cheval (en fait, il n'y a qu'une telle partition, à conjugaison par f^k près). Pour fixer les idées, supposons que ces deux rectangles sont les sous-rectangles horizontaux fondamentaux de la partition à 1 rectangle de la figure 4.2.

— On détriple alors le sous-rectangle inférieur (voir la description de cette opération dans la partie 3.1.3).

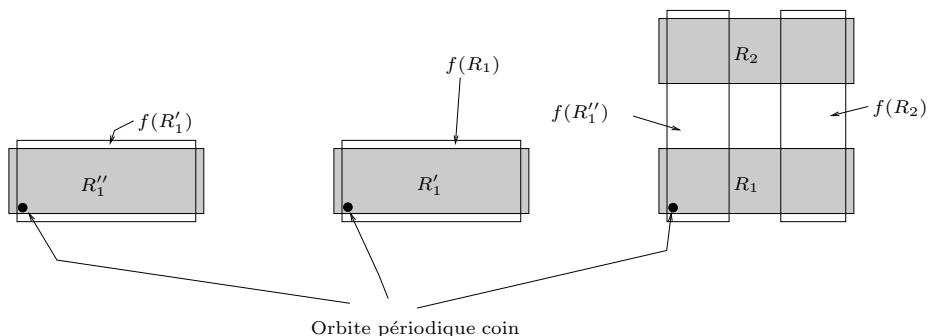


FIG. 4.2 – La partition de Markov obtenue en détripant le rectangle inférieur du fer à cheval.

Le type géométrique T est par construction un type de suspension (précisément la suspension du fer à cheval). Cependant,

Lemme 4.33 *Le type géométrique T n'est pas réalisable pour les difféomorphismes des surfaces.*

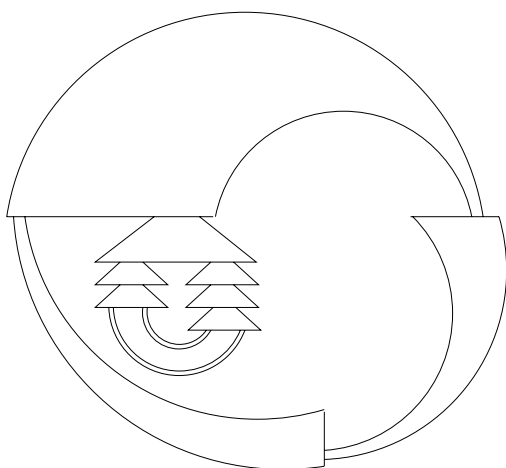


FIG. 4.3 – La surface de sortie associée au type géométrique T

Démonstration Soit Σ^u la surface de sortie associée à un type géométrique réalisable pour les difféomorphismes. Alors, d'après le théorème 4.2, Σ^u se plonge dans une union

finie \mathcal{T} de tores et il existe sur \mathcal{T} des cercles dont l'intersection avec Σ^u est égale à l'union des toits de Σ^u et qui peuvent être orientés de façon compatible avec les orientations des toits de Σ^u . Par conséquent, pour toute composante connexe S de $\text{adh}(\mathcal{T} \setminus \Sigma^u)$, le bord de S porte autant d'extrémité gauches de toits de Σ^u que d'extrémités droites.

Je laisse le lecteur vérifier (à l'aide de la troisième définition des surfaces Σ^u) que la surface dessinée à la figure 4.3 est bien celle associée au type géométrique T . Cette surface est homéomorphe à une sphère privée de quatre trous. Supposons-la plongée dans un tore T . Alors, au moins deux des composantes du bord de Σ^u borde un disque de $T \setminus \Sigma^u$. Par conséquent, si T était réalisable, au moins deux des composantes du bord de Σ^u devrait porter autant d'extrémités gauches de toits que d'extrémités droites. Ça n'est pas le cas donc T n'est pas réalisable. \square

4.2 Condition nécessaire pour être un germe de suspension

Le but de cette partie est de montrer la première implication du théorème 4.10, c'est à dire de montrer qu'un germe de suspension vérifie toujours la condition 3. On commence par rappeler ou montrer quelques propriétés des laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u pour un germe d'ensemble selle quelconque et par définir proprement les graphes Γ^s et Γ^u associés à ces laminations.

4.2.1 Rappels et précisions sur les laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u

On considère un ensemble selle saturé K . Par commodité, on supposera K transitif, c'est à dire que l'on suppose que K est une pièce basique selle.

Rappelons que l'on a déjà remarqué au début du chapitre précédent que si K est transitif, alors soit K est réduit à une orbite périodique selle, soit K est sans double-bord (définition 3.5). Dans le premier cas, le germe de X le long de K est trivialement celui d'une suspension. On supposera donc que l'on est dans le second cas (c'est-à-dire, on suppose que K est sans double-bord). Rappelons qu'on a alors en particulier les propriétés suivantes :

- toute feuille de $W^s(K)$ (respectivement de $W^u(K)$) est accumulée par des feuilles $W^s(K)$ (respectivement de $W^u(K)$),
- toute feuille stable ou instable bord est donc accumulée d'un côté et d'un seul,
- par suite, toute orbite périodique stable (respectivement instable) bord possède une et une seule séparatrice instable (respectivement stable) bord.

On considère alors un voisinage filtrant M de K et on note $\partial_1 M$ et $\partial_2 M$ les bords d'entrée et de sortie de M . Rappelons que $W^s(K)$ et $W^u(K)$ intersectent les bords $\partial_1 M$ et $\partial_2 M$ selon deux laminations compactes (lemme 1.10) que l'on note $\mathcal{L}^s = W^s(K) \cap \partial_1 M$ et $\mathcal{L}^u = W^u(K) \cap \partial_2 M$. Rappelons déjà les propriétés relatives aux feuilles compactes de ces laminations :

Rappel Chacune des deux laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u ne comporte qu'un nombre fini de feuilles compactes (lemmes 1.13).

Toute feuille compacte \mathcal{L}^s (resp. \mathcal{L}^u) est la trace et l'unique trace sur $\partial_1 M$ (resp. $\partial_2 M$) d'une séparatrice stable (instable) libre.

Nous allons maintenant munir les feuilles compactes de \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u d'une orientation naturelle et ainsi pouvoir parler de bords gauche et droit d'une feuille compacte. Ceci est nécessaire pour définir les graphes Γ^s et Γ^u .

Séparatrices gauches et droites, côtés gauches et droits de feuilles compactes

Les propriétés du cas sans double-bord vont nous permettre de parler des *séparatrices bords gauche et droite* d'une orbite périodique bord.

Définition 4.34 On définit la séparatrice droite de l'orbite s-bord \mathcal{O} comme la séparatrice W^s de $W^s(\mathcal{O})$ telle que la base \mathcal{B}_1 en un point x de \mathcal{O} constituée :

- d'un vecteur u_1 transverse à $W^s(\mathcal{O})$ pointant vers le côté non accumulé de $W^s(\mathcal{O})$,
- du vecteur $v_1 = X(x)$,
- d'un vecteur w_1 tangent à $W^s(\mathcal{O})$, transverse à \mathcal{O} et pointant du côté de W^s ,

soit directe.

Remarque Si l'orientation nous permet effectivement de distinguer les deux séparatrices d'un point périodique bord, les appellations opératrice *droite* et séparatrice *gauche* sont bien sûr totalement arbitraires.

Par ailleurs, soit M un voisinage filtrant de K et $\partial_1 M$ et $\partial_2 M$ les bords d'entrée et de sortie de M munis des laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u induites par $W^s(K)$ et $W^u(K)$.

Rappelons que toute séparatrice instable libre d'une orbite s-bord \mathcal{O} induit une feuille compacte C de \mathcal{L}^u . De plus, cette feuille compacte C hérite de l'orientation de l'orbite \mathcal{O} de la façon suivante :

L'union $W^u(\mathcal{O}) \cup \mathcal{O}$ est un demi-cylindre $S^1 \times [0, +\infty[$. L'orbite \mathcal{O} est bien sûr non-homotope à 0 dans ce (demi-)cylindre. La feuille compacte C est non-homotope à 0 dans ce cylindre car transverse au champ non-singulier X qui feuillette $W^u(\mathcal{O}) \cup \mathcal{O}$. Les cercles non-orientés C et \mathcal{O} sont donc homotopes dans ce demi-cylindre, on oriente C de façon à ce que les cercles orientés C et \mathcal{O} soient homotopes.

Toute feuille compacte de \mathcal{L}^u est la trace d'une séparatrice libre. Les feuilles compactes de \mathcal{L}^u sont ainsi toutes orientées. De même, les feuilles compactes de \mathcal{L}^s correspondent aux traces des séparatrices libres des orbites périodiques s-bords et sont orientées par ces orbites.

Comme les bords d'entrée et de sortie de M sont transverses au champ X , ceci nous permet de parler des côtés gauche et droit d'une feuille compacte de \mathcal{L}^s ou \mathcal{L}^u .

Définition 4.35 Le côté droit d'une feuille compacte C de \mathcal{L}^s ou \mathcal{L}^u est celui tel que la base \mathcal{B}_2 en un point x de C constituée :

- du vecteur $u_2 = X(x)$ (transverse au bord de M),
- du vecteur v_2 tangent à C dirigé suivant l'orientation de C ,

— et d'un vecteur w_2 tangent au bord de M , transverse à C et pointant du côté de C considéré, soit directe.

Les notions de séparatrices gauche et droite d'une orbite bord et de côtés gauche et droit de la trace de la séparatrice libre de cette orbite coïncident au sens suivant :

Lemme 4.36 *Soit \mathcal{O} une orbite s-bord et C la trace sur $\partial_2 M$ de la séparatrice instable libre de \mathcal{O} . Le côté gauche de C dans $\partial_2 M$ et la séparatrice stable gauche de \mathcal{O} sont du même côté (local) de la séparatrice libre de \mathcal{O} .*

Démonstration Il suffit de remarquer que les deux premiers vecteurs des bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont définis de façon à induire la même orientation de la séparatrice libre de \mathcal{O} (voir figure 4.4). □

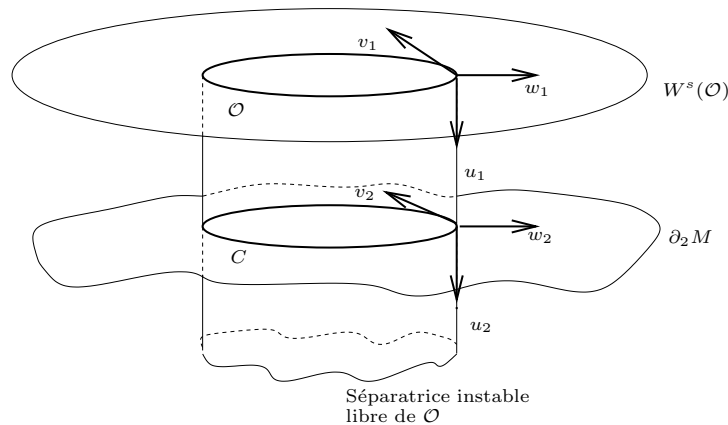


FIG. 4.4 – Les bases \mathcal{B}_1 définissant les séparatrices bords gauche et droite et \mathcal{B}_2 définissant les côtés gauche et droit d'une feuille compacte des laminations induites

On parlera parfois de côté gauche ou droit d'une séparatrice libre \mathcal{W} , cette expression désignant, comme le montre le lemme précédent, à la fois le côté de la séparatrice bord gauche ou droite et le côté gauche ou droit de la trace de \mathcal{W} sur le bord de M .

Définition de deux graphes Γ^s et Γ^u

Comme annoncé dans l'introduction, pour énoncer une condition nécessaire et suffisante à l'existence de section de Birkhoff, il est pratique de définir deux graphes Γ^s et Γ^u qui reflètent en partie les laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u .

On considère la lamination \mathcal{L}^s induite par $W^s(K)$ sur $\partial_1 M$ (où M est un voisinage filtrant quelconque de K). Les feuilles compactes de \mathcal{L}^s correspondent aux séparatrices stables libres de K . Nous allons maintenant faire entrer en jeu les feuilles non-compactes de \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u . Introduisons déjà la définition suivante :

Définition 4.37 *On appelle arche stable (ou s-arche) tout segment inclus dans une feuille stable faible, transverse à X dans cette feuille, d'intérieur disjoint de K et dont les extrémités sont dans K .*

Par définition d'une feuille bord, une arche stable joint toujours une séparatrice instable bord à une autre. Les rappels suivant sont montrés par le lemme 1.14.

Rappel L'ensemble limite de toute demi-feuille non-compacte de \mathcal{L}^s est réduit à une feuille compacte. Donc toute demi-feuille non-compacte de \mathcal{L}^s spirale sur un seul côté d'une seule feuille compacte.

Par ailleurs, toute feuille non compacte de \mathcal{L}^s est la trace sur $\partial_1 M$ de l'orbite d'une *s-arche*.

Plus précisément, soit \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 deux orbites périodiques u-bords et soit C_1 et C_2 les traces de leurs séparatrices stables libres. La trace de l'orbite d'une s-arche α joignant la séparatrice instable droite de l'orbite \mathcal{O}_1 à la séparatrice instable gauche de l'orbite \mathcal{O}_2 est une feuille non-compacte qui spirale sur le côté droit de C_1 et le côté gauche de C_2 .

Définition 4.38 *On dira que les séparatrices instables droite et gauche de deux orbites u-bords \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 sont couplées s'il existe une s-arche α joignant ces séparatrices.*

De façon équivalente, on dira que les côtés droit et gauche des feuilles compactes C_1 et C_2 de \mathcal{L}^s correspondant aux séparatrices libres de \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 s'il existe une feuille non-compacte de \mathcal{L}^s spiralant sur les côtés droit et gauche de C_1 et C_2 .

Notation 4.39 *On définit un graphe orienté Γ^s de la façon suivante :*

- *Les sommets de Γ^s sont les feuilles compactes de la lamination \mathcal{L}^s ,*
- *Une arête orientée part d'une feuille compacte C_1 et arrive à une feuille compacte C_2 si et seulement si le côté droit de C_1 est couplé au côté gauche de C_2 .*

On définit de même un graphe Γ^u en utilisant la lamination \mathcal{L}^u .

Remarque Dans le cas sans double-bord que nous considérons, rappelons qu'une orbite périodique u-bord a une et une seule séparatrice stable libre et que cette séparatrice libre ne trace qu'une et une seule feuille de \mathcal{L}^s . Il nous arrivera donc parfois de parler d'une orbite périodique u-bord comme d'un sommet de Γ^s . De même, on dira parfois qu'une orbite périodique s-bord est un sommet de Γ^u .

Attention, dans la définition des graphes Γ^s et Γ^u , on ne tient compte que des couplages "droite-gauche".

4.2.2 Un germe de suspension vérifie toujours la condition 3

On veut maintenant montrer la première implication du théorème 4.10.

On considère donc un difféomorphisme de Smale f d'une surface compacte S_f et une pièce basique Λ_f de dimension 0 de f . Comme on ne sera intéressé qu'au germe de f le long de Λ_f , le lemme 4.14 nous permet de supposer que $\Omega(f)$ est réduit à l'union de Λ_f et d'un nombre fini de point périodiques puits et sources. On note (\mathcal{M}, X, K) la suspension de (S_f, f, Λ_f) . L'ensemble K est donc une pièce basique selle de X et l'ensemble non-errant de X est réduit à K est à un nombre fini d'orbites périodiques puits et sources.

Étant donné un voisinage filtrant M quelconque de K dans \mathcal{M} , soient $\mathcal{L}^s = W^s(K) \cap \partial_1 M$ et $\mathcal{L}^u = W^u(K) \cap \partial_2 M$ les laminations d'entrée et de sortie de M et soient Γ^s et Γ^u les graphes associés.

Proposition 4.40 *Le germe $[X, K]$ et les graphes Γ^s et Γ^u associés vérifient la condition 3.*

Démonstration Puisque l'ensemble non-errant de X dans \mathcal{M} est réduit à l'union de K et d'orbites périodiques puits et sources, il n'existe en fait, à équivalence topologique près qu'un seul voisinage filtrant M de K dans \mathcal{M} (voir la partie 1.4). Ce voisinage filtrant est obtenu en ôtant à \mathcal{M} un voisinage tubulaire assez fin et à bord transverse à x de chaque orbite périodique puits ou source. Le bord de M est donc une union de tores.

Lemme 4.41 *Si C_1, \dots, C_n sont des feuilles compactes orientées de \mathcal{L}^s tracées sur une même composante T de $\partial_1 M$, alors les cercles orientés C_1, \dots, C_n sont non-homologues à 0 et deux-à-deux homologues dans T .*

Démonstration Tout d'abord, quitte à perturber le plongement de S_f , on suppose que S_f est transverse à T . L'intersection de S_f avec T est alors un nombre fini de cercles plongés disjoints que l'on notera $\gamma_1, \dots, \gamma_r$. Quitte à perturber encore le plongement de S_f , on supposera que les cercles C_1, \dots, C_n sont transverses aux cercles $\gamma_1, \dots, \gamma_r$. On supposera également, par commodité d'écriture, que le temps de retour sur S_f est uniformément égal à 1.

Notre but est de montrer que l'on peut choisir des orientations des cercles γ_i telles que le nombre d'intersection du cercle C_j avec la somme des γ_i est non-nul et de même signe pour tout j .

L'ensemble non-errant $\Omega(X)$ est l'union de K d'un ensemble fini d'orbites périodiques puits que l'on note α et d'un ensemble d'orbites sources que l'on note ω . Alors, on vérifie que l'ouvert $S_f \setminus (W^u(K) \cup \alpha \cup \omega)$ est un revêtement de $\partial_1 M$, l'application de revêtement consistant juste à associer à tout point x de $S_f \setminus (W^u(K) \cup \alpha \cup \omega)$, l'unique point d'intersection de l'orbite de x avec $\partial_1 M$.

(La continuité de la projection provient de la transversalité de S_f et de $\partial_1 M$ au champ X . La projection est surjective car $\partial_1 M$ coupe toute orbite de $(\text{Sat}(M) \setminus W^u(K)) = \mathcal{M} \setminus (W^u(K) \cup \alpha \cup \omega)$. La fibre de tout point est infinie, essentiellement car S_f coupe tout segment d'orbite de longueur 1. Il faut alors essentiellement vérifier qu'il n'y a pas d'accumulation des préimages d'un point x de $\partial_1 M$, c'est-à-dire des intersections de l'orbite de x avec S_f . Mais de telles accumulations n'ont lieu dans \mathcal{M} que sur $\omega(x)$ et $S_f \setminus (W^u(K) \cup \alpha \cup \omega)$ est disjoint de $\Omega(X)$.)

On notera π l'application de revêtement.

Notons $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_n$ les séparatrices stables libres qui intersectent T selon les cercles C_1, \dots, C_n . Alors la préimage par π des cercles C_1, \dots, C_n est, par définition de π , l'intersection des séparatrices $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_n$ avec la surface S_f . Pour tout i , la séparatrice \mathcal{W}_i intersecte S_f selon un nombre fini de droites que l'on note $\mathcal{D}_i^1, \dots, \mathcal{D}_i^{l_i}$. Chacune de ces

droites va d'un point périodique u-bord à un point d'intersection de S_f avec une orbite source (voir la figure 4.5).

Le cercle γ est dans S_f et puisque le temps de retour sur S_f est uniformément égal à 1, la préimage par π du cercle γ est l'union des cercles $X^k(\gamma)$ où k varie dans \mathbb{Z} .

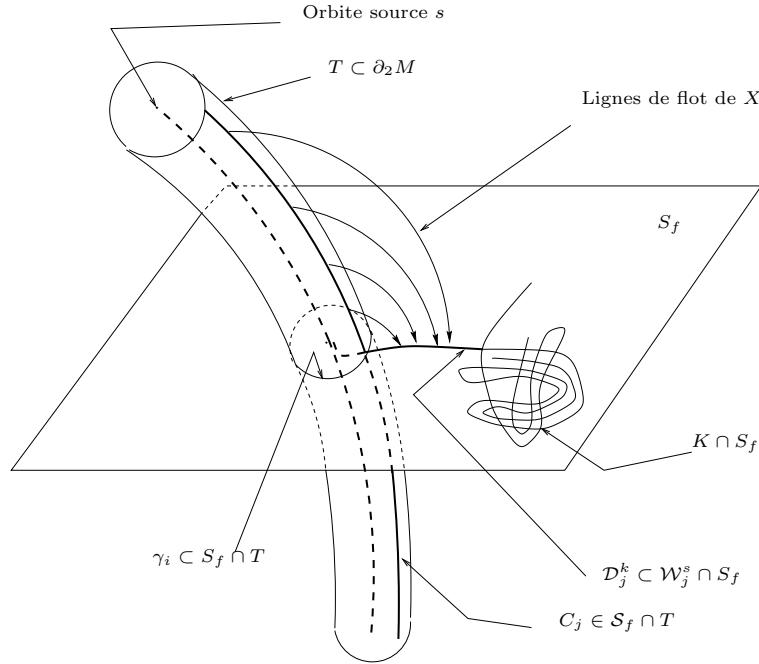


FIG. 4.5 – L'intersection de la surface de section S_f , du bord d'entrée $T \subset \partial_1 M$ et d'une séparatrice stable libre

L'application de revêtement π est une projection le long du flot donc préserve l'orientation. On vérifie que l'orientation des cercles C_1, \dots, C_n induit sur les droites $\mathcal{D}_1^1, \dots, \mathcal{D}_1^{l_1}, \mathcal{D}_2^1, \dots, \mathcal{D}_2^{l_2}, \dots, \mathcal{D}_n^1, \dots, \mathcal{D}_n^{l_n}$ l'orientation allant du point u-bord de K au point source (voir figure 4.6). Puisque π préserve l'orientation, le nombre d'intersection de l'union des droites $\mathcal{D}_j^1, \dots, \mathcal{D}_j^{l_j}$ (j fixé) avec un cercle γ_i est égal au nombre d'intersection de C_j avec γ^i .

Or T est une composante du bord d'entrée d'un voisinage filtrant de K , donc T sépare, dans \mathcal{M} une orbite périodique source s de K . Par conséquent, les différentes composantes connexes de $T \cap S_f$ séparent, dans S_f , l'ensemble $K \cap S_f$ de l'ensemble $s \cap S_f$. Notons a_1, \dots, a_r les points d'intersections de s avec S_f . Avec ces notations et quitte à renuméroter les points a_i , le cercle γ_i sépare, dans S_f , le point a_i de $K \cap S_f$.

Orientons γ_i tel que toute droite qui va de K vers a_i coupe γ_i avec un nombre d'intersection positif. Toute séparatrice stable libre (pour X) qui rencontre T va de K à s (en particulier les séparatrices $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_n$). Donc toutes les droites \mathcal{D}_i^j vont de K vers un des a_i . Par conséquent, toutes les droites \mathcal{D}_i^j ont nombre d'intersection 1 avec la somme des γ_i .

Par conséquent, il existe une orientation de chacun des cercles γ_i tel que le nombre d'intersection de C_j avec la somme γ des γ_i est strictement positif pour tout j .

La non-nullité du nombre d'intersection implique que chacun des C_j est non-homologue à 0 sur T . Comme T est un tore et comme les C_j sont disjoints les uns des autres, on en déduit que, pour tous i et k , le cercle C_i est homologue au cercle εC_k (où $\varepsilon = \pm$). Mais comme C_i et C_k ont tout deux nombre d'intersection positif avec une même classe d'homologie, on a en fait $\varepsilon = 1$. \square

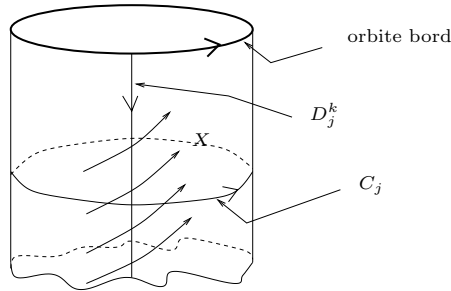


FIG. 4.6 – Quand on revêt C_j par D_j^k grâce au flot, l'orientation de C_j induit sur D_j^k l'orientation qui fuit l'orbite périodique (c'est le contraire quand on considère une séparatrice instable libre)

Lemme 4.42 *De tout sommet de Γ^s et Γ^u part au plus une arête. A tout sommet de Γ^s et Γ^u arrive au plus une arête.*

Démonstration Notons C_1 et C_2 les traces sur une composante connexe T de $\partial_1 M$ des séparatrices stables libres de deux orbites u-bords \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 et supposons que le côté droit de C_1 est couplé au côté gauche de C_2 . Il existe donc une feuille non compacte L de \mathcal{L}^s spiralant du bord droit de C_1 au bord gauche de C_2 .

Puisque C_1 et C_2 sont des cercles orientés qui sont dans la même classe d'homologie non-nulle de T , ils découpent sur T une couronne \mathcal{C} bordée par le bord droit de C_1 et par le bord gauche de C_2 . Puisqu'il existe une feuille non compacte L de \mathcal{L}^s spiralant du bord droit de C_1 au bord gauche de C_2 , et puisque toute feuille compacte de \mathcal{L}^s est dans une classe d'homologie non-nulle, il n'existe aucune feuille compacte de \mathcal{L}^s dans l'intérieur de \mathcal{C} . Par conséquent, toute feuille non-compacte de \mathcal{L}^s spiralant à une de ses extrémité sur le bord droit de C_1 ne peut spiraler à l'autre extrémité que sur le bord droit de C_1 ou sur le bord gauche de C_2 . Ceci prouve qu'il n'existe qu'une flèche partant de C_1 dans Γ^s . De même, on prouve qu'il n'existe qu'une flèche arrivant à C_2 . \square

Remarque Le lemme 4.42 implique que toute composante connexe de Γ^s (resp. Γ^u) est soit un cycle orienté, soit un segment orienté.

Lemme 4.43 *Il n'existe pas de couplage gauche-gauche, ni de couplage droite-droite.*

Démonstration La lamination \mathcal{L}^s peut-être plongées dans un certain nombre de tores, de façon à ce que toutes les feuilles compactes orientées soient dans une même classe d'homologie non-nulle de $\partial_1 M$. En particulier, il ne peut pas exister de feuille non compacte de \mathcal{L}^s spiralant du bord droit d'une feuille compacte au bord droit d'une autre, ni du bord gauche d'une feuille compacte au bord gauche d'une autre. \square

Corollaire 4.44 *Deux composantes connexes distinctes des graphes Γ^s et Γ^u correspondent toujours à des composantes connexes de \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u distinctes.*

Démonstration Soient deux feuilles compactes C_1 et C_2 de \mathcal{L}^s qui sont dans des composantes distinctes de Γ^s . On montre que ces feuilles ne sont pas couplées entre-elles (de quelques côtés que ce soient) :

Par définition de Γ^s , puisque C_1 et C_2 sont dans des composantes distinctes de Γ^s et Γ^u , le bord droit d'une des deux feuilles ne peut pas être couplé au bord gauche de l'autre. D'autre part, le lemme précédent montre que les deux bords gauches de C_1 et C_2 ne peuvent pas être couplés, de même que les deux bords droits. Par conséquent, C_1 et C_2 ne peuvent appartenir à la même composante connexe de \mathcal{L}^s .

Maintenant, étant données deux composantes connexes distinctes A et B de Γ^s , aucune feuille compacte de A n'est couplée à aucune feuille compacte de B donc A et B correspondent à des composantes connexes distinctes de \mathcal{L}^s . \square

Lemme 4.45 *Le nombre de composantes non-cycliques de Γ^s est égal au nombre de composantes non-cycliques de Γ^u .*

Pour la démonstration et à plusieurs reprises dans la suite, il sera pratique d'utiliser la définition suivante :

Définition 4.46 *On appelle orbite coin une orbite qui est à la fois s-bord et u-bord.*

Démonstration Comme les composantes de Γ^s et Γ^u sont soit des cycles (aucun sommet extrémal), soit des segments (exactement deux sommets extrémaux), il nous suffit de montrer que le nombre de sommets extrémaux de Γ^s est égal au nombre de sommets extrémaux de Γ^u , ce que nous allons faire.

Soit C une feuille compacte de \mathcal{L}^s qui correspond à un sommet extrémal d'arrivée de Γ^s . Alors le côté droit de C n'est pas couplé. En effet, par définition de Γ^s , le côté droit de C n'est couplé au côté gauche d'aucune feuille compacte de \mathcal{L}^s puisque qu'aucune arête ne part de C dans Γ^s . D'autre part, le lemme 4.43 montre que le côté droit de C n'est couplé au côté droit d'aucune feuille.

De même pour le côté gauche d'une extrémité gauche et de même pour Γ^u . On en déduit que chaque extrémité d'une composante non-cyclique de Γ^s ou Γ^u correspond à une orbite périodique bord \mathcal{O} dont une des séparatrices bord \mathcal{W} n'est couplée à aucune autre. On distingue deux cas :

- soit \mathcal{W} est libre et alors \mathcal{O} est une orbite périodique coin (définition ci-dessus),
- soit \mathcal{W} n'est pas libre mais n'est couplée à aucune autre séparatrice.

Remarquons alors que :

— Une orbite périodique coin possède soit une séparatrice instable libre et une séparatrice stable libre. Une orbite périodique coin donne correspond donc à un sommet extrémal de Γ^s et un sommet extrémal de Γ^u .

— Les séparatrices non-libre mais non-couplée vont toujours par couples l'une stable, l'autre instable (dans le cas d'une suspension). Plus précisément, soit \mathcal{W}^s une séparatrice stable non-libre, mais couplée à aucune autre séparatrice stable. La proposition 2.6.4

de [BLJ] montre que toute composante connexe de la trace sur S_f de \mathcal{W}^s porte une et une seule chaîne infinie d'arches. Les arches instables de cette chaîne infinie ne sont portées que par une seule séparatrice instable \mathcal{W}^u qui est non-libre et n'est couplée à aucune autre séparatrice instable. On a bien sûr l'analogie en échangeant stable et instable.

Ceci prouve que l'on peut partitionner en couples l'ensemble des sommets extrémaux des graphes Γ^s et Γ^u , ce qui conclut. \square

Le corollaire 4.44 indique que les composantes connexes de Γ^s et Γ^u correspondent exactement aux composantes connexes de \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u . On doit maintenant montrer que toute composante cyclique de Γ^s correspond à une composante de \mathcal{L}^s qui est plongée dans un tore du modèle de $[X, K]$ et que toute composante non-cyclique de Γ^s correspond à une composante de \mathcal{L}^s qui est plongée dans une sphère du modèle de $[X, K]$.

Remarque Les composantes de Γ^s et Γ^u correspondent toutes à des composantes de \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u portés par des sphères ou des tores.

En effet, il existe un voisinage isolant de K dont les composantes de bord sont toutes des tores. Par ailleurs, le genre des composantes de bord du modèle est inférieur au genre des composantes de bord de tout autre voisinage filtrant.

Lemme 4.47 *Soit C_1 une feuille compacte appartenant à un cycle de Γ^s . Notons T la composante connexe d'un voisinage filtrant M de K sur laquelle est tracée la feuille C_1 . Alors C_1 est dans une classe non-nulle de l'homologie de T .*

Démonstration Notons C_1, C_2, \dots, C_n les feuilles compactes qui constituent les sommets successifs du cycle de Γ^s considéré. Il existe n feuilles non-compactes L_1, \dots, L_n de \mathcal{L}^s sur T telles que L_i spirale sur le côté droit de C_i et sur le côté gauche de C_{i+1} (modulo n). Il existe alors, pour tout i , un "petit" segment A_i traversant C_i de gauche à droite, ayant ses extrémités sur L_i et L_{i+1} et ne rencontrant pas C_j pour $j \neq i$. Le cercle constitué de l'union des segments A_i et des segments des feuilles L_i allant de l'extrémité droite de A_{i-1} à l'extrémité gauche de A_i ne coupe qu'une et une seule fois chacun des cercles C_i . Ceci prouve que, pour tout i , ce cercle C_i est dans une classe d'homologie non-nulle sur T . \square

Du lemme 4.47 et de la remarque le précédent, on déduit que toute composante cyclique de Γ^s ou Γ^u correspond à une composante de \mathcal{L}^s ou \mathcal{L}^u plongée dans une composante du bord du modèle qui est de genre inférieur à 1 et non-nul, c'est-à-dire :

Corollaire 4.48 *Toute composante cyclique de Γ^s ou Γ^u correspond à une composante de \mathcal{L}^s ou \mathcal{L}^u plongée dans un tore du bord du modèle.*

Enfin, on a le dernier lemme suivant :

Lemme 4.49 *Toute composante non-cyclique de Γ^s ou Γ^u correspond à une composante de \mathcal{L}^s ou \mathcal{L}^u plongée dans une sphère du bord du modèle.*

Démonstration On considère une composante non-cyclique de Γ^s . On a une suite finie de feuilles compactes C_1, \dots, C_n telles que le côté gauche de C_i est couplé au côté droit de C_{i+1} pour tout $i \leq n - 1$ mais telles que le côté droit de C_n n'est pas couplé au côté

gauche de C_1 . Par ailleurs, on a vu qu'on peut plonger la lamination \mathcal{L}^s dans un tore T de façon à ce que les feuilles C_1, \dots, C_n soient toute dans une même classe d'homologie non-nulle dans T (lemme 4.41). Le tore T privé des feuilles C_1, \dots, C_n est donc une union disjointes de n couronnes. Par ailleurs, le côté droit de C_n n'étant pas couplée au côté gauche de C_1 , il existe un cercle non-homotope à 0 dans la couronne bordée par C_1 et C_n , ce cercle étant disjoint de la lamination compacte \mathcal{L}^s . Dans le bord du modèle, ce cercle borde un disque disjoint de \mathcal{L}^s (dans le modèle, tout cercle tracé sur $\partial_1 \widetilde{M} \setminus \mathcal{L}^s$ borde un disque de $\partial_1 \widetilde{M} \setminus \mathcal{L}^s$). Par conséquent, la composante du bord du modèle correspondante est une sphère. \square

Conclusion :

Les lemmes et corollaires 4.42, 4.44, 4.45, 4.48 et 4.49, on déduit que le germe de $[X, K]$ vérifie la condition 3 ce qui prouve la première implication du théorème 4.10. \square

4.2.3 Types géométriques qui ne sont pas des types de suspensions

On a montré que, dans le cas d'une suspension, la lamination \mathcal{L}^u pouvait toujours être plongée dans un nombre fini de tores. Rappelons, par ailleurs, que le corollaire 2.30 montre que le genre des composantes de la surface Σ^u associé à une partition essentielle quelconque est le même que celui des composantes de la lamination \mathcal{L}^u . On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 4.50 *Si T est le type géométrique d'une partition de Markov d'un ensemble selle saturé de la suspension d'un difféomorphisme de hyperbolique de surface compacte, alors chaque composante de la surface de sortie Σ^u associée à T est de genre inférieur à 1.*

Pour donner des exemples d'ensembles selles saturés dont le germe n'est pas celui d'une suspension le long d'un ensemble selle saturé, il suffit de donner des types géométriques donnant lieu à une surface de sortie Σ^u dont une composante est de genre plus grand que 2. La figure 4.7 décrit un type géométrique donnant lieu à une surface de sortie de genre 2 et montre qu'il est très facile de construire d'autres exemples de tels types géométriques. Ceci montre le corollaire 4.11 tout en n'utilisant qu'une petite partie du théorème 4.10

Problème :

Je pense que l'exemple de "type géométrique qui n'est pas un type de suspension" que nous avons donné détermine en fait un germe de champ de vecteurs qui n'admet même pas de section de Birkhoff. Peut-on trouver un type géométrique caractérisant un germe qui admet une section de Birkhoff mais n'est pas un germe de suspension ?

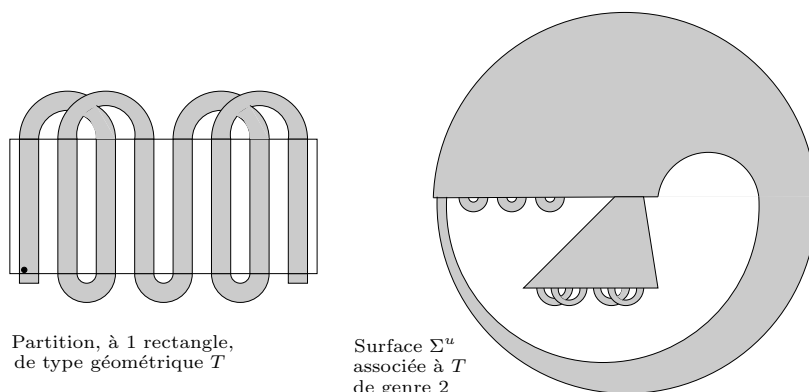


FIG. 4.7 – Une partition à 1 rectangle et la surface de sortie Σ^u , de genre 2, associée à son type géométrique

4.3 Condition suffisante pour admettre une section de Birkhoff

Nous nous consacrons maintenant à montrer la deuxième affirmation du théorème 4.10. On doit donc prouver que la condition 3 est une condition suffisante pour qu'un germe admette une section de Birkhoff. Ainsi, on considère un germe $[X, K]$ vérifiant la condition 3 et on doit trouver une variété \mathcal{M} munie d'un champ que l'on notera encore X , portant le germe de $[X, K]$ tels qu'il existe une section de Birkhoff de X dans \mathcal{M} .

La démonstration se fait essentiellement en trois étapes. D'abord, on doit construire, une union finie de surfaces à bords assez spéciaux, partout transverses à X , coupant tout segment d'orbite de X de longueur suffisante. Ce seront des surfaces que l'on appellera *surfaces transverses à bords essentiellement polygonaux*. Ensuite, on attache des anses appropriées sur le bord des surfaces à bords essentiellement polygonaux pour obtenir des *sections de Birkhoff élémentaires*: on obtient une union finie de surfaces immergées, coupant tout segment d'orbite de longueur suffisante de X , dont les bords sont constitués d'orbites périodiques et dont les intérieurs sont transverses à X . Enfin, on désingularise cette union de sections de Birkhoff élémentaires pour obtenir une section de Birkhoff globale plongée.

Les deux dernières étapes se traite en adaptant un peu les techniques que Fried a introduites pour les flots d'Anosov transitifs. C'est la construction des surfaces à bords essentiellement polygonaux qui fait intervenir à fond la condition 3 et s'avère assez technique. C'est pourquoi, après avoir énoncé un résultat d'existence de surfaces à bords essentiellement polygonaux (proposition 4.53), on montrera immédiatement comment ce résultat permet de conclure à l'existence d'une section de Birkhoff globale. Après seulement, on montrera la proposition 4.53.

4.3.1 Surfaces transverses à bords essentiellement polygonaux

Nous allons définir les surfaces transverses à bord essentiellement polygonaux.

Rappelons d'abord que l'on peut parler de voisinages filtrants abstraits de K : ce sont des voisinages obtenus en attachant des anses au modèle (\widehat{M}, X) de $[X, K]$. On les considère bien sûr muni du champ induit par X que l'on note encore X .

Définition 4.51 *Un vrai polygone sera un polygone dont les arêtes sont des segments alternativement tracés dans des feuilles $W^s(K)$ et $W^u(K)$ et transverses à X .*

Définition 4.52 *Soit M un voisinage filtrant de K . Une surface transverse à bord essentiellement polygonal dans M sera une surface compacte à bord Σ , immergée dans M , transverse au champ X et dont le bord sera formé :*

- d'un vrai polygone,
- d'un certain nombre (éventuellement nul) de cercles plongés dans les bords d'entrée et de sortie de M .

La proposition suivante consiste le coeur de la preuve de la deuxième implication du théorème 4.10.

Proposition 4.53 *Si $[X, K]$ vérifie la condition 3, alors il existe un voisinage filtrant (abstrait) M de K et une collection finie $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ de surfaces transverses à bord essentiellement polygonaux dans M tels que :*

- i) toutes les composantes de bord de M sont des tores,*
- ii) il existe τ tel que l'union des intérieurs des Σ_i coupe tout segment d'orbite de K de longueur τ ,*
- iii) chaque composante connexe T du bord de M porte exactement un cercle bord de l'union des Σ_i . Ce cercle est plongé dans T et est non-homotope à 0 dans T .*

La démonstration de la proposition 4.53 est longue et technique. Comme déjà annoncé, on repousse la démonstration de cette proposition. Nous allons d'abord la supposer acquise et montrer comment on peut alors en déduire l'existence d'une section de Birkhoff du germe $[X, K]$.

4.3.2 De la proposition 4.53 à l'existence d'une section de Birkhoff globale

Supposons montrée la proposition 4.53. On suppose donc donnés un voisinage filtrant M de K et une collection de surfaces $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ comme dans la conclusion de cette proposition.

Chaque composante connexe T de $\partial_1 M$ est un tore. Nous allons coller un tore plein source sur un tel tore T . On doit choisir la façon de le faire, c'est-à-dire choisir un générateur de l'homologie de T (voir la partie 1.4).

A T est associée une unique surface Σ_i : celle dont une composante de bord C est portée par T . Le cercle C est plongé dans T et non-homotope à 0 (il peut donc servir de générateur de l'homologie de T). On peut donc coller un tore plein source (N, Y) sur T de façon à ce que C borde un disque D transverse au champ Y dans N et de façon que la réunion de Σ_i et de D soit topologiquement transverse au champ obtenu par recollement

de X (dans M) et Y (dans N). On effectue ce recollement et on note $\widehat{\Sigma}_i$ l'union de Σ_i et de D .

On recolle ainsi un tore plein source sur chaque composante de $\partial_1 M$ et simultanément un disque tranverse au champ sur chaque cercle bord des Σ_i . On fait de même avec des tores plein puits sur le bord de sortie de M . On obtient ainsi une variété compacte sans bord que l'on note \mathcal{M} , muni d'un champ que l'on note encore X et d'une collection de surfaces transverses à bords $\widehat{\Sigma}_i$.

Le bord de chaque $\widehat{\Sigma}_i$ est réduit à un *vrai* polygone ; on dira naturellement que c'est une *surface transverse à bord polygonal*.

Lemme 4.54 *On note $\widehat{\Sigma}$ l'union des $\widehat{\Sigma}_i$. Il existe $\widehat{\tau}$ tel que l'intérieur de $\widehat{\Sigma}$ coupe tout segment d'orbite de longueur $\widehat{\tau}$ de \mathcal{M} .*

Démonstration Dans un tore plein source ou puits (N, Y) , tout disque tranverse à Y dont le bord est un cercle non-homotope à 0 de ∂N coupe tout segment d'orbite de longueur suffisante de Y dans N . Par construction des surface $\widehat{\Sigma}_i$, il existe donc τ_0 tel que l'union $\widehat{\Sigma}$ coupe donc tout segment d'orbite de longueur τ_0 de X dans $\mathcal{M} \setminus M$.

Par ailleurs, d'après la proposition 4.53, l'intérieur de $\widehat{\Sigma}$ coupe tout segment d'orbite de longueur τ de K ; on en déduit que l'existence d'un voisinage U de K tel que $\widehat{\Sigma}$ coupe tout segment d'orbite contenu dans U de longueur $\tau + 1$.

Comme K est le maximal invariant de M et par compacité de K , il existe un temps T tel que $M_T = \bigcap_{t=-T}^T X^t(M)$ soit inclus dans U (voir la partie 1.1.2). De plus, toute demi-orbite positive ou négative qui sort de M ne revient pas dans M . Par conséquent, toute demi-orbite positive ou négative :

- soit reste dans $U \cup (\mathcal{M} \setminus M)$,
- soit, dès qu'elle sort de $U \cup (\mathcal{M} \setminus M)$, passe au plus un temps $2T$ dans $M \setminus U$, puis entre dans $U \cup (\mathcal{M} \setminus M)$ et y reste pour toujours.

Le lemme est donc vrai en prenant $\widehat{\tau} \geq 2\tau_0 + 2(\tau + 1) + 2T$. □

Des surfaces transverses à bords essentiellement polygonaux aux sections de Birkhoff élémentaires

Nous allons maintenant transformer chaque surface à bord polygonal $\widehat{\Sigma}_i$ en une section de Birkhoff élémentaire $\widetilde{\Sigma}_i$.

Définition 4.55 *Une section de Birkhoff élémentaire $\widetilde{\Sigma}$ dans \mathcal{M} est une surface à bord, immergée dans \mathcal{M} , dont le bord est constituée d'orbites de X et dont l'intérieur est transverse à X .*

Proposition 4.56 *Pour toute surface transverse à bord polygonal $\widehat{\Sigma}$ immergée dans \mathcal{M} (le bord de $\widehat{\Sigma}$ est alors un vrai polygone) et pour tout voisinage U du bord de $\widehat{\Sigma}$ dans $\widehat{\Sigma}$, il existe une section de Birkhoff élémentaire $\widetilde{\Sigma}$ telle que l'intérieur de $\widetilde{\Sigma}$ contient $\widehat{\Sigma} \setminus U$.*

Le coeur de la démonstration de la proposition 4.56 est constitué du lemme suivant :

Lemme 4.57 Soit $P = (p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_k, q_k)$ un vrai polygone. Pour fixer les idées, on suppose que ce sont les segments $[q_i, p_{i+1}]$ qui sont stables et les segments $[p_i, q_i]$ qui sont instables (les indices sont considérés modulo k). On note C un voisinage tubulaire de P dans une surface locale transverse à X . Pour tout ε assez petit :

— il existe, sur C , des points périodiques r_1, \dots, r_k situés à une distance inférieure à ε des points p_1, \dots, p_k et tels que l'application de Poincaré a des valeurs propres positives aux points r_1, \dots, r_k ,

— il existe une orbite périodique qui passe successivement par des points s_1, \dots, s_k de C tels que s_i soit dans à une distance inférieure à ε de q_i .

On peut choisir les orbites ci-dessus de façon à ce qu'il existe, pour tout i , un segment α_i , tracé sur C , joignant r_i à s_i et un segment β_i , également tracé sur C et joignant r_i à s_{i+1} où :

- α_i est ε -proche de $[p_i, q_i]^s$,
- β_i est ε -proche de $[p_i, q_{i+1}]^u$,
- α_i se projette le long du flot sur β_i en temps continu (positif).

Démonstration On considère tout d'abord des rectangles ρ_1, \dots, ρ_k , inclus dans le voisinage collier C , tels que chaque ρ_i contient $[p_i, q_i]^s$ et est de taille instable inférieure à ε . Les orbites périodiques étant denses dans K et aucun point de K n'étant isolé, il existe des points r_1, \dots, r_k , appartenant à des orbites périodiques, situés dans les rectangles ρ_1, \dots, ρ_k et ε -proches de p_1, \dots, p_k . De plus, les orbites périodiques dont l'application de retour à des valeurs propres positives sont denses dans K ; on peut donc supposer que l'application de retour aux points r_1, \dots, r_k a des valeurs propres positives. On note, comme annoncé, τ_i la période de l'orbite de r_i . Notons que, quitte à changer r_i , on peut supposer la période τ_i aussi grande que l'on veut.

Il existe un voisinage de r_i dans C où tout point revient sur C en un temps continu coïncidant avec τ_i en r_i . Si la période τ_i est assez grande, l'hyperbolicité du flot permet d'exiger de ce voisinage de contenir un sous-rectangle horizontal de ρ_i . On note alors $\tilde{\rho}_i$ ce sous-rectangle et f_i l'application de retour. Toujours si la période τ_i est assez grande, le rectangle $f_i(\tilde{\rho}_i)$ coupe $\tilde{\rho}_{i+1}$ selon un sous-rectangle vertical, noté v_{i+1} , qui est également un sous-rectangle horizontal de $f_i(\tilde{\rho}_i)$ et est de taille stable inférieure à ε . Le sous-rectangle v_{i+1} est de tailles stable et instables inférieures à ε , et contient des segments de $W^u(r_i) \cap C$ et $W^s(r_{i+1}) \cap C$. Ce sous-rectangle est donc nécessairement situé dans une boule de taille 2ε autour de q_i .

On considère les rectangles $\tilde{\rho}_i$ comme une partition de Markov pour leur maximal invariant sous l'action du difféomorphisme g valant f_i sur $\tilde{\rho}_i$. Pour tout i , $g(\tilde{\rho}_i)$ intersecte $\tilde{\rho}_{i+1}$ selon v_{i+1} . Il résulte des propriétés des partitions de Markov qu'il existe un point s_k dans v_k période k pour g et tel que pour tout j le point $s_j = g^j(s_k)$ soit dans v_j (voir la figure 4.8).

On considère enfin un segment α_i dans $\tilde{\rho}_i$ joignant s_i à r_{i+1} et transverse aux feuilletages stable et instable de C (dont hérite $\tilde{\rho}_i$). Le segment α_i étant dans ρ_i et transverse au feuilletages, il est nécessairement ε -proche de $[q_i, p_{i+1}]^s$. Le segment $\beta_i \equiv g(\alpha_i)$ est un segment joignant r_i à s_{i+1} , inclus dans $g(\tilde{\rho}_i)$ et transverse aux feuilletages stable et instable de ce rectangle. Puisque la taille stable de $g(\tilde{\rho}_i)$ est inférieure à ε , le segment β_i

est 2ε -proche de $[p_i, q_{i+1}]^u$. □

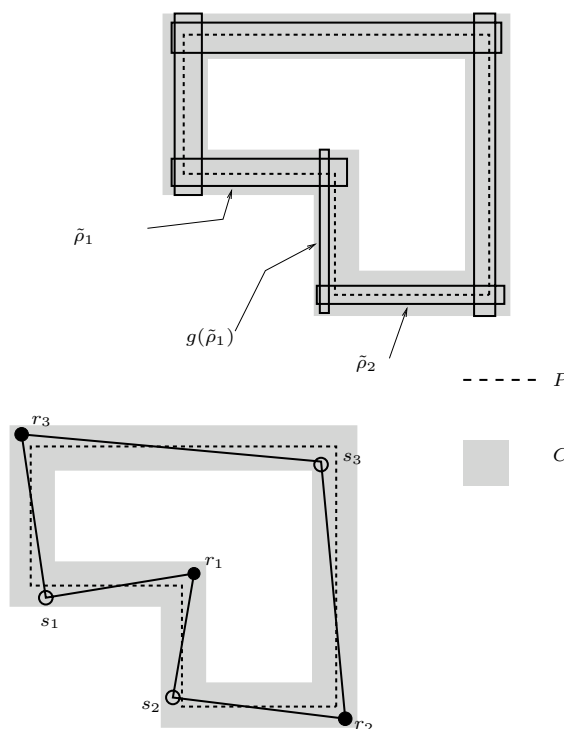


FIG. 4.8 – L'approximation d'un vrai polygone à $2n$ côtés par un polygone dont les coins forment $n + 1$ orbites périodiques

Démonstration 4.56 On considère le polygone $P = (p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ bord de $\widehat{\Sigma}$. On considère une surface $\widehat{\Sigma}'$ transverse à X contenant $\widehat{\Sigma}$ dans son intérieur et un voisinage tubulaire C de P dans $\widehat{\Sigma}'$ tel que $(C \cap \widehat{\Sigma}) \subset U$. On parlera du bord intérieur de C (celui des deux bords de C qui est dans $\widehat{\Sigma}$) et du bord extérieur de C .

On trouve alors des points r_i, s_i et des segments α_i, β_i comme dans le lemme précédent. On supprime, dans $\widehat{\Sigma}'$, la partie comprise entre le bord extérieur et la courbe $(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n)$: on obtient une surface transverse contenant $\widehat{\Sigma} \setminus U$ et dont le bord est la courbe $(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n)$.

On attache alors à les n bandes tangentes au flot allant de α_i à β_i (rappelons que α_i se projette sur β_i en temps continu le long du flot). On obtient une surface comportant une composante transverse incluse dans $\widehat{\Sigma}$ et n anses tangentes au flot. Le bord de cette surface est constitué de $n + 1$ orbites : celles des r_i et l'orbite commune à tous les s_i . Il peut arriver que plusieurs feuillettes de Σ arrivent sur l'orbite des s_i si le temps de projection de α_i sur β_i est n fois le temps de projection de s_i sur s_{i+1} avec $n > 1$.

Le fait que l'application de retour des r_i ait des valeurs propres positives implique que les bandes sont attachées de façon à ce que $\widehat{\Sigma}$ peut-être rendue transverse en dehors des orbites bords par une petite homotopie habituelle consistant à lisser les arête que sont les segments $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$. □

D'après le lemme 4.54, on a une union finie $\widehat{\Sigma}$ de surfaces transverse à bord polygonaux $\widehat{\Sigma}_1, \dots, \widehat{\Sigma}_n$ dont l'intérieur coupe tout segment d'orbite de X dans \mathcal{M} de longueur $\widehat{\tau}$. Il

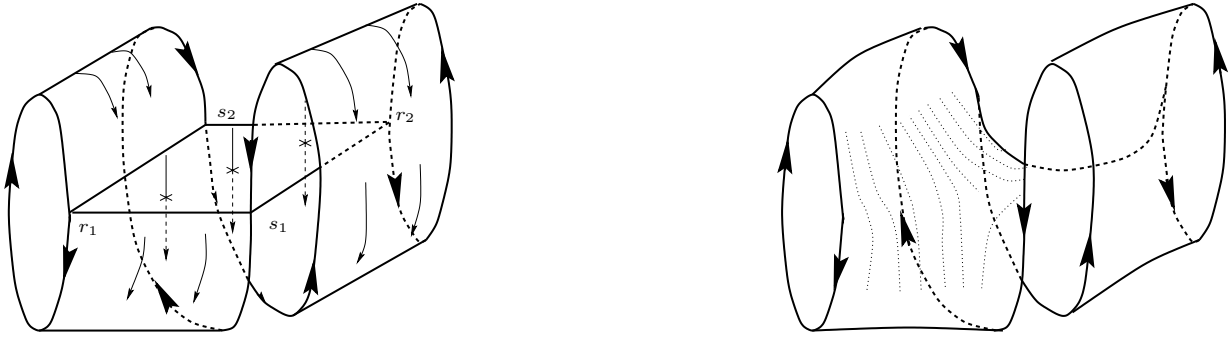


FIG. 4.9 – La surface de Birkhoff élémentaire obtenue dans le cas où la surface à bord essentiellement polygonal de départ est un rectangle : avant et après lissage des arêtes

existe donc des voisinages U_1, \dots, U_n des bords de $\widehat{\Sigma}_1, \dots, \widehat{\Sigma}_n$ dans $\widehat{\Sigma}_1, \dots, \widehat{\Sigma}_n$ tels que l'union des $\widehat{\Sigma}_i \setminus U_i$ coupe encore tout segment d'orbite de longueur $\widehat{\tau}$.

On note alors $\widetilde{\Sigma}$ l'union des sections de Birkhoff élémentaires associées aux couples $(\widehat{\Sigma}_i, U_i)$ par la proposition 4.56. Alors $\widetilde{\Sigma}$ coupe tout segment d'orbite de X dans \mathcal{M} de longueur $\widehat{\tau}$.

Suppression des auto-intersections

Il reste maintenant à supprimer les auto-intersections de l'union $\widetilde{\Sigma}$ de sections de Birkhoff élémentaires (tout en continuant à couper tous les segments d'orbites de longueur $\widehat{\tau} + 1$). On le fait par des opérations apparemment classiques en topologie de dimension 3, en tout cas, exactement comme le fait Fried pour les Anosov transitifs.

Brièvement, par une petite isotopie transverse de $\widetilde{\Sigma}$, on peut déjà se ramener au cas générique, c'est-à-dire où l'on n'a que :

- des points doubles appartenant à des lignes isolées d'intersections transverses de l'intérieur de $\widetilde{\Sigma}$ avec l'intérieur de $\widetilde{\Sigma}$,
- des points isolés d'intersection transverse d'une composante de bord de $\widetilde{\Sigma}$ avec l'intérieur de $\widetilde{\Sigma}$,
- des points triples isolés d'intersection transverse de l'intérieur de $\widetilde{\Sigma}$ avec une ligne de points doubles.

On supprime alors ces auto-intersections génériques par découpage-recollement locaux, tout en continuant à couper les mêmes orbites et en restant transverse à X (figure 4.10).

Toute composante du bord de $\widetilde{\Sigma}$ est une orbite de K et coupe donc l'intérieur de $\widetilde{\Sigma}$.

La surface obtenue après désingularisation est une section de Birkhoff globale de X plongée dans \mathcal{M} .

4.3.3 Démonstration de la proposition 4.53

Il nous reste maintenant, pour obtenir la deuxième implication du théorème, à montrer la proposition 4.53. Les difficultés essentielles sont, comme nous allons le voir, de construire une surface transverse à bord essentiellement polygonal Σ pour chaque orbite périodique

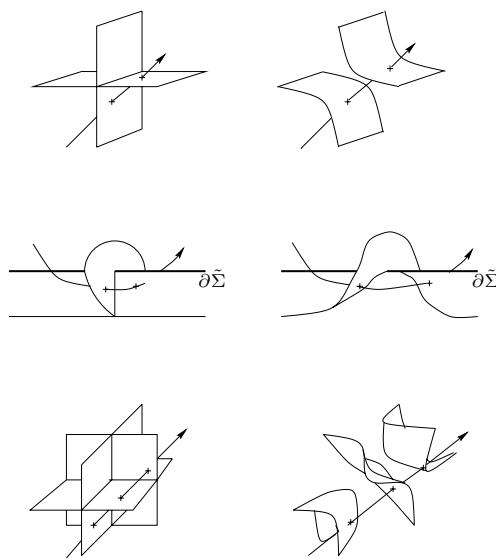


FIG. 4.10 – Élimination des auto-intersections

bord tout en contrlant les composantes de bord de Σ sur $\partial_1 M$ et $\partial_2 M$. Le voisinage filtrant M sera construit simultanément aux surfaces à bords essentiellement polygonaux.

On suppose donc que le germe $[X, K]$, les laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u , et les graphes Γ^s et Γ^u qui lui sont associés vérifient la condition 3.

On veut inclure toutes les orbites périodiques bords (ou les traces de leur séparatrices libres) dans des cycles pour construire, pour chaque cycle, une surface transverse à bord essentiellement polygonal coupant simultanément toute les orbites périodiques bords du cycle. Nous allons donc construire un graphe Γ , contenant les composantes connexes non-cycliques de Γ^s et Γ^u et tel que toute feuille compacte de \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u sera dans un cycle de Γ^s , Γ^u ou Γ .

Construction d'un nouveau graphe Γ

Sous la condition 3, rappelons que toute composante connexe de Γ^s (resp. Γ^u) est soit un cycle orienté, soit un segment orienté. De plus, Γ^s possède le même nombre de composante non-cyclique que Γ^u . Par conséquent, Γ^s et Γ^u possèdent autant de sommets extrémaux l'un que l'autre (deux fois le nombre de composantes non-cycliques). Enfin les sommets extrémaux de Γ^s (resp. Γ^u) se divisent en deux ensembles de même cardinalité : les sommets *de départ* d'une composante non-cyclique, les sommets *d'arrivée*

Nous avons déjà remarqué au cours de la partie 4.2 (démonstration du lemme 4.45), que les sommets extrémaux de Γ^s ou Γ^u correspondent :

- a) soit aux traces des séparatrices libres des coins périodiques coins (rappelons que l'on appelle orbite périodique coin une orbite périodique qui est à la fois s-bord et u-bord),
- b) soit aux traces des séparatrices libres des points périodiques bords qui ne sont pas coins mais dont une séparatrice bord n'est couplée à aucune autre.

Pour construire Γ , on considère l'union disjointe des composantes non-cycliques des graphes Γ^s et Γ^u que l'on va enrichir en flèches allant d'un sommet d'arrivée de l'un de ces graphes à un sommet de départ de l'autre graphe.

a) Remarquons que les séparatrices libres d'un coin sont l'une gauche et l'une droite. Une orbite périodique coin correspond donc au sommet d'arrivée d'une composante non-cyclique A de l'un des deux graphes Γ^s ou Γ^u et au sommet de départ d'une composante non-cyclique B de l'autre graphe. *On joint l'arrivée de A au départ de B par une flèche.*

En effectuant cette opération pour chaque orbite périodique coin, on obtient un premier graphe Γ_0 . Par construction, il arrive au plus une arête à chaque sommet de Γ_0 et il part au plus une flèche de chaque sommet de Γ_0 . Par conséquent, toute composante connexe de Γ_0 est soit un cycle orienté, soit un segment orienté. De plus, Γ_0 possède quatre ensembles de même cardinalité de sommets extrémaux : sommets de départ stables (c'est-à-dire provenant de Γ^s), d'arrivée stable, de départ instable et d'arrivée instable.

b) *On choisit alors un moyen de joindre les sommets extrémaux de Γ_0 de la façon suivante : une arête va toujours d'un sommet d'arrivée stable vers un sommet de départ instable ou d'un sommet d'arrivée instable vers un sommet de départ stable..*

Notation 4.58 *On appelle Γ le graphe finalement obtenu.*

Par construction, toutes les composantes de Γ sont des cycles orientés. Un cycle de Γ est formé d'une suite (cyclique) de composante non-cyclique alternativement de Γ^s et Γ^u .

Voisinages tubulaires de polygones

Pour construire les surfaces à bord essentiellement polygonaux, on aura besoin d'un certain nombre de définitions et propriétés techniques relatives aux polygones.

Tout d'abord, par commodité visuelle, on utilisera des surfaces \mathcal{R}_∞ (voir les rappels dans la partie 4.1.1) associées à des partitions de Markov amples essentielles de K pour tracer partiellement les surfaces à bords essentiellement polygonaux.

Il existe toujours des partitions essentielles de K donc il existe toujours de telles surfaces. Rappelons que la surface \mathcal{R}_∞ associée à une partition ample essentielle \mathcal{R} est simplement définie comme $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} X^k(R)$ où R est l'union des rectangles de \mathcal{R} et où X a été multiplié par une fonction lisse strictement positive pour que le temps de retour sur R soit égal à 1. L'application de premier retour sur \mathcal{R}_∞ est alors simplement $f = \hat{X}^1$.

L'intérêt d'une surface \mathcal{R}_∞ est justement que l'application de premier retour f sur \mathcal{R}_∞ est globalement définie sur \mathcal{R}_∞ et qu'il existe un voisinage invariant \mathcal{U} de K tel que \mathcal{R}_∞ coupe tout segment d'orbite de longueur 1 dans \mathcal{U} .

Une surface \mathcal{R}_∞ est toujours munie de deux feuilletages transverses \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u , prolongeant les laminations d'intérieurs vides $W^s(K) \cap \mathcal{R}_\infty$ et $W^u(K) \cap \mathcal{R}_\infty$ et tel que l'application de premier retour f sur \mathcal{R}_∞ contracte et dilate uniformément les vecteurs tangents à \mathcal{R}_∞ .

Définition 4.59 *Soit \mathcal{R}_∞ la surface associée à une partition ample essentielle \mathcal{R} de K et munie de ses feuilletages stables et instables \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u . Nous appellerons polygone*

tracé dans \mathcal{R}_∞ , un polygone dont les arêtes sont alternativement des segments de feuilles de \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u .

(Rappelons qu'on appelle *vrai* polygone tracé sur \mathcal{R}_∞ un polygone dont les arêtes sont alternativement des segments de feuilles de \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u .)

Définition 4.60 *On appellera voisinage tubulaire d'un polygone P tracé dans une surface \mathcal{R}_∞ , un voisinage tubulaire de P dans \mathcal{R}_∞ bordé par deux polygones.*

On fera attention qu'un voisinage tubulaire de polygone est donc un objet de codimension 1 et, en fait, une surface transverse à bord.

Pour construire des surfaces transverses à bords essentiellement polygonaux, on utilisera des voisinages tubulaires de polygones avec des propriétés plus ou moins fortes suivant les cas étudiés. On utilisera les définitions et remarques suivantes :

Définitions 4.61

— Par abus de langage, on définit les deux côtés locaux d'un segment tracé dans une feuille \mathcal{F} de $W^s(K)$ (resp. $W^u(K)$) comme les deux côtés (locaux) de cette feuille \mathcal{F} .

— On peut ainsi parler des deux côtés locaux d'un vrai polygone (notons que ces deux côtés sont les deux côtés locaux de l'orbite du polygone).

— Un vrai polygone sera alors dit isolé d'un côté si, d'un côté de ce polygone, ses arêtes stables ne sont pas accumulés par $W^s(K)$ et ses arêtes instables ne sont pas accumulés par $W^u(K)$.

— Au contraire, un vrai polygone sera dit accumulé d'un côté si, d'un côté de ce polygone, ses arêtes stables sont accumulés par $W^s(K)$ et ses arêtes instables accumulés par $W^u(K)$.

Remarques Soit P un vrai polygone tracé dans une surface \mathcal{R}_∞ .

1) Il existe des voisinages tubulaires de P arbitrairement fins.

2) Si P est accumulé d'un côté, on peut trouver un voisinage tubulaire C de P arbitrairement fin et tel que le bord de C situé du côté accumulé de P est un vrai polygone.

3) Si P est isolé d'un côté et si, de plus, toutes les arêtes stables de P sont des s-arches alors on peut trouver un voisinage tubulaire C arbitrairement fin de P tel que le bord de C situé du côté isolé de P est disjoint de $W^u(K)$.

En effet, du côté isolé de P , les arêtes instables de P ne sont pas accumulées par $W^u(K)$. D'autre part, l'intérieur des arêtes stables de P est disjoint de K (par définition d'une arche stable), donc, par saturation de K , $W^u(K)$ ne coupe pas l'intérieur des arêtes stables de P . On en déduit que toute courbe suffisamment proche de P et situé du côté isolé de P ne rencontre pas $W^u(K)$.

3bis) De même, si P est isolé d'un côté et si, de plus, toutes les arêtes instables de P sont des u-arches alors on peut trouver un voisinage tubulaire C de P tel que le bord de C situé du côté isolé de P est disjoint de $W^s(K)$.

4) De plus, un vrai polygone qui est isolé d'un côté est nécessairement accumulé de l'autre (rappelons qu'aucune feuille de $W^s(K)$ ou de $W^u(K)$ est accumulée au moins d'un côté). Si P est isolé d'un côté et si ses côtés instables sont des arches, on peut cumuler les propriétés 2) et 3).

5) On peut cumuler les propriétés 3) et 3bis), si P est un polygone d'arches.

Composantes connexes du bord d'un voisinage filtrant et composantes connexes des laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u

Nous aurons besoin de contrôler quelles composantes d'un voisinage filtrant M de K portent quels sommets du graphe Γ (rappelons que les sommets de Γ sont des feuilles compactes des laminations \mathcal{L}^s et \mathcal{L}^u), quel est le genre de la composante portant tel cycle de Γ , etc. Il sera pratique d'utiliser un vocabulaire que nous introduisons maintenant.

Définitions 4.62 *Soit M un voisinage filtrant de K .*

— *On dira qu'une composante de $\partial_1 M$ est une composante d'entrée T d'un cycle \mathcal{C} de Γ si T porte une feuille compacte de \mathcal{L}^s qui est un sommet de \mathcal{C} . On définit de même les composantes de sortie de \mathcal{C} .*

— *On dira que le voisinage filtrant M est séparé pour Γ , Γ^s et Γ^u si, étant donnés deux cycles distincts \mathcal{C} et \mathcal{C}' quelconques de Γ , Γ^s ou Γ^u , aucune composante d'entrée de \mathcal{C} n'est une composante d'entrée de \mathcal{C}' et aucune composante de sortie de \mathcal{C} n'est une composante de sortie de \mathcal{C}' .*

— *Soit \mathcal{C} un cycle de Γ , Γ^s ou Γ^u . Le voisinage filtrant M est obtenu en attachant des anses à des couples de cercles $(C_1, C_2), \dots, (C_{2n-1}, C_{2n})$ du bord d'entrée du modèle. On dira que M est vierge par rapport à \mathcal{C} si aucun des cercles C_i n'est porté par une composante d'entrée de \mathcal{C} .*

La condition 3 implique que le modèle de $[X, K]$ est séparé par rapport à Γ .

Le cheminement de la démonstration de la proposition 4.53 est indirect : on montre comment construire des surfaces à bord essentiellement polygonaux coupant certains types d'orbites dans certains voisinages filtrant. A la fin seulement, on montre que l'on peut construire un voisinage filtrant contenant une unions finies de surfaces à bords essentiellement polygonaux coupant tout segment d'orbite de K .

Construction d'une surface transverse à bord essentiellement polygonal dont l'intérieur contient un point non-bord donné

Proposition 4.63 *Soit M un voisinage filtrant quelconque de K et p un point de K qui n'est pas un point bord. Il existe, dans M , une surface transverse à bord essentiellement polygonal Σ dont l'intérieur contient p . Le bord de Σ est réduit à un vrai polygone.*

Pour montrer cette proposition, nous allons utiliser le coeur des rectangles d'une partition essentielle ample (voir la définition 3.10). Remarquons en effet que le coeur d'un rectangle est une surface transverse à bord essentiellement polygonal.

Démonstration de la proposition 4.63 Soit \mathcal{R} une partition ample essentielle de K dans M . Un des rectangles (que nous noterons R) de \mathcal{R} coupe l'orbite de p au point $X^t(p)$. Alors le coeur du rectangle $X^{-t}(R)$ est une surface transverse bord polygonal contenant p . Puisque le bord du coeur de $X^{-t}(R)$ est formé de quatre segments s et u -bord et que p n'est pas bord, le point p est en fait dans l'intérieur du coeur de $X^{-t}(R)$. \square

Construction d'une surface transverse à bord essentiellement polygonal contenant, dans son intérieur, un point non-périodique, bord mais pas coin

Proposition 4.64 *Soit M un voisinage filtrant quelconque de K et soit p un point bord qui n'est ni périodique, ni coin. Alors il existe, dans M , une surface transverse à bord essentiellement polygonal Σ dont l'intérieur contient p . Le bord de Σ est réduit à un vrai polygone.*

Démonstration Soit \mathcal{R} une partition de Markov ample essentielle de K dans M . Quitte à changer \mathcal{R} en $X^t(\mathcal{R})$ pour un temps t adapté, on suppose que l'union des rectangles de \mathcal{R} contient le point p . On note f l'application de premier retour sur la surface \mathcal{R}_∞ associée à \mathcal{R} .

Lemme 4.65 *Il existe un rectangle R de \mathcal{R} et un entier k tel que p est dans l'intérieur du coeur de $f^k(R)$.*

Démonstration Pour fixer les idées, supposons que p est s-bord mais pas u-bord ; l'autre cas se traite de manière symétrique.

Comme \mathcal{R}_∞ coupe toute orbite dans un certain voisinage \mathcal{U} invariant de K et comme p est s-bord, il existe un intervalle de $W^u(K) \cap \mathcal{R}_\infty$, partant de p et d'intérieur disjoint de K . On note γ l'intervalle maximal pour ces propriétés. Comme \mathcal{U} est invariant, $W^u(K)$ ne rencontre pas le bord de \mathcal{R}_∞ . Comme, de plus, p n'est pas périodique et n'a donc pas de séparatrice instable libre, γ est nécessairement un segment avec ses deux extrémités dans K et d'intérieur disjoint de K (c'est-à-dire une u-arche).

Il existe k et R tel que $f^k(R)$ contient γ . En effet, quand on fait tendre k vers $+\infty$, le segment $f^{-k}(\gamma)$ devient de longueur arbitrairement petite (et rencontre toujours K) ; donc, pour k assez grand, $f^{-k}(\gamma)$ est inclus dans un rectangle R de \mathcal{R} . Puisque les deux extrémités de γ sont dans K , le segment $f^{-k}(\gamma)$ est en fait nécessairement inclus dans le coeur de R et, par suite, γ est dans le coeur de $f^k(R)$.

Rappelons que le bord du coeur d'un rectangle est formé de segment stables et instables *bords*. Le point p ne peut pas être dans le bord stable du coeur de $f^k(R)$: d'un côté de la variété stable de p part le segment γ qui est inclus dans le coeur de $f^k(R)$ et de l'autre côté, la variété stable de p est accumulée par $W^s(K)$. Par ailleurs, le point p n'est pas u-bord donc n'est pas sur le bord instable du coeur de $f^k(R)$. Par conséquent, le point p est dans l'intérieur du coeur de $f^k(R)$. □

On considère donc un rectangle $f^k(R)$ dont le coeur contient p dans son intérieur. C'est une surface à bord essentiellement polygonal autour de p . □

Construction d'une surface transverse à bord essentiellement polygonal pour un cycle de Γ^u

Soit \mathcal{C} un cycle de Γ^u . Les sommets successifs sont les traces sur le bord de sortie d'un voisinage filtrant des séparatrices instables libres d'orbites périodiques s-bords $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ (les indices seront considérés modulo n).

Si M est un voisinage filtrant de K possédant de bonnes propriétés, nous allons montrer qu'il existe dans M une surface transverse à bord essentiellement polygonal coupant chacune des orbites $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$. Plus précisément :

Proposition 4.66 *Soit M un voisinage filtrant vierge par rapport à \mathcal{C} . Soit T l'unique composante de sortie de Γ (d'après la condition 3, T est un tore).*

Alors il existe dans M une surface transverse à bord essentiellement polygonal Σ dont l'intérieur coupe les orbites $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ et dont le bord est constitué d'un vrai polygone et d'un cercle plongé, non-homotope à 0 dans T .

Démonstration On considère une partition de Markov ample essentielle \mathcal{R} de K qui intersecte chacune des orbites $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ en un seul point (on peut toujours le faire grâce aux opérations définies au chapitre précédent) ; on notera p_1, \dots, p_n les points d'intersections. La notation \mathcal{R}_∞ désigne maintenant la surface associée à la partitions \mathcal{R} . Nous allons construire une surface transverse dont le bord polygonal sera tracé sur \mathcal{R}_∞ et dont l'intérieur contiendra les points p_1, \dots, p_n .

Par définition de Γ^u , pour tout i (y compris $i = n$, en travaillant modulo n), il existe une orbite d'arches instables joignant la séparatrice stable droite de \mathcal{O}_i à la séparatrice stable gauche de \mathcal{O}_{i+1} . Il existe donc une arche instable γ_i tracée sur \mathcal{R}_∞ joignant la séparatrice stable droite de p_i à la séparatrice stable gauche de p_{i+1} . On peut choisir cette arche γ_i isolée du côté de p_i . On vérifie que ce côté de γ_i est également celui duquel se trouve p_{i+1} : ceci car γ_i joint une séparatrice droite à une séparatrice gauche. On considère le vrai polygone P , tracé sur \mathcal{R}_∞ et formé (voir figure 4.11) :

- des arches γ_i ,
- des segments des feuilles stables $W^s(\mathcal{O}_i) \cap \mathcal{R}_\infty$, et joignant l'extrémité de γ_{i-1} à celle de γ_i .

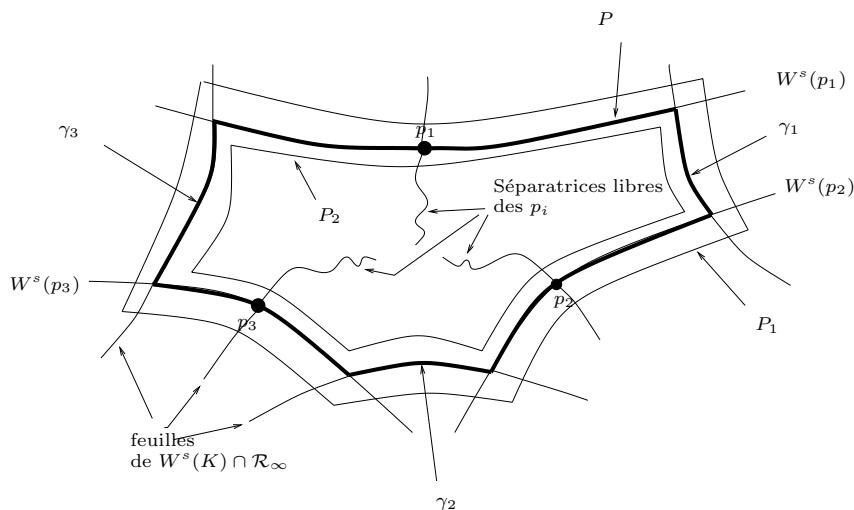


FIG. 4.11 – Le cas d'un cycle d'orbites périodique s -bords de Γ^u

Le vrai polygone P est isolé d'un côté. De plus, ses côtés instables sont des arches. On peut donc trouver un voisinage tubulaire arbitrairement fin C de P dans \mathcal{R}_∞ bordé par P_1 et P_2 où (voir les points 3bis) et 4) de la suite de remarques page 185) :

- P_1 est un vrai polygone,
- P_2 est un polygone disjoint de $W^s(K)$ (et la moitié de C comprise entre P et P_2 est disjointe de $W^s(K)$)

Lemme 4.67 *On peut choisir le voisinage tubulaire C (arbitrairement fin) tel qu'aucune orbite de X ne coupe le polygone P_2 en plus d'un point.*

Démonstration On note f l'application de premier retour sur la surface \mathcal{R}_∞ . Rappelons que f est globalement définie sur \mathcal{R}_∞ ; il nous suffit donc de trouver C tel que $f^n(P_2)$ est disjoint de P_2 pour tout n dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Pour tout i , la surface \mathcal{R}_∞ ne coupe \mathcal{O}_i qu'en un point (précisément le point p_i), donc ce point p_i est fixe pour f . De plus, f ne renverse pas l'orientation au point p_i : en effet, $W^s(p_i)$ est accumulée par $W^s(K)$ d'un côté et d'un seul (et $W^s(K)$ est invariant par f). Par conséquent, f laisse fixe chacune des séparatrices stables de chacun des points p_1, \dots, p_n (quand on parle de séparatrice stable d'un point ici, il s'agit d'une séparatrice sur \mathcal{R}_∞ , c'est-à-dire d'une demi-droite).

Rappelons que γ_i est le côté instable de P joignant la séparatrice droite de p_i à la séparatrice gauche de p_{i+1} . Comme ces séparatrices sont fixes, pour tout n , l'arche $f^{-n}(\gamma_i)$ joint les mêmes séparatrices. Surtout, les extrémités des arches $f^{-n}(\gamma_i)$ sont ordonnées de façon croissante sur les séparatrices stables droites et gauche de p_i et p_{i+1} : l'extrémité de $f^{-n}(\gamma_i)$ sur la séparatrice de p_i est entre l'extrémité de $f^{-(n-1)}(\gamma_i)$ et celle de $f^{-(n+1)}(\gamma_i)$ (voir la figure 4.12).

On appellera *fausse arche* portant un côté instable de P_2 le segment de \mathcal{F}^u , inclus dans C , contenant ce côté instable et à extrémités sur les côtés stables de P . Comme la moitié de C comprise entre P et P_2 est disjointe de $W^s(K)$, les fausses arches portant les côté instables de P_2 sont d'intérieurs disjoints de $W^s(K)$. Par ailleurs, les extrémités d'une fausse arche sont sur les côtés stable de P donc sur $W^s(K)$ (voir la figure 4.12).

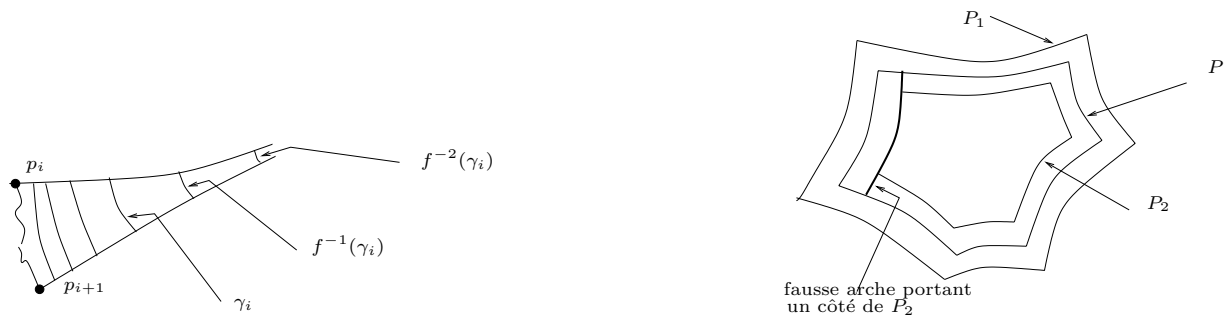


FIG. 4.12 – Les côtés des $f^{-n}(P)$ sont ordonnés - Fausse arche portant un côté de P_2

Notons $\tilde{\gamma}_i$ la fausse arche portant le côté de P_2 qui longe γ_i . La fausse arche $\tilde{\gamma}_i$ joint donc la séparatrice droite de p_i à la séparatrice gauche de p_{i+1} . Si C est assez fin, alors les extrémités de $\tilde{\gamma}_i$ sont, sur les séparatrices droite et gauche de p_i et p_{i+1} , situées entre les extrémités de γ_i et $f(\gamma_i)$. Alors, pour tout n , les extrémités de la fausse arche $f^{-n}(\tilde{\gamma}_i)$

sont entre les extrémités de $f^{-n}(\gamma_i)$ et celles de $f^{-n+1}(\gamma_i)$: en tout cas les extrémités de $f^{-n}(\tilde{\gamma}_i)$ ne sont pas sur P . Par conséquent, les fausses arches portant les côtés de $f^{-n}(P_2)$ n'ont pas leurs extrémités sur P .

Rappelons qu'on a choisi C assez fin de façon à ce qu'il n'existe aucune feuille de $W^s(K) \cap \mathcal{R}_\infty$ entre P et P_2 . De plus, C est trivialement feuilleté par \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u . Donc tout segment de feuille de \mathcal{F}^u qui coupe P_2 et a ses extrémités dans $W^s(K)$ intersecte un côté stable de P .

En particulier, si un côté instable $f^{-n}(P_2)$ (avec $n \neq 0$) coupait P_2 alors la fausse arche qui porte ce côté instable devrait intersecter un côté stable de P . Ceci est absurde : en effet, d'une part, l'intérieur d'une fausse arche est, par définition, disjoint de $W^s(K)$ donc du bord stable de P , d'autre part, on a montré que les extrémités des fausses arches portant les côtés instables de $f^{-n}(P_2)$ ne sont pas sur P .

En conclusion, pour tout $n > 0$, les côtés instables de $f^{-n}(P_2)$ sont disjoints de P_2 .

Considérons \mathcal{L} la feuille de \mathcal{F}^s qui porte le côté instable de P_2 qui longe $W^s(p_i)$. Il n'existe aucun point de P_2 entre \mathcal{L} et $W^s(p_i)$. Mais, comme p_i est fixe par f , pour tout n strictement positif, $f^{-n}(\mathcal{L})$ est justement situé entre \mathcal{L}^s et $W^s(p_i)$. Or, $f^{-n}(\mathcal{L})$ porte le côté stable de $f^{-n}(P_2)$ qui longe $W^s(p_i)$. On en déduit que les côtés stables de $f^{-n}(P_2)$ sont disjoints de P_2 pour tout n strictement positif. (voir la figure 4.13).

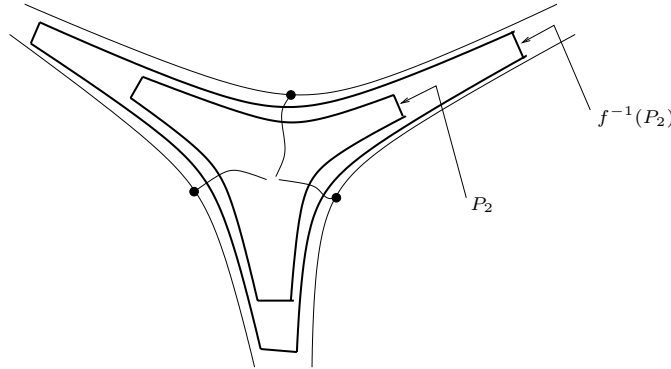


FIG. 4.13 – Le polygone P_2 est disjoint de tous les $f^{-n}(P_2)$

On a montré que, si C est suffisamment fin alors, pour tout n strictement positif, $f^{-n}(P_2)$ est disjoint de P_2 . Par suite, pour tout n non-nul, $f^n(P_2)$ est disjoint de P_2 . \square

Puisque P_2 est disjoint de $W^s(K)$, on peut le projeter en entier le long du flot de X sur $\partial_2 M$. Notons γ la courbe induite sur $\partial_2 M$.

La courbe γ est connexe puisque P_2 l'est. Comme P_2 intersecte les séparatrices libres des orbites \mathcal{O}_i , la courbe γ intersecte les traces de ces séparatrices libres sur $\partial_2 M$; on en déduit que γ est tracée sur T .

Le lemme précédent nous assure que (si on choisit bien le voisinage tubulaire C) la projection de P_2 sur γ est injective. La courbe γ est alors un cercle plongé sur T .

Enfin, P_2 coupe les séparatrices instables libres des orbites $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ en un point et un seul. Ceci implique que γ ne coupe la trace de la séparatrice instable libre des orbites $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ qu'en un point et un seul. Par conséquent, γ est non-homotope à 0 dans T .

On considère alors la surface Σ constituée de l'union :

- du voisinage tubulaire C ,
- des segments d'orbites compris entre P_2 et γ .

La surface Σ est l'union de deux couronnes, l'une de ces couronne est transverse au champ (le voisinage tubulaire C), l'autre est tangente (la couronne comprise entre P_2 et γ) ; on peut donc rendre Σ partout transverse à X par une petite isotopie. Le bord de Σ est constitué du vrai polygone P_1 et de la courbe γ .

La surface Σ est donc une surface transverse à bord essentiellement polygonal, coupant les orbites $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ et dont le bord non-polygonal est un cercle plongé, non-homotope à 0 dans T .

On a ainsi montré la proposition 4.66. On a bien sûr une proposition analogue pour les cycles de Γ^s qui se démontre avec les mêmes arguments. \square

Construction d'une surface transverse à bord essentiellement polygonal pour un cycle de Γ

Considérons maintenant un cycle \mathcal{C} de Γ . Le cycle \mathcal{C} est une suite (cyclique) de composantes non-cycliques alternativement de Γ^s et de Γ^u . On note $\mathcal{O}_1^1, \dots, \mathcal{O}_{k_1}^1, \mathcal{O}_1^2, \dots, \mathcal{O}_{k_2}^2, \dots, \mathcal{O}_1^{2n}, \dots, \mathcal{O}_{k_{2n}}^{2n}$ les orbites périodiques bords successives impliquées dans le cycle \mathcal{C} , indicées de façon à ce que les orbites $\mathcal{O}_1^j, \dots, \mathcal{O}_{k_j}^j$ correspondent aux sommets d'une composante non-cyclique de Γ^u si j est impair et de Γ^s si j est pair. *Attention*, il se peut que pour certaines valeurs de j , l'orbite $\mathcal{O}_{k_j}^j$ et l'orbite \mathcal{O}_1^{j+1} soient en fait la même (cas des orbites périodiques coins).

Étant donné un voisinage filtrant M de K avec de bonnes propriétés, nous allons construire à partir de M un voisinage filtrant M' et une surface transverse à bord essentiellement polygonal dans M' coupant toutes les orbites \mathcal{O}_i^j impliquées dans \mathcal{C} . En fait, nous allons montrer la proposition technique suivante (rappelons qu'une composante d'entrée de \mathcal{C} dans un voisinage filtrant M' est une composante de $\partial_1 M'$ qui porte au moins une feuille compacte de \mathcal{L}^s qui est un sommet de \mathcal{C}) :

Proposition 4.68 *Soit M un voisinage filtrant de K vierge par rapport à \mathcal{C} . Alors il existe un voisinage filtrant M' de K tel que :*

- M' est obtenu en attachant des anses à M ; ces attachements d'anses ne sont faits que sur des cercles qui sont portés par des composantes d'entrée de \mathcal{C} ,
- toute composante de d'entrée ou de sortie de \mathcal{C} dans M' est un tore,
- il existe une surface transverse à bord essentiellement polygonal Σ dans M' dont l'intérieur coupe toutes les orbites \mathcal{O}_i^j impliquées dans le cycle \mathcal{C} et telle que le bord de Σ est composé d'un vrai polygone et d'un cercle plongé, non-homotope à 0 sur chaque composante d'entrée et de sortie de \mathcal{C} .

Pour pouvoir construire des surfaces pour tous les cycles de Γ dans un même voisinage filtrant, on aura besoin éventuellement de "raboiter" un peu Σ au voisinage de son bord polygonal. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 4.69 *Soient M' et Σ le voisinage filtrant et la surface à bord essentiellement polygonal construits à la proposition 4.68. Soient A_1, \dots, A_n un nombre fini de composantes connexes de $M' \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$. On suppose que les composantes A_1, \dots, A_n n'intersecte aucune composante d'entrée de \mathcal{C} (rappelons qu'une composante d'entrée de \mathcal{C} est une composante de $\partial_1 M'$).*

Alors il existe une sous-surface Σ' de Σ à bord essentiellement polygonal tel que qui vérifie les mêmes propriétés que Σ et tel que Σ' n'intersecte aucune des composantes A_1, \dots, A_n .

(par “ Σ' vérifie les mêmes propriétés que Σ ” on entend, “l'intérieur de Σ' coupe toutes les orbites \mathcal{O}_i^j impliquées dans le cycle \mathcal{C} et le bord de Σ' est composé d'un vrai polygone et d'un cercle plongé, non-homotope à 0 sur chaque composante d'entrée et de sortie de \mathcal{C} ”)

Démonstration la proposition 4.68 On considère une partition de Markov ample essentielle qui ne coupe qu'en un seul point chacune des orbites périodiques bords \mathcal{O}_i^j . On note p_i^j les points d'intersection de la surface \mathcal{R}_∞ associée à cette partition avec les orbites \mathcal{O}_i^j .

a) *Construction d'un polygone P*

Nous allons construire un vrai polygone P tracé sur \mathcal{R}_∞ passant par tous les points p_i^j une fois et une seule, constitué de segments des séparatrices bords non libres des p_i^j (c'est-à-dire de l'intersection des séparatrices bords des orbites \mathcal{O}_i^j avec \mathcal{R}_∞), et d'arches joignant ces séparatrices.

Pour tout j , on construit déjà une ligne polygonale allant de p_1^j à $p_{k_j}^j$.

Pour j pair, on choisit, comme dans le cas des cycles de Γ^u , une arche instable γ_i joignant la séparatrice stable droite de p_i^j à la séparatrice stable gauche de p_{i+1}^j , pour tout $i \leq (n-1)$. On demande à γ_i d'être isolée du côté de p_i^j et p_{i+1}^j (ces côtés coïncident puisque γ_i joint une séparatrice gauche à une séparatrice droite). La ligne polygonale désirée est alors constituée :

- du segment de $W^s(p_1^j)$ allant de p_1^j à l'extrémité de γ_1 ,
- de l'arche instable γ_1
- du segment de $W^s(p_2^j)$ allant de l'extrémité de γ_1 à l'extrémité de γ_2 ,
- de l'arche instable γ_2
- du segment de $W^s(p_3^j)$ allant de l'extrémité de γ_2 à l'extrémité de γ_4 ,
- ...
- de l'arche instable γ_{n-1}
- du segment de $W^s(p_{k_j}^j)$ allant de l'extrémité de γ_{n-1} à $p_{k_j}^j$.

De même, si j est pair, c'est-à-dire si les p_i^j sont des points u-bords, on construit la ligne polygonale allant de p_1^j à $p_{k_j}^j$ en choisissant, pour tout $i \leq (n-1)$, une arche stable joignant la séparatrice instable droite de p_i^j à la séparatrice instable gauche de p_{i+1}^j .

On doit maintenant relier entre elles les lignes polygonales déjà construites pour former un polygone fermé, en suivant une règle donnée par le graphe Γ . Avec les notations ci-

dessus, cela signifie qu'on veut relier $p_{k_j}^j$ à p_1^{j+1} (y compris pour $j = 2n$, en travaillant modulo $2n$).

On traite le cas où j est impair, c'est-à-dire où $p_{k_j}^j$ est l'arrivée d'une composante de Γ^u et où p_1^{j+1} est le départ d'une composante de Γ^s . Par définition de Γ , on a deux cas :

— Les deux orbites $\mathcal{O}_{k_j}^j$ et \mathcal{O}_1^{j+1} sont des orbites coins périodiques et sont égales. Dans ce cas, $p_{k_j}^j$ et p_1^{j+1} sont confondus et il n'y a rien à faire.

— Ni $\mathcal{O}_{k_j}^j$, ni \mathcal{O}_1^{j+1} n'est une orbite coin, c'est-à-dire, ni la séparatrice stable droite de $\mathcal{O}_{k_j}^j$, ni la séparatrice instable gauche de \mathcal{O}_1^{j+1} n'est libre. Notons alors \mathcal{W}^s et \mathcal{W}^u ces séparatrices. Puisque K est supposé transitif, \mathcal{W}^s est dense dans $W^s(K)$ et \mathcal{W}^u est dense dans $W^u(K)$. On peut donc choisir un point r dans l'intersection de \mathcal{W}^s , \mathcal{W}^u et \mathcal{R}_∞ . On relie alors les deux lignes polygonales par l'union des deux segments $[p_{k_j}^j, r]^s$ et $[r, p_1^{j+1}]^u$ tracés sur \mathcal{R}_∞ .

Remarque On vérifie facilement que si r est sur la séparatrice stable bord droite d'un point p et sur la séparatrice instable bord gauche d'un point q alors les côtés isolés des segments $[p, r]^s$ et $[r, q]^u$ coïncident.

On procède de même si j est pair, c'est-à-dire pour relier l'arrivée d'une composante de Γ^s au départ d'une composante de Γ^u . On obtient donc par cette méthode un polygone tracé sur \mathcal{R}_∞ , que l'on notera P (voir figure 4.14). Le polygone P n'est *a priori* qu'immérgé dans le modèle M .

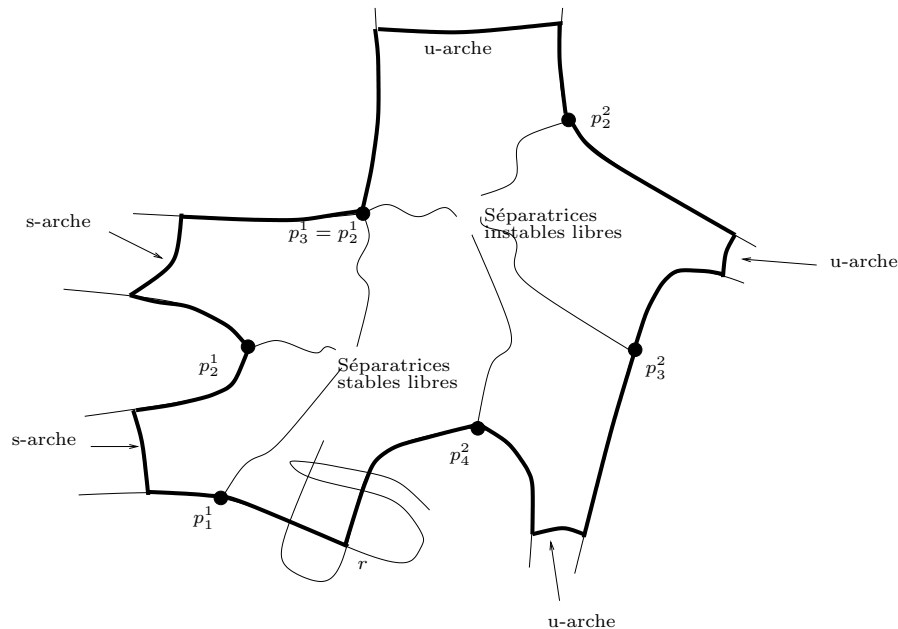


FIG. 4.14 – Le polygone P pour un cycle de Γ

Remarquons que, par construction, P est isolé d'un côté ; en effet :

— les différentes lignes polygonales incluses dans P , provenant des différentes composantes non cycliques des graphes Γ^s et Γ^u sont toutes isolées d'un côté,

—les côtés isolés de ces différentes lignes polygonales coïncident car on relie toujours une séparatrice stable droite à une séparatrice instable gauche ou une séparatrice instable droite à une séparatrice stable gauche (voir la dernière remarque).

b) Voisinage tubulaire de P

Comme p est isolé d'un côté, on peut considérer un voisinage tubulaire C de P bordé par deux polygones P_1 et P_2 tels que P_1 est un vrai polygone. Par ailleurs, les côtés de P se regroupent en paquets de côtés successifs : un paquet correspond à une composante non-cyclique de Γ^s ou Γ^u (le point commun entre un paquet et le suivant est soit un point périodique coin, soit un point "r" construit ci-dessus). Comme on a une bijection entre les côtés de P et ceux de P_2 , on peut regrouper les côtés de P_2 de la même façon en $2n$ lignes polygonale $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ allant d'un coin de P_2 à un autre. Remarquons que :

— si j est impair les côtés de la ligne polygonale α_j longent des côtés de P qui sont alternativement des segments de variété stable bord contenant un point périodique et des arches instables,

— si j est pair les côtés de la ligne polygonale α_j longent des côtés de P qui sont alternativement des segments de variété instable bord contenant un point périodique et des arches stables.

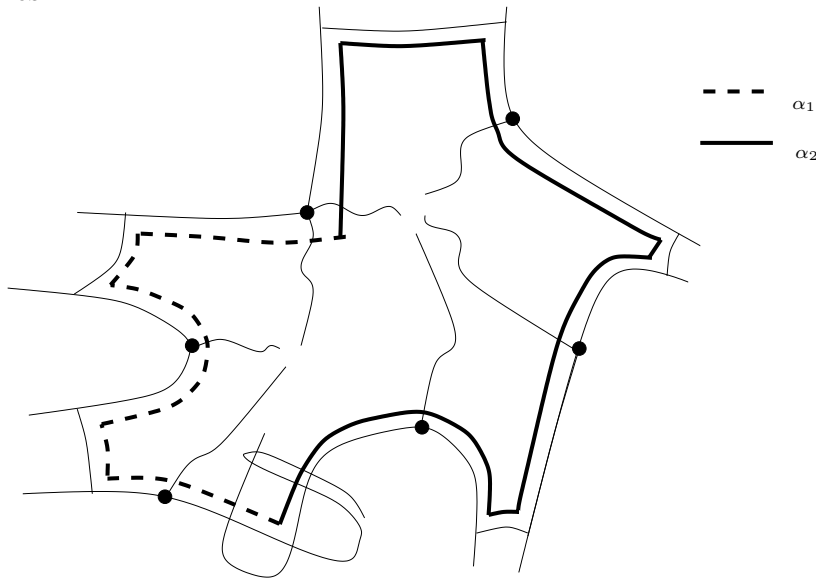


FIG. 4.15 – Les lignes polygonales α_j

En conséquence, quitte à changer C en un voisinage plus fin, on peut supposer que (voir les points 3) et 3bis) des remarques page 185) :

- i)* si j est impair, α_j est disjoint de $W^s(K)$,
- ibis)* si j est pair, α_j est disjoint de $W^u(K)$.

Par ailleurs, la même démonstration que celle de 4.67 nous permet de supposer que :

- ii)* $\bigcup_{j \text{ pair}} \alpha_j$ ne contient jamais deux points d'une même orbite,
- iiibis)* $\bigcup_{j \text{ impair}} \alpha_j$ ne contient jamais deux points d'une même orbite,

(il se peut, par contre, que $\bigcup_j \text{quelconque } \alpha_j$ contiennent deux points de la même orbite et, d'ailleurs, $\bigcup_j \text{quelconque } \alpha_j$ n'est pas nécessairement plongé).

c) Trace de P_2 sur le bord de M

Les propriétés *i)* et *ibis)* montrent que l'on peut projeter la ligne polygonale α_j le long du flot de X sur $\partial_1 M$ si j est pair et sur $\partial_2 M$ si j est impair. On note β_j la projection de α_j . Les propriétés *ii)* et *iibis)* montrent que β_j est plongé dans le bord de M et que les différents β_j sur le bord d'entrée (resp. de sortie) de M sont disjoints. Les α_j sont orientés par l'orientation du cycle \mathcal{C} dans Γ . Ceci induit une orientation des β_j ; On parlera donc des extrémités gauche et droite des β_j .

On note Σ^0 la surface à bord obtenue comme union du voisinage tubulaire C et des segments d'orbites joignant les α_j aux β_j (voir figure 4.16) (Σ^0 n'est *a priori* qu'immergée dans M). Le bord de Σ^0 est constitué du vrai polygone P_1 , des segments β_j tracés sur $\partial_1 M$ et $\partial_2 M$ et de $2n$ segments d'orbites que l'on notera γ_j joignant l'extrémité droite de β_j à l'extrémité gauche β_{j+1} .

La surface Σ^0 est l'union d'une couronne C transverse à X et de $2n$ bandes tangentes à X attachés à C le long de segments adjacents de la composante de bord P_2 de C . On peut rendre Σ^0 transverse à X partout sauf le long des γ_j par une homotopie consistant à lisser l'intérieur des arêtes α_j . On peut choisir le support de cette isotopie disjoint de $P_1, P, \text{ des } \gamma_j \text{ et des } \beta_j$.

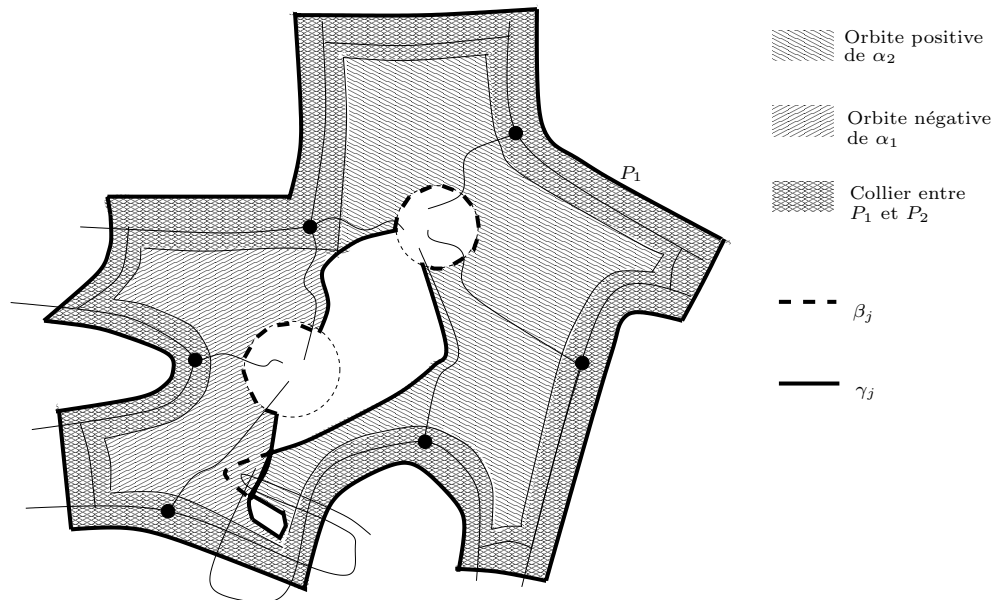


FIG. 4.16 – La surface Σ_0 (union de toutes les parties hachurées)

Remarquons que chaque α_j coupe une fois et une seule la séparatrice (stable ou instable suivant la parité de j) libre de chacune des orbites $\mathcal{O}_1^j, \dots, \mathcal{O}_{k_j}^j$ (et seulement ces séparatrices libres). Par ailleurs, chaque composante non-cyclique de Γ^s ou Γ^u correspond par hypothèse à une composante des lamination d'entrée ou de sortie plongée dans une

sphère d'entrée ou de sortie du modèle. Enfin, M est vierge vis-à-vis de \mathcal{C} . Ceci montre que :

- chaque β_j est un segment tracé sur une sphère d'entrée ou de sortie de M (et chaque composante de $\partial_1 M$ ou $\partial_2 M$ ne porte pas plus d'un β_j puisque M est séparé pour Γ),
- chaque β_j coupe les traces des séparatrices stables ou instables libres des orbites $\mathcal{O}_1^j, \dots, \mathcal{O}_{k_j}^j$, une fois et une seule, et toujours de la gauche vers la droite,
- les extrémités de β_j ne sont jamais dans les laminations stable ou instable induites sur les bords d'entrée ou de sortie.

d) Perforation de M

On choisit, pour tout j , un disque D_j dans $\partial_1 M \setminus W^s(K)$ ou dans $\partial_2 M \setminus W^u(K)$ suivant la parité de j tel que l'intérieur de D_j contient l'extrémité gauche de β_j . Rappelons que l'orbite de D_j dans M est un cylindre $D_j \times [0,1]$ le long duquel le champ X est tangent aux génératrices donc topologiquement équivalent à $\frac{\partial}{\partial t}$. On ôte à M l'orbite de tous les disques D_j . On obtient un voisinage de K , que l'on notera M^0 . Le bord de ce voisinage est constitué de $2n$ faces tangentes qui sont les orbites des bords des D_j et de faces transverses qui sont les composantes de bord de M trouées par les orbites des D_j .

Remarquons que lorsqu'on choisit D_j de plus en plus petit autour de l'extrémité de β_j , l'orbite de D_j est un voisinage tubulaire de plus en plus fin autour de γ_j . Par conséquent, pour D_j assez petit, la surface Σ^0 trace sur l'orbite de D_j un unique segment γ_j^0 , très proche de γ_j et allant de $\partial_1 M$ à $\partial_2 M$. Si D_j est assez petit, γ_j^0 n'a pas d'auto-intersection puisque γ_j n'en a pas (γ_j est un segment d'orbite). De plus, comme Σ^0 est transverse à X en sauf le long de γ_j , les segments γ_j^0 sont transverses à X .

Remarque En fait, Σ^0 est partout transverse à X dans M^0 : en effet, Σ^0 est transverse à X partout sauf le long des γ_j et les γ_j ne sont pas dans M^0 .

Par ailleurs, Σ^0 trace $2n$ segments sur les bords d'entrée et de sortie de M^0 qui ne sont autres que les β_j un peu rognés aux extrémités par le disque D_j que l'on a ôté ; on notera β_j^0 ces segments. Le segment γ_j^0 joint l'extrémité droite de β_j^0 à l'extrémité gauche de β_{j+1}^0 .

e) Recollement des bords tangents de M^0

On oublie maintenant M pour ne s'intéresser qu'à son sous-ensemble M^0 . La notation Σ^0 désigne maintenant l'intersection de Σ^0 avec M^0 . On veut recoller les faces tangentes du bord de M^0 entre elles, de façon à créer un voisinage filtrant. On devra en même temps recoller entre elles les restrictions des champs et surtout les traces de Σ^0 sur ces bords.

Pour cela, on s'autorise bien sûr de multiplier le champ X par une fonction lisse strictement positive. On s'autorise certaines isotopies de Σ^0 :

Définition 4.70 Une isotopie autorisée de Σ^0 sera une isotopie dont le support est disjoint des variétés invariantes de K , au cours de laquelle Σ^0 reste transverse à X , et au cours de laquelle les β_j^0 restent dans le bord transverse de M^0 et les γ_j^0 restent dans le bord tangent.

Remarque Après une isotopie autorisée, Σ^0 reste une surface transverse, dont l'intérieur coupe les orbites \mathcal{O}_i^j et dont le bord est constitué de P_1 et de segments isotopes, dans le bord de M^0 , aux β_j^0 et γ_j^0 .

Lemme 4.71 *Notons Θ_k la composante de bord tangent de M^0 correspondant à l'orbite du bord de D_k . Alors, si i et j sont de parités différentes, quitte à multiplier X par une fonction strictement positive lisse appropriée et quitte à effectuer une isotopie autorisée de Σ^0 , on peut recoller (Θ_i, X, γ_i) sur (Θ_j, X, γ_j) .*

Démonstration Rappelons que Θ_i est homéomorphe à un cylindre $S^1 \times [0,1]$ le long duquel le champ est topologiquement équivalent à $\frac{\partial}{\partial z}$ où l'on met les coordonnées (θ, z) sur $S^1 \times [0,1]$. Pour cette équivalence topologique, on peut choisir l'homéomorphisme préservant l'orientation (puisque $(\theta, z) \mapsto (-\theta, z)$ préserve $\frac{\partial}{\partial z}$) (l'orientation de Θ_i est son orientation comme bord).

Le segment γ_i^0 est un segment plongé, allant du bord d'entrée de Θ_i au bord de sortie, tout en étant transverse au champ X , c'est-à-dire aux génératrices du cylindre. A travers l'homéomorphisme précédent, γ_i^0 est donc une courbe paramétrée $(\theta(t), z(t))$ par $t \in [0,1]$ où $\theta(t)$ est soit strictement croissant, soit strictement décroissant, où $z(0) = 0, z(1) = 1$ et enfin tel que, si $\theta(t_1) = \theta(t_2)$ avec $t_2 > t_1$, alors $z(t_1) > z(t_2)$ (on appellera (*) ces conditions sur $\theta(t)$ et $z(t)$).

On peut considérer un voisinage collier \mathcal{C}_i de Θ_i dans M^0 tel que \mathcal{C} est disjoint des variétés invariantes de K et où l'on a alors la situation produit : \mathcal{C} est homéomorphe à $\Theta_i \times [0,1]$ (on note u la nouvelle coordonnée), le champ X est topologiquement équivalent à $\frac{\partial}{\partial z}$ sur \mathcal{C} et Σ^0 coupe \mathcal{C} selon $\gamma_i^0 \times [0,1] = \{(\theta(t), z(t), u) / (t, u) \in [0,1]^2\}$.

Remarquons maintenant que l'ensemble des couples $(\theta(t), z(t))$ qui vérifient les conditions (*) a deux composantes connexes : l'une où θ est strictement croissant, l'autre où θ est strictement décroissant. En particulier, si θ est croissant, on peut, sur Θ_i , isotoper γ_i^0 sur la courbe γ_{canon}^+ paramétrée par $(\theta(t) = \frac{t}{2}, z(t) = t)$, l'isotopie étant transverse aux génératrices. Si θ est décroissant, on peut isotoper γ_i^0 sur la courbe γ_{canon}^- paramétrée par $(\theta(t) = -\frac{t}{2}, z(t) = t)$.

Dans l'un et l'autre des cas, on dira que γ_i^0 lui-même est croissant ou décroissant.

On peut prolonger l'isotopie entre γ_i^0 et γ_{canon}^\pm en une isotopie de Σ^0 à supporte dans \mathcal{C} , transverse à X . Cette isotopie est alors bien de type autorisé : on reste transverse à X , le support de l'isotopie est inclus dans \mathcal{C} qui est disjoint des variétés invariantes de K et les composantes de bords de Σ^0 sont bien respectées.

Si γ_i^0 et γ_j^0 sont l'un croissant l'autre décroissant, alors on peut recoller $(\Theta_i, X, \gamma_i^0) \simeq (S^1 \times [0,1], \frac{\partial}{\partial z}, \gamma_{canon}^+)$ sur $(\Theta_j, X, \gamma_j^0) \simeq (S^1 \times [0,1], \frac{\partial}{\partial z}, \gamma_{canon}^-)$ par $-Id$ (rappelons que si Θ_i et Θ_j sont munis de leurs orientations comme bord de M^0 , il faut les recoller par un difféomorphisme renversant l'orientation pour obtenir une variété orientable).

Pour montrer la proposition, il nous suffit de montrer que γ_i^0 est croissant ou décroissant selon la parité de i . Rappelons alors que β_i^0 joint γ_i^0 à γ_{i+1}^0 . Alors, pour tout i , l'existence d'une surface Σ^0 transverse à X , s'appuyant sur β_i^0 , sur γ_i^0 et γ_{i+1}^0 prouve que l'un des segments γ_i^0 ou γ_{i+1}^0 est croissant et que l'autre est décroissant (voir figure 4.17). De

proche en proche, ceci implique que γ_i^0 ou γ_j^0 sont tous deux croissants ou décroissants si et seulement si i et j sont de même parité. \square

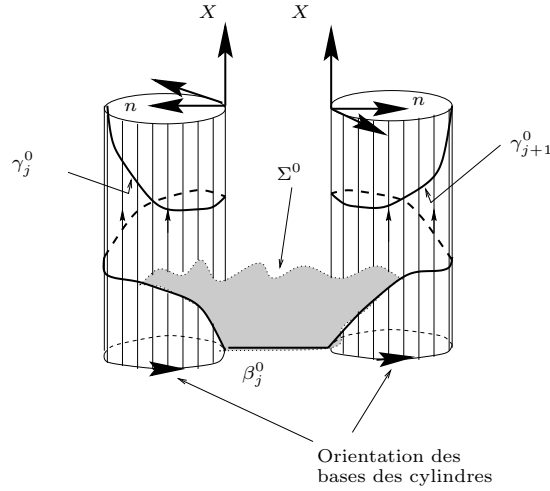


FIG. 4.17 – Un cylindre gauche-droite et un cylindre droite-gauche voisins

On regroupe alors par couple les cylindres bords de M^0 en alternant les parités et on colle l'un sur l'autre les deux cylindres d'un couple en recollant les champs et les traces de Σ^0 grâce au lemme précédent. On obtient ainsi un nouveau voisinage filtrant M' obtenu en attachant n anses à M . Ces anses sont attachées sur les D_j qui sont dans des composantes d'entrée et de sortie de \mathcal{C} .

D'autre part, les segments β_j^0 étaient tracés sur des sphères du bord de M . Les composantes d'entrée et de sortie de M^0 sont donc des couronnes et les β_j^0 vont d'un bord d'une couronne à l'autre. Les composantes du bord de M' que l'on a créé par recollement sont donc formées de couronnes recollées en cycles. Ce sont donc des tores. Les β_j^0 recollés en cycles dessinent un cercle plongé non-homotopie à 0 sur chacun de ces tores.

La surface Σ^0 donne lieu à une surface transverse Σ dans M' . Puisqu'on tué les γ_j^0 en les recollant les uns sur les autres, le bord de Σ est réduit à P_1 et aux cercles créés par recollement bouts-à-bouts les β_j^0 .

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.68. \square

Démonstration de la proposition 4.69 Soient M' et Σ le voisinage filtrant et la surface transverse à bord essentiellement polygonal construits à la proposition 4.68. On note C_{ess} la moitié du voisinage tubulaire \mathcal{C} comprise entre P_1 et P .

L'ensemble des composantes de $\Sigma \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$ se divisent en deux sous-ensembles :

- les composantes qui sont dans C_{ess} .
- les autres qui sont, par construction, contiennent toutes un point de P_2 donc se projettent le long du flot sur les composantes d'entrée et de sortie de \mathcal{C} .

Remarques

— C_{ess} est bordé par deux vrais polygones (donc par des segments de $W^s(K)$ et $W^u(K)$). Par conséquent, toute composante de $\mathcal{R}_\infty \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$ est soit incluse dans C_{ess} , soit disjointe de C_{ess} .

— Soit A une composante de $M' \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$. Alors $A \cap C_{ess}$ n'est composé que d'un nombre fini de composantes de $\mathcal{R}_\infty \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$. En effet, les composantes de $(\mathcal{R}_\infty \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))) \cap A$ forment en fait une orbite de composante de $\mathcal{R}_\infty \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$ pour l'application f . On remarque alors que l'orbite de tout point x de A sort de M' en temps fini alors que toute composante de $C_{ess} \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$ est entièrement incluse dans M' , ce qui montre l'affirmation.

— Comme P est accumulé du côté de C_{ess} , aucune composante de $\mathcal{R}_\infty \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$ n'a de segment de P dans son bord.

— Soit A une composante de $M' \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$. Alors les deux points précédents montrent que $A \cap C_{ess}$ n'est pas adhérente à P .

Soient donc un nombre fini de composantes A_1, \dots, A_r de $M' \setminus (W^s(K) \cup W^u(K))$. On suppose que A_1, \dots, A_r n'intersecte aucune composante d'entrée de \mathcal{C} . D'après la dichotomie ci-dessus, $(A_1 \cup \dots \cup A_r) \cap \Sigma$ est donc inclus dans C_{ess} . D'après la dernière remarque ci-dessus, il existe un demi voisinage tubulaire C'_{ess} inclus dans C_{ess} , bordé par P et par un polygone P'_1 tel que C'_{ess} est disjoint de A_1, \dots, A_r .

Comme, dans la construction de Σ , on peut choisir le voisinage tubulaire C aussi fin que l'on veut, on peut donc trouver $\Sigma' \subset \Sigma$ (déduite de Σ en remplaçant simplement C_{ess} par C'_{ess}) qui vérifie donc les propriétés de Σ et qui n'intersecte pas les composantes A_1, \dots, A_r . \square

Fin de la preuve de la proposition 4.53

On utilise maintenant les propositions 4.63, 4.64, 4.66, 4.68 et 4.69 pour montrer la proposition 4.53.

Démonstration de la proposition 4.53

• On note $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ les cycles de Γ . On va construire à l'aide de la proposition 4.68 une suite de voisinage filtrants M_1, \dots, M_n tels que M_i contient des surfaces à bord essentiellement polygonaux pour les i premiers cycles $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_i$:

Étape 0 - On part de $M_0 = \widetilde{M}$ le modèle de K . Remarquons que la condition 3 implique que M_0 est séparé pour Γ . D'autre part, M_0 est, par définition, vierge par rapport à tous les cycles de Γ , Γ^s et Γ^u .

Étape 1 - La proposition 4.68 nous fournit alors un voisinage filtrant M_1 déduit de M_0 en attachant des anses à des composantes d'entrée de \mathcal{C}_1 . Cette proposition nous fournit simultanément, dans M_1 , une surface transverse à bord essentiellement polygonal Σ_1 coupant les orbites périodiques bords impliquées dans le cycle \mathcal{C}_1 .

Le voisinage filtrant M_1 est déduit de M_0 en n'attachant des anses que sur des composantes d'entrée de \mathcal{C}_1 ; on en déduit que M_1 est séparé pour Γ^s , Γ^u et Γ et vierge par rapport à $\mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ et par rapport à tout cycle de Γ^s et Γ^u . Les composantes d'entrée et de sortie de \mathcal{C}_1 dans M_1 sont des tores et chacun de ces tores porte un unique cercle plongé non-homotope à 0 qui est une composante de bord de Σ_1 .

Supposons maintenant qu'il existe une suite de points x_n coins tels que le segment d'orbite de x_n de longueur T_n situé de part et d'autre de x_n ne rencontre pas Σ_0 et tel que $T_n \rightarrow +\infty$. Soit alors x un point d'adhérence de la suite x_n .

— Soit x un point qui n'est pas un coin non-périodique. Alors tout segment d'orbite de longueur τ_0 de x coupe l'intérieur de Σ_0 et on aboutit à une contradiction par continuité du flot.

— Soit x est un point coin non-périodique. Mais alors x est un point hétérocline, intersection d'une séparatrice stable d'une orbite périodique s-bord \mathcal{O}^s et d'une séparatrices instable d'une orbite périodique u-bord \mathcal{O}^u . L' α -limite et l' ω -limite de x sont donc réduites respectivement à \mathcal{O}^s et \mathcal{O}^u . Par ailleurs, l'intérieur de Σ_0 coupe toute orbite périodique bord, donc en particulier, \mathcal{O}^s et \mathcal{O}^u . On en déduit qu'il existe τ_i tel que l'intérieur de Σ_0 coupe tout segment de longueur τ_i de l'orbite x . Par continuité du flot on aboutit à une nouvelle contradiction.

Par conséquent, il existe un temps τ tel que tout segment d'orbite de longueur τ coupe l'intérieur de Σ^0 □

Σ_0 est une union infinie de surfaces transverses à bords essentiellement polygonaux dont les intérieurs coupent tout segment d'orbite K . On peut extraire de Σ_0 une union finie Σ de surfaces ayant la même propriété. Pourvu que l'on garde dans Σ les surfaces construites pour les cycles de Γ , Γ^s et Γ^u , le bord de Σ trace bien, comme l'exige la proposition, un unique cercle plongé non-homotope à 0 sur chaque composante de bord de M .

Ceci achève la preuve de la proposition 4.53 et donc de la deuxième implication du théorème 4.10. □

Appendice A. Types géométriques réalisables et types géométriques de genres finis

Le but de cette dernière partie du chapitre est de montrer le corollaire 4.4, c'est à dire de montrer que la seule obstruction à la réalisabilité d'un type géométrique est la non-finitude de son genre. Pour cela, nous utilisons une caractérisation des types géométriques de genres finis due à Bonatti et Jeandenans ([BLJ, chapitre 7]) et la caractérisation des types géométriques réalisables que nous avons obtenue au théorème 4.2.

Remarque L'implication réciproque (c'est-à-dire "réalisable \Rightarrow genre fini") est immédiate. Considérons en effet un type géométrique T réalisable pour les difféomorphismes : il existe un difféomorphisme hyperbolique f d'une surface compacte S , un ensemble selle saturé Λ de f et une partition de Markov \mathcal{R} de Λ de type géométrique T . On peut voir \mathcal{R} comme une partition de la suspension (X, K) de (f, Λ) . La proposition 5.5.1 de [BLJ] implique que la partition \mathcal{R} est automatiquement essentielle. Par suite, pour tous p et q , la surface $\mathcal{R}_{p,q}$ associée à T se plonge dans S et, par conséquent, le type géométrique T est de genre fini.

On fixe, pour la section, un type géométrique T transitif (ou sans double-bord).

On considère une variété compacte \mathcal{M} , un champ hyperbolique X sur \mathcal{M} , un ensemble selle K (transitif ou sans double bord) de X et un voisinage filtrant M de K tels qu'il existe une partition ample essentielle \mathcal{R} de K dans M de type géométrique T . On voit alors la surface \mathcal{R}_∞ associée à T comme l'union $\bigcup_{\mathbb{Z}} X^k(R)$ où R est l'union des rectangles de \mathcal{R} . On note f l'application de retour sur \mathcal{R}_∞ .

On notera Σ^u la surface de sortie associée à T . Rappelons que, à une isotopie de $\partial_2 M$ le long du flot près, on peut voir Σ^u comme l'union $\bigcup_{x \in \bar{A}} X^{\psi^u(x)}(x)$ où $\bar{A} = \text{adh}(R \setminus f^{-1}(R))$ et où ψ^u est une fonction qui vérifie les conditions $(\star\star)$ de la page 152. Ces conditions demandent en particulier que ψ^u vaille 1 sur $\partial^s R$ et 2 sur $\partial^s \bar{A} \setminus \partial^s R$. Par commodité, on supposera ici que ψ^u est uniformément égale à 2 sur les composantes de \bar{A} dont aucun des deux côtés stables n'est dans $\partial^s R$. En d'autres termes, les ponts seront ici les images par f^2 des composantes de \bar{A} qui ne rencontrent pas $\partial^s R$.

Obstructions et domaines fondamentaux autonomes couplés

Bonatti et Jeandenans ont introduit trois obstructions pour caractériser les types géométriques de genre fini. Je me permets de transcrire ces obstructions dans un langage légèrement différent mais immédiatement équivalent.

On appelle séparatrice s-bord de \mathcal{R}_∞ une composante connexe de l'intersection d'une séparatrice bord de $W^s(K)$ avec \mathcal{R}_∞ . Une telle séparatrice W n'est accumulée que d'un côté par $W^s(K)$ dans la surface orientable \mathcal{R}_∞ , ce qui la munit d'une orientation (dite "orientation de W comme bord") : un vecteur pointant vers le côté isolé de W suivi d'un vecteur tangent à W , dirigé suivant l'orientation comme bord de W , forment une base directe de \mathcal{R}_∞ .

On appelle arche instable de \mathcal{R}_∞ toute u-arche de K tracées \mathcal{R}_∞ , c'est à dire tout segment de $W^u(K) \cap \mathcal{R}_\infty$ d'intérieur disjoint de K et dont les deux extrémités sont dans K . Une arche instable γ de \mathcal{R}_∞ couple deux séparatrices (distinctes) W_1 et W_2 si les extrémités de γ sont sur W_1 et W_2 .

Obstruction 1 : *Une arche γ de \mathcal{R}_∞ a ses deux extrémités x et y sur une même séparatrices s-bord W de \mathcal{R}_∞ . Une autre arche γ' de \mathcal{R}_∞ a une extrémité et une seule sur W entre x et y .*

Obstruction 2 : *Une arche γ de \mathcal{R}_∞ a ses extrémités x et y sur des séparatrices W_1 et W_2 de \mathcal{R}_∞ . Une autre arche γ' de \mathcal{R}_∞ a ses extrémités x' et y' sur les même séparatrices W_1 et W_2 . Les extrémités x et x' sont dans le même ordre sur W_1 que les extrémités y et y' sur W_2 (l'ordre est donné par les orientations comme bords des séparatrices W_1 et W_2).*

Obstruction 3 : *Une arche γ de \mathcal{R}_∞ couple une séparatrice W_1 de \mathcal{R}_∞ à une séparatrice W_2 de \mathcal{R}_∞ . Une autre arche γ' de \mathcal{R}_∞ couple la séparatrice W_1 à une séparatrice W_3 . Les séparatrices W_1 , W_2 et W_3 sont deux-à-deux distinctes.*

L'énoncé suivant caractérise les types géométriques de genre fini. Il correspond au sens direct du théorème 7.4.8 et au corollaire 7.8.1 dans [BLJ].

Théorème 4.73 (Bonatti, Jeandenans) *Un type géométrique abstrait T est de genre fini si et seulement si il ne présente aucune des obstructions 1, 2, 3 décrites ci-dessus.*

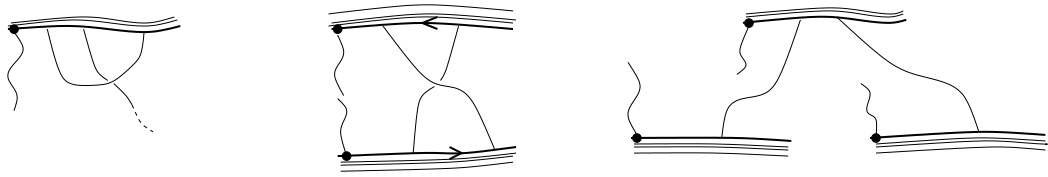


FIG. 4.18 – Les obstructions 1, 2 et 3

Nous aurons également besoin d'un résultat intermédiaire de la caractérisation de Bonatti-Jeandenans (proposition 7.6.8 dans [BLJ]). Pour énoncer ce résultat intermédiaire, introduisons les définitions suivantes :

Soit W une séparatrice s-bord de \mathcal{R}_∞ de période q (pour f). On appelle domaine fondamental de W tout intervalle I de la forme $I = [x, f^q(x)]^s$ sur W . Soit maintenant W_1, \dots, W_n plusieurs séparatrices s-bords de \mathcal{R}_∞ et soient I_1, \dots, I_n des domaines fondamentaux de ces séparatrices. On dit que (I_1, \dots, I_n) est un système de *domaines fondamentaux autonomes couplés* si toute arche qui a un pied sur $I_1 \cup \dots \cup I_n$ a, en fait, ses deux pieds sur $I_1 \cup \dots \cup I_n$.

Proposition 4.74 (Bonatti, Jeandenans) *Si le type géométrique T ne présente aucune des obstructions 1, 2, 3, alors le triplet (X, K, \mathcal{R}) admet un système de domaines fondamentaux autonomes couplés.*

On suppose dorénavant le type géométrique T de genre fini. Par suite, T vérifie les conclusions du théorème 4.73 et de la proposition 4.74.

On peut déjà noter quelques conséquences de l'absence d'obstructions 1, 2 et 3. Rappelons que, suivant que l'orientation comme bord d'une séparatrice s-bord de \mathcal{R}_∞ est dirigée vers le point périodique de cette séparatrice ou le fuit, on dit que la séparatrice est gauche ou droite. Les deux points du lemme suivant sont alors des conséquences directes respectivement de l'absence d'obstruction 2 et de l'absence d'obstruction 3.

Lemme 4.75 *Soient W_1 et W_2 deux séparatrices s-bords de \mathcal{R}_∞ qui sont couplées.*
 — W_1 et W_2 sont nécessairement une séparatrice gauche et une séparatrice droite. En particulier, W_1 et W_2 ne sont pas dans la même orbite de séparatrice de \mathcal{R}_∞ .
 — Pour tout i , la séparatrice $f^i(W_1)$ n'est couplée qu'avec la séparatrice $f^i(W_2)$. Par suite, W_1 et W_2 ont même période (sous l'action de f).

Remarque Ces propriétés impliquent immédiatement qu'on peut choisir un système de domaines fondamentaux autonomes couplés de (X, K, \mathcal{R}) tels que, si I est l'intervalle porté par la séparatrice W , alors $f^i(I)$ est l'intervalle porté par la séparatrice $f^i(W)$.

Par ailleurs, quitte à remplacer tous les intervalles d'un système de domaines fondamentaux autonomes couplés par leurs images par une puissance commune de f , on peut supposer que ces intervalles sont arbitrairement proches des points périodiques bords.

Enfin, il est clair qu'on peut toujours supposer que les intervalles d'un système de domaines fondamentaux autonomes couplés ont toutes leurs extrémités dans K .

Position de la lamination \mathcal{L}^u par rapport à la surface Σ^u

L'absence d'obstructions 1, 2, 3 se traduit en partie sur la lamination \mathcal{L}^u . Pour relier l'absence de telles obstructions à la caractérisation des types réalisables, on doit donc comprendre la position des feuilles de la lamination \mathcal{L}^u par rapport aux différentes composantes de la surface Σ^u (rappelons que $\mathcal{L}^u = (W^u(K) \cap \partial_2 M) \subset (\text{Sat}(R) \cap \partial_2 M) = \Sigma^u$).

Lemme 4.76 *Soit x un point d'une feuille non-compacte de \mathcal{L}^u . On suppose que x est dans un cycle de tours de Σ^u . Alors une des deux demi-feuilles de \mathcal{L}^u partant de x est entièrement incluse dans ce cycle de tours.*

Démonstration Les tours sont des projections le long du flot de sous-rectangles horizontaux de rectangles de la partition \mathcal{R} . Toute composante d'intersection de $W^u(K)$ avec un tel sous-rectangle est un segment allant d'un côté stable à l'autre; par suite, toute composante d'intersection d'une feuille de \mathcal{L}^u avec une tour de Σ^u est un segment joignant le toit au pied. On conclut en utilisant simplement que le pied d'une tour d'un cycle est entièrement inclus dans le toit de la tour suivante du cycle. \square

En utilisant le lemme 4.76 et le fait que toute demi-feuille non-compacte de \mathcal{L}^u spirale sur une feuille compacte, on montre facilement la première affirmation du corollaire suivant. La seconde sera montrée bientôt.

Corollaire 4.77 *Tout cycle de tours de Σ^u contient une feuille compacte de \mathcal{L}^u , cette feuille étant homotope à l'âme du cycle. Par ailleurs, tout cycle de tours ne rencontre qu'une seule feuille compacte de \mathcal{L}^u .*

Ce corollaire nous invite à parler de *demi-cycle de tours*: par définition, ce sera une des moitiés d'un cycle de tours découpé le long de la feuille compacte qu'il contient. On appellera également *demi-toit*; ce sera :

- soit une moitié des deux moitiés du toit d'une tour coupé au point d'intersection avec une feuille compacte de \mathcal{L}^u ,
- soit un toit entier qui ne rencontre pas de feuille compacte de \mathcal{L}^u .

Comme les toits des tours sont orientés, on parlera de demi-cycles *gauches* et *droits* et de demi-toits *gauches* et *droits*.

Arches de \mathcal{R}_∞ couplant des séparatrices bords de \mathcal{R}_∞ et segments de feuilles de \mathcal{L}^u couplant des toits de Σ^u

Pour traduire l'absence d'obstructions 1, 2, 3 sur la lamination \mathcal{L}^u et la surface Σ^u , nous allons définir une application entre des segments des séparatrices s-bords de \mathcal{R}_∞ et les toits des tours de Σ^u .

Rappelons d'abord qu'un barreau horizontal d'un rectangle R_i de \mathcal{R} est une composante connexe de $W^s(K) \cap R_i$. C'est par conséquent un segment qui joint les deux côtés instables de R_i . Par ailleurs, notons que, la partition \mathcal{R} étant ample, les côtés stables de R_i ne sont pas des barreaux verticaux.

On doit alors remarquer que les deux barreaux horizontaux extrémaux de R_i (c'est-à-dire les barreaux horizontaux de R_i qui sont les plus proches des côtés horizontaux de R_i) sont nécessairement portés par des feuilles bord de $W^s(K)$. De plus, les barreaux

horizontaux extrémaux de \mathcal{R} contiennent tous les points périodiques bords de $K \cap R$: en effet, un point périodique a une séparatrice instable libre (donc disjointe de $W^s(K)$) donc est nécessairement situé sur un barreau horizontal extrémal.

On peut alors définir les deux applications suivantes :

Notation 4.78 Soit δ un barreau horizontal extrémal d'un rectangle R_i et soit $\tilde{\delta}$ le côté horizontal de R_i correspondant (c'est-à-dire que δ est le barreau horizontal de R_i le plus proche de $\tilde{\delta}$). Rappelons que l'image par $X^1 = f$ de $\tilde{\delta}$ est le toit d'une tour de Σ^u ; on notera $\hat{\delta}$ ce toit. Rappelons par ailleurs R_i est muni d'un feuilletage instable trivial en segments qui prolonge la lamination $W^u(K) \cap R_i$.

On définit l'application $x \mapsto \tilde{x}$ de δ sur $\tilde{\delta}$ simplement par le fait que x et \tilde{x} sont sur la même feuille du feuilletage instable de R_i (voir figure 4.19).

On définit ensuite l'application $x \mapsto \hat{x}$ de δ sur $\hat{\delta}$ par la formule $\hat{x} = f(\tilde{x})$ (voir figure 4.19).

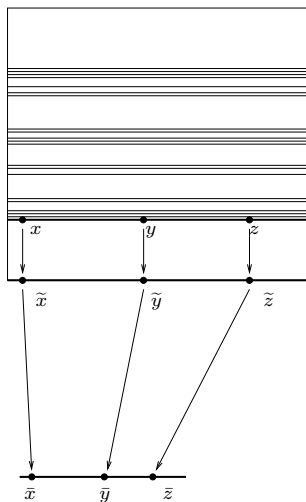


FIG. 4.19 – Les applications $x \mapsto \tilde{x}$ et $x \mapsto \hat{x}$

Si I est un segment d'un barreau extrémal, on notera \tilde{I} et \hat{I} ses images par les applications ci-dessus. Les applications $x \mapsto \tilde{x}$ et $x \mapsto \hat{x}$ sont bien sûr bijectives et monotones.

L'application $x \mapsto \hat{x}$ envoie un point périodique bord sur un point d'intersection d'un toit de Σ^u avec une séparatrice instable libre donc sur un point d'intersection d'un toit de Σ^u avec une feuille compacte de \mathcal{L}^u . On en déduit qu'un cycle de tour ne contient qu'une seule feuille compacte de \mathcal{L}^u , ce qui montre la seconde affirmation du corollaire 4.77.

On en déduit également que la réciproque de l'application $x \mapsto \hat{x}$ envoie un demi-toit sur un segment d'une séparatrice bord de \mathcal{R}_∞ . On parlera donc de *séparatrice bord de \mathcal{R}_∞ associée à un demi-toit*.

Remarquons, par ailleurs, la propriété suivante qui est immédiate mais sera importante :

Propriet Deux points x et y sur des séparatrices bords de \mathcal{R}_∞ sont joints par une u -arche de \mathcal{R}_∞ dès que les points \tilde{x} et \tilde{y} sont joints par un segment de $W^u(K) \cap \mathcal{R}_\infty$ disjoint de K .

On a de plus le lemme suivant :

Lemme 4.79 *Soit T et T' deux demi-tours de Σ^u telles que le demi-pied de T' est posé sur le demi-toit de T . On suppose que le demi-toit de T est associé à la séparatrice s -bord W de \mathcal{R}_∞ . alors le demi-toit de T est associé à la séparatrice W . Alors le demi-toit de T' est associé à la séparatrice $f^{-1}(W)$*

Démonstration Les tours T et T' sont les projections de sous-rectangles horizontaux A et A' de rectangles de \mathcal{R} . Ces sous-rectangles ne contiennent aucun point de K donc aucun barreau horizontal de \mathcal{R} . Le barreau horizontal de R_i le plus proche du toit de A est donc également le barreau horizontal le plus proche du toit de A . Le pied de T' est l'image par f^2 du pied de A' . Le toit de T est l'image par f du toit de A . Le barreau horizontal le plus proche du pied de A' est donc l'image par f^{-1} du barreau horizontal le plus proche du toit de A \square

Les deux lemmes suivants nous permettent maintenant de comprendre la relation entre la disposition de la lamination \mathcal{L}^u par rapport à la surface Σ^u et les couplages de séparatrices s -bord par des arches de \mathcal{R}_∞ .

Lemme 4.80 *Soit γ un segment de feuille de \mathcal{L}^u qui va d'un point \hat{x} pied d'un pont P à un point \hat{y} de l'autre pied du même pont P . Alors les points x et y sont joint par une u -arche de \mathcal{R}_∞*

Démonstration Le segment $f^{-1}(\gamma)$ est un segment de $W^u(K) \cap \mathcal{R}_\infty$ joignant \tilde{x} à \tilde{y} . Il suffit alors d'utiliser la propriété énoncée ci-dessus. \square

Lemme 4.81 *Soient I et J deux segments appartenant à un système de domaines fondamentaux autonomes couplés de (X, K, \mathcal{R}) et tels que la séparatrice qui porte I est couplée à la séparatrice qui porte J . Supposons qu'il existe un segment γ d'une feuille de \mathcal{L}^u joignant un point $\hat{x} \in \hat{I}$ à un point $\hat{y} \in \hat{J}$. Alors il existe une u -arche de \mathcal{R}_∞ joignant $x \in I$ à $y \in J$.*

Démonstration On peut projeter le segment γ sur \mathcal{R}_∞ le long du flot avec la condition supplémentaire que la projection de \hat{x} soit le point $f^{-1}(\hat{x}) = \tilde{x} \in \tilde{I} = f^{-1}(\hat{I})$. Par cette projection, \hat{y} est projeté sur un point de l'orbite de \tilde{J} . Mais la projection de γ est incluse dans une u -arche de \mathcal{R}_∞ et aucune arche de \mathcal{R}_∞ ayant une extrémité sur I ne peut avoir son autre sur $f^k(J)$ si $k \neq 0$ (car I et J font partie d'un système de domaines fondamentaux autonomes couplés). Ceci conclut. \square

Plongement de \mathcal{L}^u dans des couronnes et disques fermés

On a maintenant tout le matériel de traduction nécessaire et on peut commencer à énoncer les conséquences sur la surface Σ^u de l'absence d'obstructions.

On dira que deux demi-cycles sont *couplés* s'il existe une feuille non-compacte de \mathcal{L}^u qui rencontre ces deux demi-cycles. D'après le lemme 4.76 et le corollaire 4.77, deux demi-cycles sont couplés si et seulement si une feuille non-compacte de \mathcal{L}^u spirale sur les deux côtés correspondant des feuilles compactes qui bordent ces demi-cycles. Par ailleurs, appelons *empilement de tours* une suite non-cyclique de tours T_1, \dots, T_n telle que le pied de T_i est posé sur le toit de T_{i+1} . Appelons alors *demi-cycle enrichi* l'union d'un demi-cycle de tours et de tous les empilements de tours qui ont leur pied sur ce demi-cycle. Alors, il est clair que deux demi-cycles sont couplés si et seulement si il existe un pont qui a un pied sur chacun des demi-cycles enrichis correspondant.

Des lemmes 4.75, 4.79 et 4.80, on déduit alors facilement le corollaire suivant :

Corollaire 4.82 *Tout demi-cycle de tours est couplé avec au plus un autre demi-cycle de tours. Deux demi-cycles de tours couplés comportent le même nombre de tours. Un demi-cycle droit ne peut être couplé qu'avec un demi-cycle gauche.*

On aura besoin d'une information un peu plus précise sur la position d'une feuille non-compacte de \mathcal{L}^u par rapports aux toits de Σ^u . Cette information est donnée par le lemme qui suit.

Soit T le toit d'une tour d'un cycle et soit \hat{x} un point d'intersection de ce toit avec une feuille non-compacte \mathcal{L} de la lamination \mathcal{L}^u . D'après le lemme 4.76, une des deux moitiés \mathcal{L}^+ de la feuille \mathcal{L} partant de x est incluse dans le cycle de tours. De plus, la demi-feuille \mathcal{L}^+ spirale autour de l'âme du cycle de tours. On a donc un premier point \hat{y} où la demi-feuille \mathcal{L}^+ recoupe le toit T . Je laisse le lecteur se convaincre de l'affirmation suivante :

Lemme 4.83 *Si q est le nombre de tours dans le cycle de tours, on a $\hat{y} = \widehat{f^q(x)}$.*

On peut maintenant commencer à montrer des résultats de plongements de la lamination \mathcal{L}^u et de la surface Σ^u :

Soient C et C' deux feuilles compactes de \mathcal{L}^u telles que le côté droit de C est couplé au côté gauche de C' . Le corollaire 4.82 indique, si une des extrémités d'une feuille non-compacte de \mathcal{L}^u spirale sur le côté droit de C ou le côté gauche de C' , alors, en fait, les deux extrémités de cette feuille spiralent sur le côté droit de C ou le côté gauche de C' . Ceci nous incite à parler de la *partie de \mathcal{L}^u comprise entre C et C'* : par là, on entend l'union de C , C' et de l'ensemble des feuilles non-compacte qui spiralent sur le côté droit de C ou le côté gauche de C' .

Lemme 4.84 *La partie de \mathcal{L}^u comprise entre C et C' se plonge dans une couronne bordée par C et C' .*

Démonstration On note A et A' les demi-cycles qui sont respectivement la moitié droite du cycle de tours de Σ^u contenant C et la moitié gauche du cycle de tours contenant C' . On considère alors deux demi-toits δ et δ' des demi-cycles C et C' et on note W et W' les séparatrices s-bord de \mathcal{R}_∞ correspondant à δ et δ' . Quitte à changer δ en un autre demi-toit du demi-cycle C , on peut remplacer W par $f^i(W)$ pour tout i (lemme 4.79). quitte à faire ce changement, on peut donc supposer que W et W' sont couplées.

On choisit alors deux domaines fondamentaux $I = [x_1, f^q(x_1)[$ et $I' = [x_2, f^q(x_2)[$ de W et W' . On peut supposer que l'application $x \mapsto \hat{x}$ est définie sur I et sur I' (voir la remarque suivant le lemme 4.75) et on note \hat{I} et \hat{I}' les images de I et I' par cette application. On peut également supposer que les extrémités de I et I' sont dans K , ce qui revient à supposer que les extrémités de \hat{I} et \hat{I}' sont sur des feuilles de \mathcal{L}^u .

Le lemme 4.83 indique que les deux extrémités de \hat{I} sont en fait sur une même feuille \mathcal{L} de \mathcal{L}^u et que les segment de \mathcal{L} allant d'une extrémité à l'autre ne coupe pas l'intérieur de \hat{I} . On note alors \mathcal{C} le domaine inclus dans A , homéomorphe à une couronne et compris entre la feuille compacte C , le segment \hat{I} et le segment de la feuille \mathcal{L} allant d'une extrémité de \hat{I} à l'autre. De même, on construit $\mathcal{C}' \subset A'$ bordé par C' , par \hat{I}' et par un segment d'une feuille \mathcal{L}' joignant une extrémité de \hat{I}' à l'autre.

Toute feuille non-compacte situé dans la partie de \mathcal{L}^u comprise entre C et C' n'a qu'une partie compacte situé hors de $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$. Cette partie compacte est bien sûr un segment allant de $\hat{I} \cup \hat{I}'$ à $\hat{I} \cup \hat{I}'$. Par ailleurs, le lemme 4.81 et la monotonie de l'application $x \mapsto \hat{x}$ nous permet de traduire l'absence d'obstructions 1 et 2 pour les arches de \mathcal{R}_∞ qui couplent I et I' en une absence d'obstructions analogues pour les segments de feuilles de \mathcal{L}^u qui couplent \hat{I} et \hat{I}' . Plus précisément, on a les propriétés suivantes :

Soient γ et γ' deux segments de feuille de \mathcal{L}^u joignant $\hat{I} \cup \hat{I}'$ à $\hat{I} \cup \hat{I}'$.

- a) Si γ a ses deux extrémités x et y sur un même des deux segments \hat{I} ou \hat{I}' et si γ' a une de ses extrémités entre x et x , alors γ a ses deux extrémités entre x et y .
- b) Si maintenant γ et γ' ont tout deux une extrémité sur \hat{I} et une sur \hat{I}' . Alors les ordres de ces extrémités sur \hat{I} et \hat{I}' orientés par l'orientation des toits sont les mêmes (les séparatrices W et W' sont l'une gauche et l'une droite donc leurs orientations comme bord et l'orientation des toits correspondant ne coïncide que pour l'une d'entre elles).

Il est facile de voir que les propriétés a) et b) suffisent à ce que la partie de \mathcal{L}^u situé entre A et A' et privée de la partie des feuilles incluse dans \mathcal{C} et \mathcal{C}' se plonge dans un rectangle joignant \hat{I} à \hat{I}' . Par suite, la partie de \mathcal{L}^u situé entre A et A' se plonge dans une couronne bordée par A et A' (voir la figure 4.20). \square

Soit maintenant C est une feuille compacte de \mathcal{L}^u dont le bord droit n'est couplé à aucun autre. On appelle partie de \mathcal{L}^u située à droite de C l'union de C et des feuilles non-compactes qui spiralent (nécessairement à leurs deux extrémités) sur C . Exactement les mêmes techniques que celle du lemme précédent montrent :

Lemme 4.85 *La partie de \mathcal{L}^u située à la droite de C se plonge dans un disque fermé D dont le bord est égal à la feuille compacte C .*

On montre évidemment la même chose pour la partie de \mathcal{L}^u située à gauche d'une feuille compacte non-couplée à gauche.

Le type T vérifie la caractérisation des types géométriques réalisables

On doit enfin prouver que Σ^u se plonge dans une union de tores \mathcal{T} et qu'il existe sur \mathcal{T} des cercles deux-à-deux disjoints, qui intersectent Σ^u selon l'union des toits de Σ^u et qui peuvent être orientés de façon compatible avec les orientations de ces toits (voir le théorème 4.2).

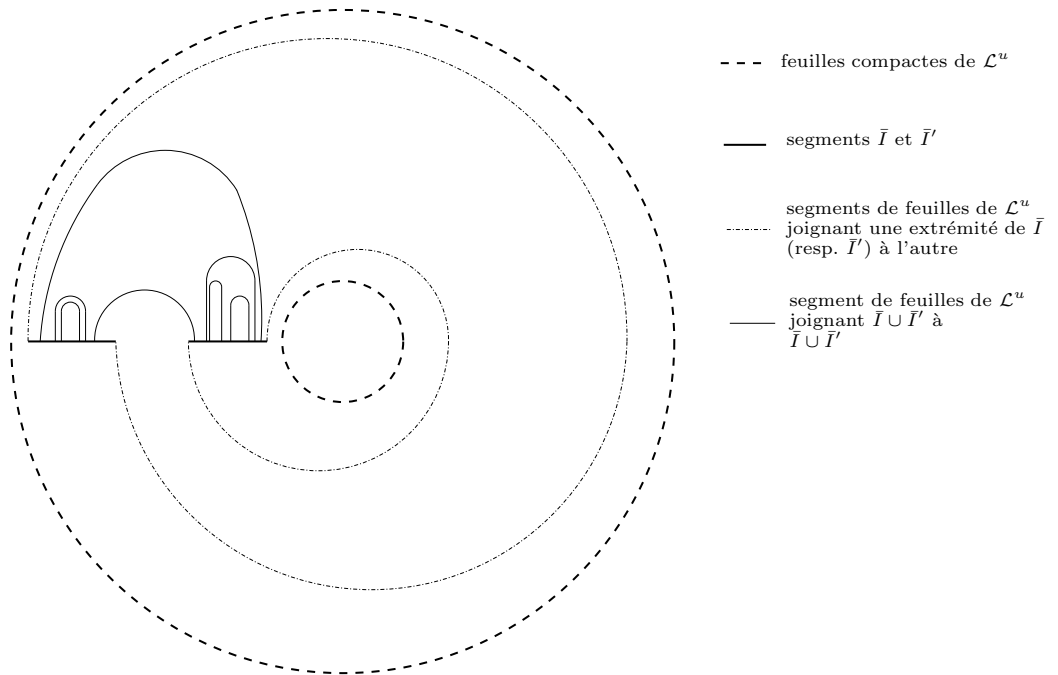


FIG. 4.20 – La partie de \mathcal{L}^u comprise entre deux feuilles compactes se plonge dans une couronne fermée dont les bords sont les deux feuilles compactes

Le coeur de la démonstration est la proposition suivante :

Proposition 4.86 *Soit Σ une composante connexe de Σ^u . Il existe un tore T dans lequel se plonge Σ et tel que, pour toute composante S de $\text{adh}(T \setminus \Sigma)$, le bord de S porte autant d'extrémités droites de toits de tours de Σ que d'extrémités gauches.*

Schma de démonstration D'après le corollaire 4.82, la composante Σ de Σ^u contient n cycles de tours A_1, \dots, A_n tels que le demi-cycle droit de A_i est couplé au demi-cycle gauche de A_{i+1} (et n'est couplé qu'à ce demi-cycle). La seule ambiguïté réside dans ce que le demi-cycle droit de A_n peut être couplé au demi-cycle gauche de A_1 ou pas. Les cycles A_1, \dots, A_n comportent chacun, d'après le même corollaire, le même nombre q de tours. Nous allons supposer que le demi-cycle gauche de A_1 et le demi-cycle droit de A_n ne sont pas couplés. De le cas contraire, il suffit de simplifier la preuve que nous allons donner. On notera C_1, \dots, C_n les feuilles compactes contenues dans les cycles A_1, \dots, A_n .

On peut considérer un système de domaines fondamentaux autonomes couplés de toutes les séparatrices bords correspondant aux demi-toits des tours de A_1, \dots, A_n . On peut de plus supposer que ce système de domaines fondamentaux est de la forme :

$$I_i, \dots, f^{q-1}(I_i), I'_i, \dots, f^{q-1}(I'_i), \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

où les $f^k(I_i)$ correspondent au demi-toits gauches de A_i , où les $f^k(I'_i)$ correspondent au demi-toits droits de A_i et où $f^k(I'_i)$ est couplé à $f^k(I_{i+1})$.

Les demi-toits des tours des cycles A_i sont alors recouverts par les $\widehat{f^k(I_i)}$ et $\widehat{f^k(I'_i)}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $i \leq n$. Étant donné un point x d'un toit d'un des cycles A_i , on appelle hauteur de x l'entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in \widehat{f^k(I_i)}$ ou $x \in \widehat{f^k(I'_i)}$ (suivant que x est sur le demi-toit

gauche ou droit).

Lemme 4.87

— Soit P un pont de Σ^u et γ un côté vertical de ce pont. Alors, (quitte à modifier un peu le systèmes de domaines fondamentaux en gardant les propriétés ci-dessus,) les deux extrémités de γ sont à la même hauteur.

— Soit T une tour de Σ^u et γ un côté vertical de cette tour. Si le pied de γ est à hauteur k alors le toit de γ est à hauteur $k - 1$.

Démonstration Tout d’abord, pour tout segment γ d’une feuille de \mathcal{L}^u allant d’un pied du pont P à l’autre, les deux pieds de γ sont à la même hauteur : ceci provient directement du lemme 4.80 et de la définition de la hauteur. Pour qu’une affirmation identique soit vrai avec un côté vertical de P (qui n’est jamais un segment de feuille de \mathcal{L}^u), il suffit éventuellement de changer un peu le systèmes de domaines fondamentaux autonomes couplés utilisés, les nouveaux domaines ayant, un-à-un, les mêmes points d’intersection avec K que les anciens.

Le second point du lemme se montre comme le lemme 4.79. □

Remarquons déjà que, lorsqu’on parcourt une composante de bord de Σ les façons de changer de hauteur sont :

- monter du pied au toit d’une tour le long d’un côté vertical ou descendre du toit au pied (on monte ou on descend alors d’un étage),
- passer par une extrémité d’un segment $\widehat{f}^k(I_i)$ ou $\widehat{f}^k(I'_i)$ en restant sur le toit d’une tour (on monte ou on descend alors de q étages d’un coup).

On appellera *point spécial* un point x du bord de Σ tel que x est l’extrémité d’un segment $\widehat{f}^k(I_i)$. on est amené à étudier la disposition de ces points

On notera maintenant S_i la partie de Σ comprise entre le côté droit de C_i et le côté gauche de C_{i+1} . On notera S^g la partie de Σ située à gauche de C_1 et S^d la partie situé à droite de C_n .

Lemme 4.88

Le bord de S^g porte exactement un point spécial. De même, pour S^d .

D’autre part, chaque composante du bord de S_i porte soit aucun soit deux points spéciaux. Dans ce dernier cas, les points spéciaux sont l’un sur un toit du demi-cycle droit de A_i enrichi, l’autre sur un toit du demi-cycle gauche de A_{i+1} enrichi.

Schma de démonstration Remarquons d’abord que l’on peut orienter les composantes du bord de S^g de façon à toujours parcourir les toits selon leur orientation (car aucun pont n’est “twisté”). En parcourant le bord de S^g , on ne passe donc par des points spéciaux que dans le sens allant de $f^k(I_1)$ vers $f^{k+q}(I_1)$, c’est-à-dire en montant de q étages à chaque fois. On remarque, par ailleurs, que lorsque l’on parcourt le bord de S^g selon cette orientation, si k est le nombre de tours qui rencontrent S_g , on monte le long des côtés verticaux de k tours et on descend le long des côtés verticaux de $k - q$ tours (toutes les tours du cycle C_1 n’ont que leur côté vertical gauche dans S^g). Comme la somme

algébrique des étages montés et descendu est bien sûr nulle après un tour (on revient au même point), on en déduit le premier point du lemme.

Un raisonnement analogue au précédent (en parcourant, non pas le bord de S_i , mais le bord du demi-cycle droit enrichi de C_i et celui du demi-cycle gauche enrichi de C_{i+1}) montre que le bord de S_i porte au plus deux points spéciaux, l'un sur le bord du demi-cycle droit enrichi de C_i et l'autre sur le bord du demi-cycle gauche enrichi de C_{i+1} (mais on ne peut obtenir mieux directement car le bord de S_i est strictement inclus dans les bords de ces demi-cycles enrichis).

Il faut alors se convaincre qu'il existe dans \mathcal{M} , pour tout k un segment disjoint de $W^s(K)$ et $W^u(K)$ joignant l'extrémité gauche de $f^k(\tilde{I}'_i)$ à l'extrémité gauche de $f^k(\tilde{I}'_{i+1})$: il suffit de "longer l'arche la plus proche joignant $f^k(\tilde{I}'_i)$ à $f^k(\tilde{I}'_{i+1})$ ". En projetant ce segment, on obtient un segment disjoint de \mathcal{L}^u joignant le point spécial de C_i à celui de C_{i+1} . On se convainc alors assez facilement (car toute composante de Σ^u est traversée de part en part par une feuille de \mathcal{L}^u) que soit ce chemin est inclus dans Σ^u , soit peut-être homotopé (à extrémités fixées) en un chemin d'extrémités disjointes Σ^u . Ceci suffit à conclure. \square

On poursuit la démonstration de la proposition 4.86 :

Nous allons maintenant construire, grâce aux lemmes 4.84 et 4.85 le tore T et le plongement de Σ dans T .

Rappelons que, pour tout $i \leq n-1$, la sous-partie S_i de Σ se plonge dans une couronne fermée Γ_i bordée par le bord droit de A_i et le bord gauche de A_{i+1} . D'autre part, S^g se plonge dans un disque Δ^g bordé par le côté gauche de C_1 . On obtient alors une couronne fermée Γ^g en ôtant à Δ^g un disque ouvert inclus dans la composante de $\Delta^g \setminus S^g$ qui contient le point spécial du bord de S^g (voir lemme précédent). La partie S^g de Σ se plonge dans Γ^g et Γ^g est bordée par le bord gauche de C_1 et par un cercle que l'on notera C^g . Le cercle C^g est dans la même composante de $\Gamma^g \setminus S^g$ que le point spécial. De même, on plonge S^d dans une couronne Γ^d bordée par C_n et un cercle C^d qui est dans la même composante de $\Gamma^d \setminus S^d$ que le point spécial du bord de S^d .

Le tore T est alors simplement obtenu en recollant $\Gamma^g, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ et Γ^d (on recolle Γ_{i-1} et Γ_i le long de C_i , on recolle Γ^g et Γ_1 le long de C_1 , on recolle Γ_{n-1} et Γ^d le long de C_n et on recolle Γ^g et Γ^d en recollant C^g sur C^d).

Par construction de T , le bord de chaque composante de $T \setminus \Sigma$ porte soit aucun, soit deux points spéciaux. Les éventuels deux points spéciaux du bord d'une composante de $T \setminus \Sigma$ sont toujours sur deux cycles enrichis différents.

On considère maintenant une composante S de $T \setminus \Sigma$. Nous allons parcourir le bord de S selon l'orientation que l'on a donné à ce bord. Après un tour, on revient au même point donc bien sûr à la même hauteur qu'au départ. La somme algébrique des étages montés et descendus est donc nulle. Rappelons que les moyens de changer de hauteurs lors du parcours du bord de S sont les suivants :

- 1) on descend d'un étage en passant du pied d'une tour à son toit,
- 1') on monte d'un étage en passant du toit d'une tour à son pied,

2) on monte ou on descend de q étages en passant par un point spécial suivant le sens de passage.

Par ailleurs, remarquons que lorsqu'on parcourt le bord de S suivant l'orientation de ce bord, on passe toujours du pied au toit d'une tour en passant par une extrémité droite de toit et on passe toujours du toit au pied d'une tour en passant par une extrémité gauche de toit (à moins que ce ne soit toujours le contraire).

Pour obtenir la proposition, il suffit qu'en parcourant le bord de S , on passe par un nombre pair de points spéciaux et autant de fois dans un sens que dans l'autre. Hors on a construit T tel que le bord de S porte soit aucun, soit deux points spéciaux. D'autre part, ces deux points spéciaux ne sont jamais sur le même demi-cycle enrichi. Je laisse le lecteur se convaincre que l'on parcourt toujours les toits d'un des demi-cycles enrichis suivant leur orientation et les toits de l'autre demi-cycle enrichi toujours a contrario de leur orientation (encore une fois, parce qu'il n'existe aucun pont "twisté"), ce qui suffit à conclure. \square

Je laisse la démonstration du lemme très simple suivant au lecteur.

Lemme 4.89 *Désignons par S soit un disque fermé, soit une couronne fermée (le bord de S est donc formé respectivement d'un ou deux cercles). Sur le bord de S , on suppose que sont disposés n points x_1, \dots, x_n et n points y_1, \dots, y_n , tous ces points étant deux-à-deux distincts.*

Alors, il existe une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ et n segments I_1, \dots, I_n tracés sur S , tels que I_i joint x_i à $y_{\sigma(i)}$ et tels que les segments I_1, \dots, I_n sont deux-à-deux disjoints.

Ce lemme nous permet d'achever la démonstration du corollaire 4.4.

Fin de la démonstration du corollaire 4.4 La surface Σ^u se plonge dans une union finie \mathcal{T} de tores (d'après la proposition 4.86). De plus, les âmes des cycles de tours de Σ^u sont non-homotopes à 0 dans \mathcal{T} donc l'adhérence de toute composante de $\mathcal{T} \setminus \Sigma^u$ est un disque fermé ou une couronne fermée. Par ailleurs, le bord d'une telle composante porte autant d'extrémités droites de toits que d'extrémités gauches. Le lemme 4.89 montre alors qu'il existe des segments plongés dans \mathcal{T} , deux-à-deux disjoints, d'intérieurs disjoints de Σ^u et joignant toujours une extrémité gauche d'un toit de Σ^u à une extrémité droite d'un toit.

L'union de ces segments et des toits des tours de Σ^u constitue une union de cercles sur \mathcal{T} qui vérifient exactement les conditions imposées par la caractérisation des types géométriques réalisables (théorème 4.2). On a donc achevé de montrer qu'un type géométrique de genre fini est réalisable. \square

Appendice B. La condition 3 traduite sur la surface Σ^u

Considérons un champ hyperbolique X , un ensemble selle transitif K de X et un voisinage filtrant M de K . Dans les parties 4.2 et 4.3, nous avons établi une condition (la condition 3 du théorème 4.10) nécessaire à ce que $[X, K]$ soit un germe de suspension et suffisante à ce que ce germe admette une section de Birkhoff. Cette condition porte sur

deux graphes construits à partir des laminations $\mathcal{L}^s = W^s(K) \cap \partial_1 M$ et $\mathcal{L}^u = W^u(K) \cap \partial_2 M$. Supposons maintenant que l'on dispose du type géométrique T d'une partition de Markov essentielle de K dans M . Le but de cet appendice est de traduire la condition 3 en une condition portant sur les surface Σ^s et Σ^u associées à T .

Remarque Les partitions de Markov ne sont pas des objets naturels pour caractériser les germes admettant des sections de Birkhoff. En effet, supposons que le germe $[X, K]$ admette une section de Birkhoff et considérons une partition de Markov \mathcal{R} de K . Alors, il existe une chirurgie (dite *chirurgie de Dehn*, voir [Fr82]), donnant lieu à un autre germe $[X', K']$, topologiquement équivalent à $[X, K]$ sauf le long d'une orbite périodique, tel que $[X', K']$ admet encore une section de Birkhoff, mais tel que \mathcal{R} ne peut plus être une partition de Markov de $[X', K']$ (les rectangles de \mathcal{R} ne sont pas transverses à X').

Par contre, traduire *a posteriori* la condition 3 en une condition sur les surface Σ^s et Σ^u associées à un type géométrique nous permet de nous ramener à des objets pour lesquels nous avons un procédé automatique simple de construction (voir la troisième définition de la surface Σ^u page 152).

Pour la traduction, nous allons bien sûr utiliser certains lemmes établis dans l'appendice précédent.

Rappelons d'abord que tout cycle de tours de Σ^u contient une feuille compacte de \mathcal{L}^u et une seule et que cette feuille est homotope à l'âme du cycle de tours (corollaire 4.77). Il est par ailleurs clair, en utilisant des arguments similaires à ceux du lemme 4.76 et du corollaire 4.77, que toute feuille compacte de \mathcal{L}^u est contenue dans un cycle de tours de Σ^u . On a bien sûr une relation similaire entre les feuilles compactes de \mathcal{L}^s et les cycles de tours de la surface Σ^s .

Ceci nous a permis de parler, dès l'appendice précédent, de demi-cycles de tours : un demi-cycle est une des moitiés d'un cycle découpé le long de la feuille compacte qu'il contient. L'orientation des toits des tours nous autorise à parler de demi-cycles gauches et droits.

Rappelons maintenant qu'un demi-cycle enrichi est l'union d'un demi-cycle de tours et des empilements de tours qui ont leurs pieds sur le demi-cycle. Deux demi-cycles enrichis sont alors dit couplés s'il existe un pont dont les deux pieds sont sur ces deux demi-cycles. On a déjà établi dans l'appendice précédent que deux demi-cycles sont couplés en ce sens si et seulement si les côtés de feuilles compactes correspondants sont couplés au sens de la définition 4.38.

On peut alors parler de composante connexe cyclique pour Σ^s et Σ^u . Une composante connexe cyclique est une suite (cyclique) de cycles de tours C_1, \dots, C_n tel que :

— le demi-cycle droit de C_i est couplé au demi-cycle gauche de C_{i+1} et n'est couplé qu'à ce demi-cycle,

— le demi-cycle droit de C_n est couplé au demi-cycle gauche de C_1 et n'est couplé qu'à ce demi-cycle.

Rappelons enfin que les graphes Γ^s et Γ^u ont été définis en ne tenant compte que des couplages entre un côté gauche de feuille compacte et un côté droit. Par conséquent,

deux composantes connexes distinctes de Γ^s correspondent toujours à deux composantes connexes distinctes de \mathcal{L}^s si et seulement si il n'y a aucun couplage entre les deux côtés droits de deux feuilles compactes distinctes de \mathcal{L}^s , ni entre les deux côtés gauches de deux feuilles compactes distinctes. De même pour Γ^u et \mathcal{L}^u .

La proposition suivante est démontrée par les remarques ci-dessus :

Proposition 4.90 *Soit X un champ de vecteurs défini sur un voisinage filtrant M d'un ensemble selle transitif K . Soit T le type géométrique d'une partition de Markov essentielle de K dont les rectangles sont inclus dans M . On note Σ^s et Σ^u les surfaces d'entrée et de sortie associées à T . Alors la condition 3 du théorème 4.10 est équivalente à la condition suivante portant sur les surfaces Σ^s et Σ^u :*

- *tout demi-cycle de tours n'est couplé qu'à au plus un autre demi-cycle de tours,*
- *un demi-cycle gauche ne peut être couplé qu'avec un demi-cycle droit,*
- *il existe autant de composantes connexes qui ne sont pas cycliques dans Σ^s que dans Σ^u ,*
- *toute composante connexe cyclique de Σ^s ou Σ^u est de genre 1, 1 et toute composante connexe qui n'est pas cyclique est de genre nul.*

Chapitre 5

Un algorithme pour le problème de conjugaison des difféomorphismes hyperboliques des surfaces

Le chapitre suivant est extrait de [Beg]. Je ne supprime pas les répétitions de certaines définitions déjà introduites dans les chapitres précédents, pour ne pas forcer un lecteur plus intéressé par les difféomorphismes des surfaces que par les flots en dimension 3 à lire ce qui précède.

On notera simplement que nous n'utiliserons ici que des partitions que nous avons appelées au chapitre 3 *ajustées* (ici *fitting* puisque le chapitre est en anglais) sans toujours le rappeler.

Classification of hyperbolic diffeomorphisms of compact surfaces

The theory of *subshifts of finite type*, developed by Bowen, has shown that the topological conjugacy class of a diffeomorphism restricted to a hyperbolic saturated set is characterized by the incidence matrix of a Markov partition — at least for 0-dimensional hyperbolic sets — (see, for instance, [Bow]). Nevertheless, this theory only deals with the action of the diffeomorphism on the hyperbolic set itself: one can easily find two hyperbolic sets admitting Markov partitions with the same incidence matrix and such that the underlying diffeomorphisms are not conjugate on any neighborhoods of these hyperbolic sets.

In the case of diffeomorphisms of compact orientable surfaces, one can enrich the combinatorics given by the incidence matrix of a Markov partition by using the orientation of the sides of the rectangles. Following ideas which were introduced in the context of pseudo-Anosov homeomorphisms, Bonatti and Langevin have defined the *geometrical type* of a good Markov partition. The geometrical type describes the order, the positions and the orientations of the intersections between the rectangles of the Markov partition and their images (a formal definition of geometrical type will be given in subsection 5.1.1).

Besides, for every 0-dimensional hyperbolic saturated set K of a hyperbolic diffeomorphism f acting on a compact surface S , Bonatti and Langevin have defined a canonical

(by such, we mean unique up to topological equivalence) invariant neighborhood of K , the *domain* $\Delta(f, K)$ of K (see [BLJ, chapter 3]). This domain is the interior of a polygon which is drawn on S and which vertices are some sinks and sources of f . It contains every good Markov partition of K .

With the above notations, it is proved in [BLJ] that the geometrical type of any good Markov partition of K characterizes the topological conjugacy class of f on the domain of K :

Theorem \star (Bonatti, Langevin) *Let f and g be two hyperbolic diffeomorphisms of compact orientable surfaces. Let K and L be 0-dimensional hyperbolic saturated sets of f and g and let us suppose that K and L admit good Markov partitions $\mathcal{M} = \{R_i\}_{i \leq n}$ and $\mathcal{N} = \{Q_i\}_{i \leq n}$ with the same geometrical type.*

Then f restricted to the domain $\Delta(f, K)$ is topologically conjugate to g restricted to the domain $\Delta(g, L)$ (via a homeomorphism which maps each rectangle R_i of \mathcal{M} on the corresponding rectangle Q_i of \mathcal{N} and preserves the orientations of the sides of these rectangles).

Remarque The case of 1 and 2-dimensional hyperbolic sets can be reduced to the 0-dimensional case thanks to “DA” operations (see [Sm67] for the definition of DA operations, [BLJ, section 2.3] for more details on this reduction and the appendix of chapter 1 in the context of 3-flows).

Thus, in this chapter, we will actually only consider hyperbolic diffeomorphisms with only 0-dimensional hyperbolic sets, that is only consider *Smale diffeomorphisms*.

By gluing the domains of the different hyperbolic sets of a Smale diffeomorphism along their boundaries, one reconstitutes the surface. The global topological equivalence class of a Smale diffeomorphism of a surface is thus characterized by the geometrical type of a Markov partition of the maximal saddle set and a gluing rule of the sides of the domain of that set.

One can split the work of classification of Smale diffeomorphisms in three problems:

(1) First, find some finite combinatorial presentations of the global topological conjugacy class of any Smale diffeomorphism of a compact orientable surface. As explained above, this was done by Bonatti and Langevin, essentially in terms of geometrical types.

(2) Then, among all abstract combinatorial presentations (say among abstract geometrical types) extract those which do correspond to existing dynamics. Bonatti and Jeandenans have given an efficient characterization of the geometrical types which are *realizable*, that is which are the geometrical types of Markov partitions of hyperbolic saturated sets of Smale diffeomorphisms of surfaces (see [BLJ] and [Jea]).

(3) Finally, decide which realizable combinatorial presentations correspond to the same dynamics (a hyperbolic set admits infinitely many fitting Markov partitions with different geometrical types). In order to be precise, let us define an equivalence relation:

Definition 5.1 *One will say that two realizable geometrical types T_1 and T_2 are equivalent if there exists a Smale diffeomorphism f acting on a compact surface, a hyperbolic*

saturated compact set K of f and two fitting Markov partitions \mathcal{M}_1 and \mathcal{M}_2 of K such that T_1 and T_2 are respectively the geometrical types of \mathcal{M}_1 and \mathcal{M}_2 .

The third problem consists in describing an algorithm which answers the following question: **Given two realizable geometrical types, are they equivalent or not ?** This is precisely the aim of the present article.

Remark An analogy with the problem of classification of diffeomorphisms in restriction to hyperbolic sets themselves may be useful:

— As already mentioned, the analog of problem (1) for the classification in restriction to hyperbolic sets was solved by Bowen's theory (the restriction of a diffeomorphism to a 0-dimensional hyperbolic set is conjugate to a subshift of finite type and is characterized by the incidence matrix of a Markov partition).

— Problem (2) (for dynamics on hyperbolic sets) corresponds to the works of Blanchard and Franks ([BlFr]) and of Fried ([Fr82]).

— Problem (3) (for dynamics on hyperbolic sets) was tackled by Williams [Wi74]. Williams gave an algebraic criterion to decide whether two matrices A and B lead to topologically conjugate subshifts or not (in the language of Williams, whether A and B are *strong shift equivalent* or not). Precisely, the matrices A and B are strong shift equivalent if and only if there exist some rectangular matrices R_1, \dots, R_n and S_1, \dots, S_n such that $A = R_1 S_1$, $S_1 R_1 = R_2 S_2$, $S_2 R_2 = R_3 S_3$, ..., $S_{n-1} R_{n-1} = R_n S_n$ and $B = S_n R_n$. Problem (3) for subshifts would be entirely solved if one could prove that strong shift equivalence was algorithmically decidable.

Statement of the main result of the chapter

The initial idea to solve the problem of equivalence of geometrical types is the following. A hyperbolic set admits infinitely many fitting Markov partitions with different geometrical types. One should first find a canonical finite set of fitting Markov partitions of any hyperbolic set K of a 2-diffeomorphism f (by *canonical*, we mean only depending on the topological conjugacy class of $f|_{\Delta(f,K)}$). Then, prove that the set of the geometrical types of these canonical Markov partitions can be constructed in an algorithmic way, given the geometrical type of any fitting Markov partition of K .

In practice, given a hyperbolic saturated set K , Bonatti and Langevin have proposed to construct some Markov partitions with the help of *Birkhoff primitive intersection points*. We will construct such a set of Markov partitions which we call *primitive Markov partitions*. The set $\mathcal{M}(f, K, p)$ of primitive Markov partitions actually depends on a parameter $p \in \mathbb{N}$ which has to be greater than a lower bound $p_{\min}(f, K)$. The set $\mathcal{M}(f, K, p)$ only contains a finite number of orbits of Markov partitions which give rise to a finite set of *primitive geometrical types* $\mathcal{T}(f, K, p)$.

The integer $p_{\min}(f, K)$ and the set of primitive geometrical types $\mathcal{T}(f, K, p)$ are canonically associated to f , K and p : if (g, L) is another couple such that $g|_{\Delta(g,L)}$ is topologically conjugate to $f|_{\Delta(f,k)}$ then $p_{\min}(f, K) = p_{\min}(g, L)$ and, for every $p \geq p_{\min}(f, K)$, $\mathcal{T}(g, L, p) = \mathcal{T}(f, K, p)$. As a consequence, if T is the geometrical type of any Markov

partition of K , theorem \star allows us to define the integer $p_{\min}(T) \equiv p_{\min}(f, K)$ and the set $\mathcal{T}(T, p) \equiv \mathcal{T}(f, K, p)$. The core of this article is to prove:

Theorem 5.2 *Let us denote by \mathcal{T}_n the set of realizable transitive geometrical types with n rectangles. We claim that:*

- if $T \in \mathcal{T}_n$ then $p_{\min}(T) \leq p_0(n) \equiv 50n^2$,
- for every $p \geq p_0(n)$, the function $\Pi_p : \mathcal{T}_n \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ is recursive.
 $T \mapsto \mathcal{T}(T, p)$

Let us briefly explain the vocabulary. A function is recursive¹ if it can be coded by what is usually called a *finite algorithm*. A realizable geometrical type is said to be *transitive* if it is the geometrical type of a Markov partition of a transitive hyperbolic saturated set (*that is* of a basic piece)².

Given any couple of realizable transitive geometrical types T_1 and T_2 , one may compare the two finite sets of primitive geometrical types $\mathcal{T}(T_1, p)$ and $\mathcal{T}(T_2, p)$. Remember that these sets of primitive geometrical types are canonical; the geometrical types T_1 and T_2 are equivalent if and only if, for every $p \geq \max(p_{\min}(T_1), p_{\min}(T_2))$, $\mathcal{T}(T_1, p) = \mathcal{T}(T_2, p)$. Notice that this is equivalent to the following (apparently weaker) condition: there exists $p \geq \max(p_{\min}(T_1), p_{\min}(T_2))$ such that $\mathcal{T}(T_1, p) \cap \mathcal{T}(T_2, p) \neq \emptyset$. Hence, theorem 5.2 has the following immediate corollary:

Corollary 5.3 *There is a finite algorithm which decides whether two transitive realizable geometrical types are equivalent or not.*

(In other words, there exists a recursive function Δ defined on the set of couples of realizable transitive geometrical types such that $\Delta(T_1, T_2) = 1$ if $T_1 \sim T_2$ and $\Delta(T_1, T_2) = 0$ otherwise.)

Remarks

— The algorithm has unfortunately an exponential complexity.

— Although not using the same terminology, Bonatti and Langevin have conjectured that the functions $T \mapsto p_{\min}(T)$ and $T \mapsto \mathcal{T}(T, p_{\min})$ were recursive. Whereas such a refinement is not necessary for our purpose, this would give a single, complete, algorithmically computable invariant. It seems that one could use some arguments which have the same flavour as ours in order to prove the recursivity of $T \mapsto p_{\min}(T)$. Nevertheless, the potential proof seems to be highly technical.

— If one carries on the comparison with the theory of subshifts, it should be remarked that, as far as we know, there does not exist any algorithm which decides whether two distinct matrices are associated to topologically conjugate subshifts or not (“are *strong*

¹Strictly speaking, a recursive function is a function from a subset of \mathbb{N}^p to a subset of \mathbb{N}^q . We may easily represent a geometrical type as a finite list of integers (see the remark page 224)

²The transitivity of geometrical types was assumed in theorem 5.2 in order to simplify the algorithm and the proofs. In appendix C, we will briefly describe the modifications of the algorithm which should be made in order to deal with non-transitive geometrical types at least in one case that we call the *no double-boundary case*.

shift equivalent or not”). Actually, a conjecture of Williams which implied that strong shift equivalence was algorithmically decidable was recently proved to be false by Kim and Roush (see [KiRo]). Hence, problem (3) can be solved for topological conjugacy on invariant neighbourhoods of limit sets (in dimension 2), whereas it is still not solved for topological conjugacy in restriction to limit sets themselves.

— One should mention some classifications of some natural subsets of the set of hyperbolic diffeomorphisms of surfaces. These classifications were essentially obtained by the “Russian school of low-dimensional hyperbolic dynamics” (essentially Aranson, Grines, Kalay, Plykin, Zhironov). Using some specific techniques, these authors have given some complete invariants or some classification algorithms for a number of partial cases (gradient-like diffeomorphisms of surfaces, some special Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces, 1-dimensional hyperbolic attractors of surfaces,...) (see, among many other articles, [ArGr],[Gri],[GrKa]).

The most “dynamically rich” case is certainly the case of hyperbolic attractors which were classified by Zhironov following some works of Williams ([Zhi],[Wi70-2]). One may notice that the classification of hyperbolic attractors or repellers can be reduced to a special case of our classification by using “DA techniques”. These techniques will be explained in appendix D in the case of pseudo-Anosov homeomorphisms.

— It seems that the techniques developed for the proof of theorem 5.2 may be applied to find an algorithmic construction of many others “geometrically defined” finite sets of geometrical types.

Pseudo-Anosov homeomorphisms

As a sequel of theorem 5.2, we will obtain an algorithmic classification of pseudo-Anosov homeomorphisms. Notice that some efficient classifications of pseudo-Anosov homeomorphisms (using some different combinatorial presentations) were already announced by Fehrenbach, following results of Los (see [Lo96] and [Feh]) and by Mosher with some improvement of Masur-Minsky ([Mo95],[MaMi]). See also the previous works of Hemion ([Hem]) and Mosher ([Mo86]).

Recall that a homeomorphism f of a surface S is a pseudo-Anosov homeomorphism if there exists two transverse measured foliations \mathcal{F}^s and \mathcal{F}^u on S with finitely many k -prongs singularities ($k \geq 3$), such that $f(\mathcal{F}^s) = \lambda\mathcal{F}^s$ and $f(\mathcal{F}^u) = \lambda^{-1}\mathcal{F}^u$ for some $\lambda < 1$.

The Nielsen-Thurston theorem ([Thu], [FLP]) states that each class of the mapping class group of a compact surface S has a canonical representative which is either periodic, or reducible, or pseudo-Anosov. Two isotopic pseudo-Anosov homeomorphisms are topologically conjugate.

It was already proved in [FLP] that pseudo-Anosov homeomorphisms admit Markov partitions. The rectangles of the Markov partitions constructed in [FLP] are outlined by the separatrices of the singularities of the stable and unstable foliations. Our techniques actually oblige us to consider only such Markov partitions:

Definition 5.4 *We will say that a Markov partition of a pseudo-Anosov homeomor-*

phism is adapted if the sides of all the rectangles of this Markov partition are included in the separatrices of the singularities of the stable and unstable foliations.

Although the rectangles of the Markov partitions of a pseudo-Anosov homeomorphism are not disjointed, we may define their geometrical types exactly as for fitting Markov partitions of 0-dimensional basic pieces of Smale diffeomorphisms. Now, it is a corollary of theorem \star that the geometrical type of a Markov partition characterizes a pseudo-Anosov homeomorphism up to topological conjugacy³. Hence, geometrical types of adapted Markov partitions constitute finite combinatorial presentations of pseudo-Anosov homeomorphisms. In appendix D, we will sketch the proof of the following proposition:

Proposition 5.5 *Let f and g be two pseudo-Anosov homeomorphisms and let T_1 and T_2 be the geometrical types of adapted Markov partitions of f and g .*

The homeomorphisms f and g are topologically conjugate if and only if, for every $p \geq \min(p_{\min}(T_1), p_{\min}(T_2))$, the sets of geometrical types $\mathcal{T}(T_1, p)$ and $\mathcal{T}(T_2, p)$ coincide.

(Remember that the condition of the proposition is equivalent to the following one: there exists $p \geq \min(p_{\min}(T_1), p_{\min}(T_2))$, such that $\mathcal{T}(T_1, p) \cap \mathcal{T}(T_2, p) \neq \emptyset$). Proposition 5.5 and theorem 5.2 directly imply the following corollary:

Corollary 5.6 *There exists a finite algorithm which decides whether two pseudo-Anosov homeomorphisms f and g yielded by geometrical types of adapted Markov partitions are topologically conjugate or not.*

This gives a complete algorithmic classification of pseudo-Anosov homeomorphisms. Nevertheless, pseudo-Anosov homeomorphisms are usually not yielded by geometrical types of adapted partitions but by actions on the fundamental group or by train-tracks. The links between these different points of view will be briefly discussed in appendix D (see also [Lo97]).

Organisation of the chapter

In section 5.1, we define the set of primitive geometrical types $\mathcal{T}(f, K, p)$. In practice, we construct the primitive Markov partitions of the set $\mathcal{M}(f, K, p)$ thanks to the squaring drawn by $W^s(K) \cup W^u(K)$. Now, the geometrical types of the set $\mathcal{T}(f, K, p)$ are just the geometrical types of the Markov partitions of the set $\mathcal{M}(f, K, p)$.

The goal of the remainder of the chapter is to prove the algorithmicity of $T \mapsto \mathcal{T}(T, p)$ (theorem 5.2), *that is* to mimic the construction of $\mathcal{M}(f, K, p)$ on an abstract framework (without the help of f, K, \dots). The proof of theorem 5.2 is divided in three steps.

The results of section 5.2 may be considered as preliminary results. It is proved that one actually does not need the whole squaring $W^s(K) \cup W^u(K)$ in order to construct $\mathcal{T}(f, K, p)$. On the contrary, one can determine *a priori* a finite set of stable and unstable segments, such that the construction of $\mathcal{T}(f, K, p)$ only involves segments of this finite

³This fact can also be proved directly, *that is* without using theorem \star .

set. These segments will be called s and u-chains. From this step onwards, we will be working within the sets of s-chains and u-chains. In this sense, we will be working within a finite framework.

Section 5.3 has two goals. First, to prove that the framework defined in section 5.2 only depends on the geometrical type T and not on f, K, \dots . Secondly, to prove that the construction of $\mathcal{T}(T, p)$ can be performed by an algorithm provided that s and u-chains are pre-defined data-structures and provided that some elementary manipulations of s and u-chains are pre-defined functions (these elementary manipulations will be called cc-elementary functions) (theorem 5.57).

Finally, in section 5.4, we code s and u-chains as 4-uples or 6-uples of integers and binary symbols, and we prove that the cc-elementary functions are recursive functions (theorem 5.73).

Theorem 5.2 will be implied by theorem 5.57 and theorem 5.73. In some sense, in section 5.3, we do not want to take care of details: we suppose that some elementary functions were pre-defined and we write the algorithm using these elementary functions. In section 5.4, we prove that these elementary functions are recursive.

In appendix B, we will show some figures representing the construction of primitive Markov partitions for Smale's horseshoe. In appendix D, it is explained why our algorithm solves the conjugacy problem for pseudo-Anosov homeomorphisms as well.

5.1 Geometrical construction of the set of primitive Markov partitions $\mathcal{M}(f, K, p)$

The aim of this section is to construct the primitive Markov partitions associated to a diffeomorphism f and a basic piece K of f . This construction will define the sets $\mathcal{M}(f, K, p)$ and $\mathcal{T}(f, K, p)$. In subsection 5.1.1, we first define the notion of fitting Markov partition of a hyperbolic set and the notion of geometrical type of a fitting Markov partition.

Remarque — Here, we translate the french adjective *ajuste* used in the previous chapters by *fitting*. Notice that the *fitting Markov partitions* we use are just called *good Markov partitions* in [BLJ].

— As we will only use *fitting* Markov partitions in this chapter, we will sometimes forget the adjective.

Fitting Markov partitions are collections of embedded rectangles which sides are segments of stable and unstable manifolds. In subsection 5.1.2, we will enumerate five conditions which are always satisfied by the families of stable and unstable sides of a fitting Markov partition of a basic piece K .

A basic piece K admits infinitely many Markov partitions with distinct geometrical types. In subsection 5.1.3, using some particular leaves of $W^s(K)$ and $W^u(K)$ and some particular intersection points of these leaves, we will construct a finite number of orbits of Markov partitions of K ; namely, the primitive Markov partitions of the set $\mathcal{M}(f, K, p)$.

The five necessary conditions of subsection 5.1.2 will guide us all along the construction process.

5.1.1 Geometrical type of a Markov partition

In this subsection, we explain what we mean by a *fitting Markov partition* and what is the *geometrical type* of such a Markov partition. We consider a Smale diffeomorphism f acting on an oriented compact surface S and a 0-dimensional basic piece K of f .

Note All along the paper, the surfaces will be oriented. Moreover, by *0-dimensional basic piece*, we will always mean a 0-dimensional *saddle-like* basic piece, *that is* 0-dimensional basic piece which is not a periodic orbit of sinks or sources.

We will call *fitting rectangle* R an embedding h of $I \times J$ in S , where I and J are segments of \mathbb{R} (maybe reduced to one point), such that

$$h(\partial I \times J) \subset W^u(K) \text{ and } h(I \times \partial J) \subset W^s(K).$$

The *stable sides* (we may also say *horizontal sides*) of R will be the two segments which constitute $\partial^s R = h(I \times \partial J)$. The *unstable sides* of R (we may also say *vertical sides*) will be the two segments which constitute $\partial^u R = h(\partial I \times J)$.

We will always assume that a rectangle R is provided with two C^0 , trivial foliations \mathcal{F}^s and \mathcal{F}^u such that every leaf of \mathcal{F}^s or \mathcal{F}^u is C^1 , such that \mathcal{F}^s is transverse to \mathcal{F}^u , such that the two horizontal sides of R are two leaves of \mathcal{F}^s and such that the two vertical sides of R are two leaves of \mathcal{F}^u . In particular, every leaf of \mathcal{F}^s is a segment joining the two vertical sides of R and every leaf of \mathcal{F}^u is a segment joining the two horizontal sides of R .

We will also assume that the stable sides of R are provided with an orientation. Notice that, as the surface S is supposed to be oriented, this automatically induces an orientation of the vertical sides of R .

We will call *horizontal subrectangle* of R any rectangle H included in R such that $\partial^u H \subset \partial^u R$ and $\partial^s H$ is made of two leaves of \mathcal{F}^s . Similarly, we will call *vertical subrectangle* of R any rectangle V included in R such that $\partial^s V \subset \partial^s R$ and $\partial^u V$ is made of two leaves of \mathcal{F}^u .

Definition 5.7 A *fitting Markov partition* of K will be a finite collection of disjointed rectangles $\{R_i\}_{i=1..n}$, such that:

- $K = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^k(\bigcup_{i=1}^n R_i)$.
- for every i and j , every connected component of $f(R_i) \cap R_j$ is both a horizontal subrectangle of $f(R_i)$ and a vertical subrectangle of R_j (see figure 5.1),
- the foliations \mathcal{F}^s and \mathcal{F}^u of the R_i 's are invariant by f and there exists a metric such that the norm of the vectors which are tangent to \mathcal{F}^s is uniformly contracted by f and the norm of the vectors which are tangent to \mathcal{F}^u is uniformly expanded by f .

The connected components of $f^{-1}(R \cap f(R))$ (where $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$) will be called the *fundamental horizontal subrectangles* of R and the connected components of $R \cap f(R)$ will be called the *fundamental vertical subrectangles* of R .

The third item of the definition implies that the foliations \mathcal{F}^s and \mathcal{F}^u of a rectangle R_i of a fitting Markov partition are continuing the laminations $W^s(K) \cap R_i$ and $W^u(K) \cap R_i$. In particular, every leaf of $W^s(K) \cap R_i$ is a segment joining the two unstable sides of R_i and every leaf of $W^u(K) \cap R_i$ is a segment joining the two stable sides of R_i .

Important remark The definition of a fitting Markov partition (and the assumptions $h(\partial I \times J) \subset W^u(K)$ and $h(I \times \partial J) \subset W^s(K)$ in the definition of a rectangle) implies that for every $i \leq n$, $\partial^s f(R_i) \subset \partial^s R$ and $\partial^u R_i \subset \partial^u f(R)$ (see also lemma 3.8).

It is known that every hyperbolic saturated set of a compact surface diffeomorphism admits fitting Markov partitions as defined above. A constructive proof that we will use in subsection 5.1.3 can be found in [BLJ, chapter 4]. Nevertheless, the mere existence of fitting Markov partitions is a classical fact; see, for example [BiWi, lemma 2.3].

Remark The problem which is studied in the present paper arises from the fact that hyperbolic sets admit infinitely many Markov partitions with distinct geometrical types.

We want to extract a finite combinatorial information from a fitting Markov partition $\mathcal{M} = \{R_i\}$: the way $f(R_i)$ intersects the different R_j 's, *that is* along how many vertical subrectangles, which ones, in which order and with which orientation.

Definition 5.8 *The geometrical type of $\mathcal{M} = \{R_i\}$ consists in the following combinatorial data (we denote by R the union $\bigcup_{i=1}^n R_i$):*

- the number n of rectangles in \mathcal{M} ,
- for each $i \leq n$, the number h_i of connected components of $f^{-1}(R \cap f(R_i))$ (by definition of a fitting Markov partition, these components are horizontal subrectangles of R_i ; let us enumerate these subrectangles $H_i^1, \dots, H_i^{h_i}$ according to the orientation of the vertical sides of R_i),
- for each $i \leq n$, the number v_i of components of $R_i \cap f(R)$ (these are vertical subrectangles of R_i which we will enumerate $V_i^1, \dots, V_i^{v_i}$ according to the orientation of the horizontal sides of R_i),
- the unique bijection $\Phi : \{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, h_i\}\} \rightarrow \{k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, v_k\}\}$ defined by $\Phi(i, j) = (k, l)$ if f maps H_i^j to V_k^l ,
- the unique function $\varepsilon : \{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, h_i\}\} \rightarrow \{+, -\}$ mapping (i, j) to $+$ or $-$ according to whether f preserves or reverses the orientation of the vertical leaves when restricted to H_i^j .

Remarks

— In order to associate a unique geometrical type to a fitting Markov partition \mathcal{M} , we have supposed that \mathcal{M} was endowed with an indexation of its rectangles and some orientations of the horizontal sides of these rectangles.

If \mathcal{M} is only given as a collection of rectangles (without any indexation of these rectangle and without any orientation of the sides of these rectangles), we associate to it $2^n n!$ geometrical types (*a priori*, some of these geometrical types may be equal). These geometrical types correspond to all the possible indexations of the rectangles ($n!$) and to all

the possible orientation of the sides of the rectangles (2^n). They can be deduced one from another by the action of the permutations of $\{1, \dots, n\}$ and by reversing the indexations of the sets $\{1, \dots, h_i\}$ and $\{1, \dots, v_i\}$ for certain values of $i \leq n$ (see subsection 3.2.1).

— A geometrical type can be considered as a finite list of integers. For instance, let us code “−” as 0 and “+” as 1 and the function Φ (resp. ε) as the list of the images of the couples $(i, j) \in \{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1 \dots, h_i\}\}$.

In all our figures, horizontal sides will be oriented from left to right and vertical sides from bottom to top. Besides, given a rectangle R , the orientations of the sides of R will allow us to speak of left, right, bottom and top: left and right are defined such that horizontal segments are oriented from left to right, bottom and top are defined such that vertical segments are oriented from bottom to top. The left, right, bottom and top sides of R will be denoted by $\partial^l R, \partial^r R, \partial^b R, \partial^t R$ respectively.

Examples

— The geometrical type of the one rectangle partition of Smale’s horseshoe is: $n = 1, h_1 = v_1 = 2, \Phi(1, 1) = (1, 1), \varepsilon(1, 1) = +$

$$\Phi(1, 2) = (1, 2), \varepsilon(1, 2) = -$$

— The geometrical type of the Markov partition of figure 5.1 is $n = 2, h_1 = 2, h_2 = 3, v_1 = 2, v_2 = 3, \Phi(1, 1) = (1, 1), \varepsilon(1, 1) = +$

$$\Phi(1, 2) = (2, 3), \varepsilon(1, 2) = -$$

$$\Phi(2, 1) = (2, 1), \varepsilon(2, 1) = +$$

$$\Phi(2, 2) = (2, 2), \varepsilon(2, 2) = -$$

$$\Phi(2, 3) = (1, 2), \varepsilon(2, 3) = +$$

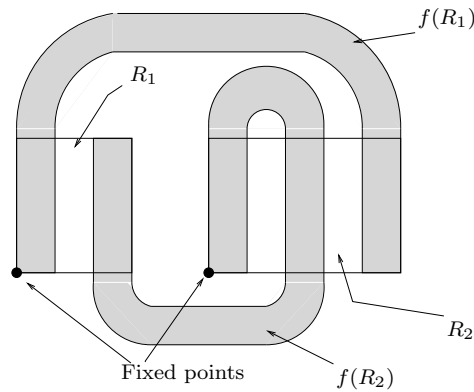


Figure 5.1: A fitting Markov partition

In section 5.4, we will need the following proposition concerning fitting Markov partitions of saturated sets. This proposition is actually a step of the proof of theorem \star and corresponds to [BLJ, proposition 5.5.1].

Proposition 5.9 *Let \mathcal{M} be a fitting Markov partition of a basic piece of a Smale diffeomorphism of surface. Let us denote by R the union of the rectangles of \mathcal{M} . If p and q are two integers such that $q \geq p$, then the intersection $f^q(R) \cap R$ is contained in $f^p(R) \cap R$.*

One may reformulate proposition 5.9 as follows: if the positive orbit of a point of R jumps out of R , then it will never come back to R .

5.1.2 Properties of the sides of the rectangles of a fitting Markov partition

We are going to enumerate five necessary conditions for families of stable and unstable segments to be the sides of the rectangles of a fitting Markov partition. Namely, we consider a Smale diffeomorphism f acting on a compact surface S and a 0-dimensional basic piece K of f . We fix a fitting Markov partition $\mathcal{M} = \{R_i\}_{i=1..n}$ of K and we denote by \mathcal{G} (resp. \mathcal{H}) the family of all the stable (resp. unstable) sides of the R_i 's. The aim of the subsection is to find some properties that are always satisfied by \mathcal{G} and \mathcal{H} .⁴

Let us first recall (see the “important remark” page 223) that the definition of a fitting Markov partition implies that the families \mathcal{G} and \mathcal{H} are respectively positively and negatively invariant by f , that is $f(\tilde{\mathcal{G}}) \subset \tilde{\mathcal{G}}$ and $f^{-1}(\tilde{\mathcal{H}}) \subset \tilde{\mathcal{H}}$, where $\tilde{\mathcal{G}}$ and $\tilde{\mathcal{H}}$ are the unions of the segments of \mathcal{G} and \mathcal{H} .

In order to be more precise about the nature of the segments constituting \mathcal{G} and \mathcal{H} , we need the notion of boundary leaf of the invariant laminations $W^s(K)$ and $W^u(K)$. We first remark that every leaf of $W^s(K)$ or of $W^u(K)$ locally disconnects the surface S (this is a fundamental particularity of saddle-like sets in dimension 2). This allows us to speak of the two sides of a leaf of $W^s(K)$ or of $W^u(K)$ and to state the following:

Definition 5.10 *A leaf \mathcal{L} of $W^s(K)$ is said to be a s-boundary leaf if it is accumulated by $W^s(K)$ at most on one side (see figure 5.2). One can define similarly the notion u-boundary leaf.*

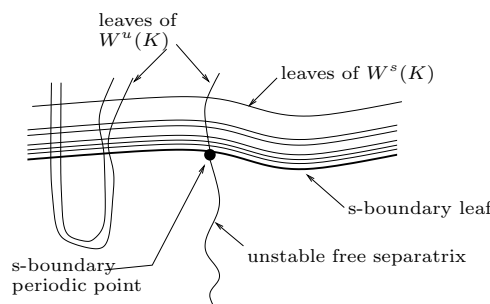


Figure 5.2: One s-boundary leaf

It is equivalent to say that \mathcal{L} is a s-boundary leaf or to say that there exists a non-trivial segment I transverse to \mathcal{L} such that I has one end on \mathcal{L} and $int(I)$ is disjointed of $W^s(K)$.

⁴The five necessary properties that we will prove in the present subsection are formally independent of the construction of $\mathcal{M}(f, K, p)$ and independent of the proof of theorem 5.2 as well. We include these properties to shed light on the construction of $\mathcal{M}(f, K, p)$.

Important remark The transitivity of K implies that if one leaf of $W^s(K)$ is not accumulated by $W^s(K)$ then every leaf of $W^s(K)$ is not accumulated by $W^s(K)$. A similar remark holds for $W^u(K)$. As a consequence, we have the following dichotomy: either K is reduced to a single periodic orbit of saddle points, or every leaf of $W^s(K)$ (resp. $W^u(K)$) is accumulated by $W^s(K)$ (resp. $W^u(K)$).

The first case of the dichotomy is trivial: if K is reduced to a single orbit of saddle points, the only fitting Markov partition of K is the partition which (degenerate) rectangles are the points of the orbit themselves. Hence, we will now assume that we are in the second case of the dichotomy.

In particular, a boundary leaf of K is accumulated exactly on one side. We point out that this clearly implies that every rectangle of every fitting Markov partition of K is *non-degenerate* (*that is* is not reduced to a segment or a point).

Lemma 5.11 is crucial for the construction of Markov partitions. (The main ideas involved in this lemma are due to S. Newhouse and J. Palis and can be found in [NePa, proposition 1]. A proof of the lemma itself can be found in [BLJ, proposition 2.1.1]). We first give some terminology:

— A *separatrix* of the stable (or unstable) manifold $W^s(x)$ of a periodic point x of K is one of the connected components of $W^s(x) \setminus \{x\}$.

— A *free stable or unstable separatrix* of a periodic point x is a stable or unstable separatrix of x which is disjoint of K .

Lemma 5.11 *Let K be a basic piece of a diffeomorphism of a compact surface. The following properties hold:*

(i) *K has only finitely many s and u -boundary leaves. (On the other hand, each 0-dimensional basic piece of K has at least one stable and one unstable boundary leaf.)*

(ii) *Every s -boundary leaf of K is the stable manifold of a periodic point x of K . Moreover this point x has a free unstable separatrix. Similarly, every u -boundary leaf of K is the unstable manifold of a periodic point y of K . Moreover this point y has a free stable separatrix.*

(iii) *Conversely, every point that has a free stable or unstable separatrix is a periodic u or s -boundary point.*

We will now prove that the segments of \mathcal{G} and \mathcal{H} are segments of s and u -boundary leaves (see also lemma 3.9). More precisely, for each segment G of \mathcal{G} , if G is a stable side of the rectangle R_i , we will call *interior* side of G , the side on which R_i lies and we will call *exterior* the other side. Remark that some leaves of $W^s(K)$ accumulating G on its exterior side would necessarily intersect the leaves of $W^u(K)$ which carry the unstable sides of R_i . As K is saturated, G would be accumulated by some points of $K \setminus R_i$ (see figure 5.3). This would contradict the definition of a fitting Markov partition: the rectangles of \mathcal{M} are compact, disjoint and cover K . This proves the following:

Lemma 5.12 *A segment of \mathcal{G} cannot be accumulated by $W^s(K)$ on its exterior side.*

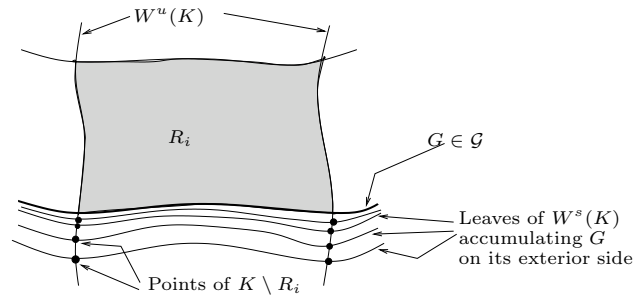


Figure 5.3: The segments of \mathcal{G} cannot be accumulated by $W^s(K)$ outside \mathcal{M}

Notice that lemma 5.12 and the preceding “important remark” have the following immediate corollary which will be used at several steps:

Corollary 5.13 *Every segment of \mathcal{G} is accumulated by $W^s(K)$ on its interior side.*

Let us come back to the first necessary property: lemma 5.12 proves that every segment of \mathcal{G} is carried by a s-boundary leaf. Moreover, we claim that a periodic s-boundary point x of K cannot lie in the interior of a rectangle R_i of \mathcal{M} . If it were the case, both the unstable separatrices of x should intersect $\partial^s R_i$ and hence intersect $W^s(K)$. Now, as K is saturated, the intersection points would lie in K and both the unstable separatrices of x would be non-free; this would contradict item (ii) of lemma 5.11. Hence, every periodic s-boundary point of K lies on \mathcal{G} . Similarly, every periodic u-boundary point of K lies on \mathcal{H} . Summarizing, we have proved the following:

• **Property (1)** *The family \mathcal{G} is a positively invariant family of s-boundary segments which contain all the periodic s-boundary points. The family \mathcal{H} is a negatively invariant family of u-boundary segments which contain all the periodic u-boundary points.*

Now, we introduce the notion of *externally isolated segment* in order to state the second property of \mathcal{G} and \mathcal{H} :

Definition 5.14 *A stable segment $I = [a, b]^s$ which ends are both in K is said to be externally isolated near its right end b if there exists a semi-open stable interval $I' = [a, c[^s$ such that $I' \supset I$ and $I' \cap K = I \cap K$.*

In other words, a stable segment $I = [a, b]^s$ lying on a stable leaf W is externally isolated near b if b is not accumulated by points of $K \cap (W \setminus I)$. We define similarly the notion of stable segment externally isolated near its left end. A stable segment is said to be externally isolated if it is externally isolated near both its ends. Now, the fact that the rectangles of \mathcal{M} are disjointed and cover K clearly implies:

• **Property (2)** *The segments of \mathcal{G} and \mathcal{H} are externally isolated segments.*

For property (3), we have to introduce the notions of *s-arch* and *u-arch*:

Definition 5.15 *We will call s-arch a segment α of a leaf of $W^s(K)$ such that both the ends of α are points of K but such that the interior of α is disjointed of K . We define similarly the notion of u-arch.*

The rectangles of \mathcal{M} are disjoint. This implies that, for every point x on \mathcal{G} , there is an unstable segment Γ such that one end of γ is the point x and the interior of γ is disjoint of $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$. Either the unstable separatrix of x containing γ is free and then x is periodic (item (iii) of lemma 5.11), or we can take γ maximal and then γ is a u-arch with both ends on \mathcal{G} . This proves:

• **Property (3)** *For every non-periodic point x on \mathcal{G} , there exists a u-arch γ such that one end of γ is the point x and both the ends of γ lie on \mathcal{G} (see figure 5.4).*

Similarly, for every nonperiodic point y on \mathcal{H} , there exists a s-arch α such that one end of α is the point y and both the ends of α lie on \mathcal{H} .

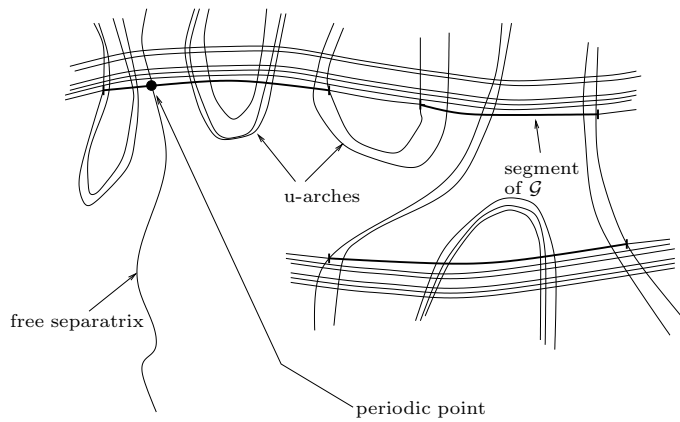


Figure 5.4: Third property of the stable sides of a Markov partition

Following Bonatti and Langevin, a family of stable or unstable segments which verifies properties (1), (2) and (3) will be called an *adapted family*.

Let γ be a u-arch which both ends lie on \mathcal{G} . As both the ends of every segment of \mathcal{H} are in $K \cap \mathcal{G}$, the u-arch γ is either disjoint of \mathcal{H} or exactly coincides with a segment of \mathcal{H} . Moreover, one can eliminate the second possibility: corollary 5.13 implies that every segment of \mathcal{G} is accumulated on its interior side by $W^s(K)$. Hence, the interior of any segment of the family \mathcal{H} intersects K . This proves the following:

• **Property (4)** *For every u-arch γ which both ends lie on \mathcal{G} , the interior of γ is disjoint of \mathcal{H} . For every s-arch α which both ends lie on \mathcal{H} , the interior of α is disjoint of \mathcal{G} .*

Finally, in order to state the last property, we need the following:

Definition 5.16 *An unstable rail carried by \mathcal{G} is an unstable segment which both ends lie on \mathcal{G} and which is not a u-arch (that is an unstable segment which both ends lie on \mathcal{G} and which interior intersects K).*

Two unstable rails A_1 and A_2 carried by \mathcal{G} are said to be equivalent if there exists a rectangle whose unstable sides are the segments A_1 and A_2 (with the definition of a rectangle which was given in part 5.1.1).

The equivalence classes of unstable rails carried by \mathcal{G} are (*a priori* only immersed) rectangles. This allows us to speak of the unstable boundary of the classes of rails carried by \mathcal{G} . As the segments of the families \mathcal{G} and \mathcal{H} are respectively the stable and unstable sides of a collection of rectangles, we clearly get the following:

- **Property (5)** *The union of the segments of \mathcal{H} contains the unstable boundary of the equivalence classes of unstable rails carried by \mathcal{G} . The union of the segments of \mathcal{G} contains the stable boundary of the equivalence classes of stable rails carried by \mathcal{H} .*

Note Actually, one can prove that properties (1)-(5) are sufficient properties, *that is* if \mathcal{I} and \mathcal{J} are families of stable and unstable segments which verify properties (1)-(5), then \mathcal{I} and \mathcal{J} are the sides of a fitting Markov partition ([BLJ, chapter 4]).

5.1.3 Construction of $\mathcal{M}(f, K, p)$

We can now describe the geometrical construction of the set of primitive Markov partitions $\mathcal{M}(f, K, p)$. It will follow from the construction that the set of geometrical types $\mathcal{T}(f, K, p)$ of the partitions of $\mathcal{M}(f, K, p)$ only depends on the topological conjugacy class of $f|_{\Delta(f,K)}$ (actually, it only depends on the topological conjugacy class of $f|_{W^s(K) \cup W^u(K)}$). The idea of constructing a finite set of canonical geometrical types with the help of Birkhoff primitive intersection points is due to Bonatti and Langevin ([BLJ, introduction]).

The construction of $\mathcal{M}(f, K, p)$ goes as follows. We will first define some special segments of $W^s(K)$; namely, the primitive s-boundary segments of K . There are only finitely many orbits of such segments. Thereafter, given any primitive s-boundary segment I_0 , we will define a positive integer $p_{min}(I_0)$ and, for every $p \geq p_{min}(I_0)$, a couple $(\mathcal{I}_{final}(I_0, p), \mathcal{J}_{final}(I_0, p))$ of families of stable and unstable segments. The set of segments $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ and $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$ will appear to be the families of stable and unstable sides of a fitting Markov partition $\mathcal{M}(I_0, p)$ of K . We will denote by $\mathcal{M}(f, K, p)$ the set of Markov partitions $\mathcal{M}(I_0, p)$ where I_0 ranges over the set of all the primitive s-boundary segments.

Figures corresponding to the different steps of this construction are shown in appendix B (in the case where (f, K) is Smale's horseshoe).

Primitive s-boundary segments

The starting data for our construction should be a finite number of orbits of canonical stable segments. These segments will lie on the s-boundary leaves of K . Moreover, they will be described by means of some special intersection points of s and u-boundary leaves, namely, the Birkhoff first intersection points.

Let us choose a periodic s-boundary point x and a periodic u-boundary point y of K . Now, let us choose one of the two stable separatrices of x that we will denote by W^s and one of the two unstable separatrices of y that we will denote by W^u . The following notion was introduced by Birkhoff (see [Bi68]):

Definition 5.17 *A primitive intersection point z of W^s and W^u is a point z in $W^s \cap W^u$ such that $]x, z[^s \cap]y, z[^u$ is empty (see figure 5.5).*

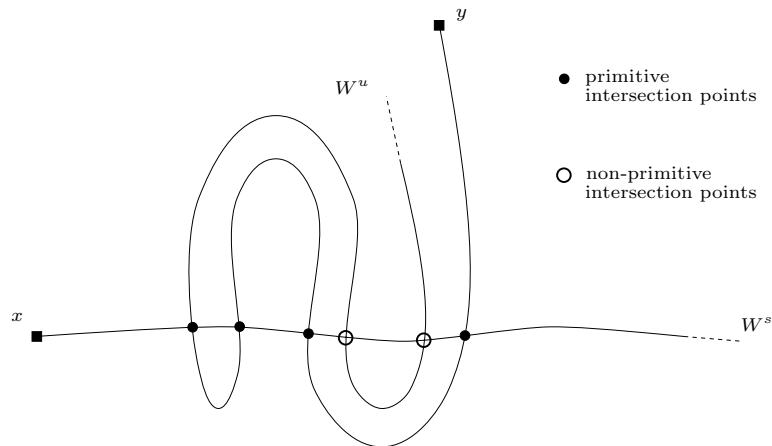


Figure 5.5: Primitive and non-primitive intersection points

Lemma 5.18 *There are finitely many orbits of primitive intersection points of W^s and W^u .*

Proof Let $\tilde{f} = f^q$ where q is chosen such that W^s and W^u are fixed by \tilde{f} . Let z_0 be a point of $W^s \cap W^u$. The stable segment $I = [z_0, \tilde{f}(z_0)]^s$ contains a fundamental domain of W^s : $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}^k(I) = W^s$. As a consequence, each orbit of points of $W^s \cap W^u$ contains one point of I . On the other hand, if z is a primitive intersection point which lies on I then z necessarily lies on $[y, \tilde{f}(z_0)]^u$: if this were not the case, the interiors of the segments $[x, z]^s$ and $[y, z]^u$ would both contain $\tilde{f}(z_0)$ which would contradict the definition of a primitive intersection point.

Now, the two compact segments I and $[y, \tilde{f}(z_0)]^u$ are transverse and therefore $I \cap [y, \tilde{f}(z_0)]^u$ is reduced to a finite number of points. This proves the lemma. \square

Let z be a primitive intersection point of W^s and W^u . The *primitive s-boundary segment* I_0 associated to z will be the segment $[x, z]^s$ (recall that x is the periodic u-boundary point which is on the same stable leaf as z). The following result is an immediate corollary of lemmas 5.11 (item (i)) and 5.18.

Corollary 5.19 *There are finitely many orbits of primitive s-boundary segments.*

First step of the construction of $\mathcal{M}(I_0, p)$: initial segments

We now fix some primitive s-boundary segment I_0 in $W^s(K)$ (that is, we choose a s-boundary separatrix W^s and we choose a primitive s-boundary segment on W^s)

We will call the *positive class* of I_0 and denote by $\mathcal{C}(I_0)$ the collection of segments $\{I_0, f(I_0), \dots, f^{q-1}(I_0)\}$ where q is the period of the s-boundary separatrix which carries I_0 (one should notice that the union of the segments of $\mathcal{C}(I_0)$ is positively invariant by f).

We will construct an integer $p_{min}(I_0)$ and, for every $p \geq p_{min}(I_0)$, a fitting Markov partition $\mathcal{M}(I_0, p)$ associated to I_0 and p . The construction consists in four steps. This first step of the construction yields families $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ of stable and unstable

segments satisfying the property (1) of part 5.1.2. We define these families of segments as follows:

Notation 5.20

- The segments of the family $\mathcal{J}_{init}^0(I_0)$ are all the minimal non-trivial unstable segments joining a periodic u-boundary point to a point of $\mathcal{C}(I_0)$.
- The segments of the family $\mathcal{I}_{init}^0(I_0)$ are all the minimal non-trivial stable segments joining a periodic s-boundary point to a point of $\mathcal{J}_{init}^0(I_0)$.

In other words, starting from a periodic u-boundary point y , we follow one of the unstable separatrices W^u of y . We stop as soon as we meet $\mathcal{C}(I_0)$ (it may never happen). If W^u intersects $\mathcal{C}(I_0)$ this gives a segment of the family $\mathcal{J}_{init}^0(I_0)$. As there are only finitely many u-boundary separatrices, the family $\mathcal{J}_{init}^0(I_0)$ contains only finitely many segments.

Similarly, starting from a periodic s-boundary point x , we follow one of the unstable separatrices W^s of x . We stop as soon as we meet a segment of $\mathcal{J}_{init}^0(I_0)$ (it may never happen). If W^s intersects $\mathcal{J}_{init}^0(I_0)$, this gives a segment of the family $\mathcal{I}_{init}^0(I_0)$.

Notation 5.21 Now, the segments of the family $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ are the connected components of the union of the segments of the family $\mathcal{J}_{init}^0(I_0)$.

Similarly, the segments of the family $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ are the connected components of the union of the segments of the family $\mathcal{I}_{init}^0(I_0)$.

(If both the unstable separatrices of a periodic u-boundary point y intersect $\mathcal{C}(I_0)$, then the family $\mathcal{J}_{init}^0(I_0)$ contains two segments $J = [a, y]^u$ and $J' = [y, b]^u$. In the family $\mathcal{J}_{init}(I_0)$, these two segments are reassembled. Similarly, if the family $\mathcal{I}_{init}^0(I_0)$ contains two segments $[c, x]^s$ and $[x, d]^s$, these two segments are reassembled in the family $\mathcal{I}_{init}(I_0)$.

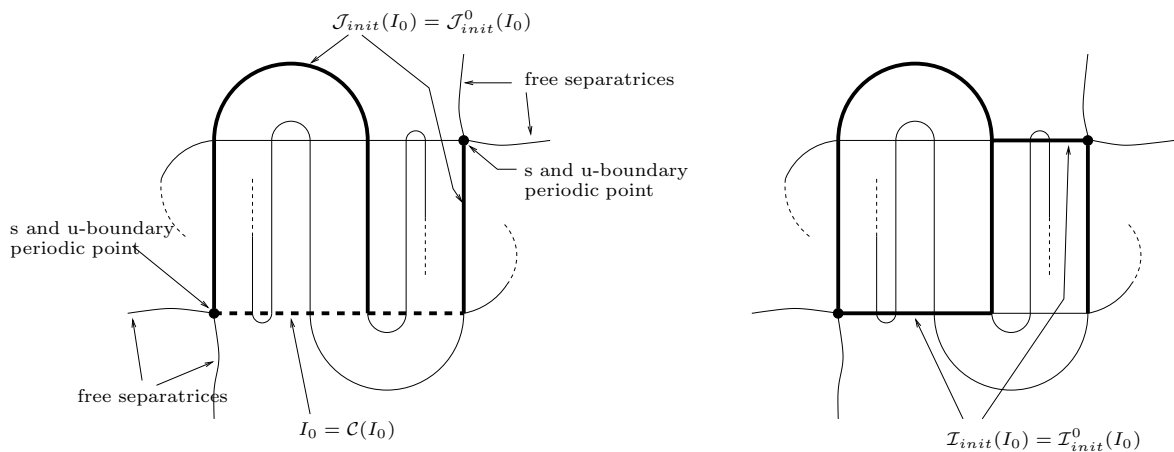


Figure 5.6: The construction of the families of segments $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}(I_0)$

In order to prove that $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ and $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ verify property (1), we will use the following lemma which is a classical property of transitive hyperbolic sets:

Lemma 5.22 *Let W be a non-free unstable separatrix of a periodic point of K . Then the orbit of W is dense in $W^u(K)$. (Of course, there exists an analogous statement for stable separatrices)*

Lemma 5.22 implies that every non-free unstable separatrix of K intersects the orbit of every non free stable separatrix of K . On the other hand, as every leaf of $W^s(K)$ is accumulated by $W^u(K)$ at least on one side, no point of K can have two free unstable separatrices. As a consequence, at least one of the two unstable separatrices of any periodic point of K intersects $\mathcal{C}(I_0)$. This implies that the segments of $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ contains all the periodic u-boundary points of K . A similar argument proves that $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ contains all the periodic s-boundary points of K .

Besides, the positive invariance of $\mathcal{C}(I_0)$ implies the negative invariance of $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ and the negative invariance of $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ implies the positive invariance of $\mathcal{I}_{init}(I_0)$. This finally proves the following

Fact: *The families $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ verify property (1).*

Remark Each segment J of the family $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ either joins $\mathcal{C}(I_0)$ to $\mathcal{C}(I_0)$ or joins a periodic u-boundary point to $\mathcal{C}(I_0)$. In the last case, the underlying periodic u-boundary point has a free unstable separatrix (this is the case of figure 5.6). Similarly, each segment of $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ either joins $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ to $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ or joins a periodic s-boundary point to $\mathcal{J}_{init}(I_0)$. In this last case, the underlying periodic s-boundary point has one free stable separatrix.

Second step of the construction: externally isolated segments

We will now shorten (if necessary) the segments of $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ in order to get families of segments which verify properties (1) and (2).

Let $I = [a, b]^s$ be a segment of the family $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ and suppose that I is not externally isolated near b . We claim that the biggest segment contained in $[a, b]^s$ and which both ends are in K is well-defined. In fact, by construction of $\mathcal{I}_{init}(I_0)$, the ends of I lie on u-boundary leaves. As I is not externally isolated near b , this implies that b is not accumulated by $K \cap I$. The compactity of $K \cap I$ proves the claim.

Notation 5.23 *We will denote by $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ the family of stable segments defined as follows. Every segment of the family $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ is a subsegment of a segment of the family $\mathcal{I}_{init}(I_0)$. Conversely, for every segment $I = [a, b]^s$ of $\mathcal{I}_{init}(I_0)$, there is one and only one segment \tilde{I} of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ such that $\tilde{I} \subset I$ and precisely:*

- if I is externally isolated then $\tilde{I} = I$,
- if I is not externally isolated near b (resp. near a , near both a and b), then \tilde{I} is the biggest stable segment which both ends are in K and which is contained in $[a, b]^s$ (resp. $]a, b]^s$, $]a, b[^s$)

We define similarly the family of unstable segments $\mathcal{J}_{isol}(I_0)$ by shortening if necessary the segments of $\mathcal{J}_{init}(I_0)$.

Claim: The families of segments $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{isol}(I_0)$ verify properties (1) and (2).

Proof We will only consider a segment $I = [a, b]^s$ of $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ which is externally isolated near a but not near b . The corresponding segment $\tilde{I} = [a, b]^s$ in $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ is the biggest stable segment which is contained in $[a, b]^s$ and which both ends are in K .

The segment \tilde{I} is clearly externally isolated.

If we denote by x the periodic point contained in I , we have to prove that $x \in \tilde{I}$ that is to prove that $x \neq b$. By contradiction, if x were equal to b , the left stable separatrix of x would necessarily be free (b is not accumulated by $W^u(K)$ on its left and x is periodic). This leads to a contradiction because a is strictly on the left of b (I is non-degenerate).

The case where I is not externally isolated near a can be treated with similar arguments. The last thing to prove is the positive invariance of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$: this easily follows from the positive invariance of $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ and from the invariance of K . \square

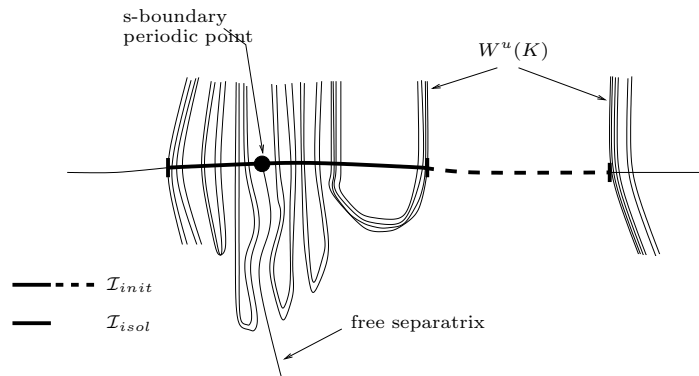


Figure 5.7: Transformation of $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ into $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$

Third step of the construction: saturation by s and u-arches

We will now continue if necessary the segments of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{isol}(I_0)$ in order to obtain families which verify properties (1), (2) and (3). Intuitively, we will continue each segment of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ until it contains both the ends of any u-arch γ which has one end on $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$. Formally:

Notation 5.24 We will denote by $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ the family of stable segments defined as follows. Every segment of the family $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ contains a segment of the family $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$. Conversely, for every segment \tilde{I} of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$, there is one and only one segment \hat{I} of $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ such that $\hat{I} \supset \tilde{I}$ and precisely:

(i) For every u-arch γ , if one end of γ lies on a segment of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$, then both the ends of γ lie on segments of $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$,

(ii) The segments of $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ are the shortest ones which satisfy the property (i).

We define the family $\mathcal{J}_{sat}(I_0)$ by exchanging the stable and the unstable directions.

We say that $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ is the saturation of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ by u-arches and that $\mathcal{J}_{sat}(I_0)$ is the saturation of $\mathcal{J}_{isol}(I_0)$ by s-arches.

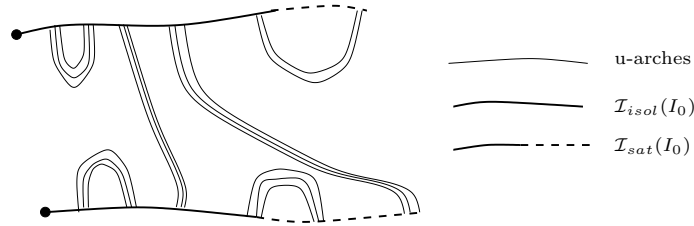


Figure 5.8: Saturation of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ by u-arches

It is proved in [BLJ, lemma 4.4.1] that, if \mathcal{I} and \mathcal{J} are families verifying properties (1) and (2), then the saturations of \mathcal{I} and \mathcal{J} by u and s-arches are adapted families *that is* the families \mathcal{I} and \mathcal{J} verify properties (1), (2) and (3)⁵. This proves that the families $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{sat}(I_0)$ verify properties (1), (2) and (3).⁶

Fourth step of the construction: the sides of $\mathcal{M}(I_0, p)$

We are going to get properties (4) and (5) by cutting out the segments of $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{sat}(I_0)$. Corollary 4.3.9 of [BLJ] states that, if \mathcal{I} and \mathcal{J} are adapted families of stable and unstable segments, then there exists an integer p such that $f^p(\mathcal{J})$ contains the unstable boundary of the equivalence classes of rails carried by \mathcal{I} (see the definition page 228; actually, it is quite an easy consequence of the fact that \mathcal{I} and \mathcal{J} contains a non-trivial segment on each non-free boundary separatrix). This allows us to state the following:

Notation 5.25 *We will denote by $p_{min}(I_0)$ the lowest integer p such that $f^p(\mathcal{J}_{sat}(I_0))$ contains the unstable boundary of the equivalence classes of unstable rails carried by $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ and such that $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ contains the stable boundary of the equivalence classes of stable rails carried by $f^p(\mathcal{J}_{sat}(I_0))$.*

Definition 5.26 *If \mathcal{I} is a family of stable segments and \mathcal{J} is a family of unstable segments, we consider the union of all the segments of \mathcal{I} minus the union of all the s-arches which both ends lie on \mathcal{J} . We denote by $D_{\mathcal{J}}(\mathcal{I})$ (read \mathcal{I} cutted out by \mathcal{J}) the family of the connected components of this union of segments.*

Notation 5.27 *For every $p \geq p_{min}(I_0)$, we define $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ as the family $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ cutted out by the family $f^p(\mathcal{J}_{sat}(I_0))$ (that is the segments of $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ are the connected components of the union of segments of $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ minus the s-arches that have both ends on $f^p(\mathcal{J}_{sat}(I_0))$).*

Similarly, we define $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$ as the family $f^p(\mathcal{J}_{sat}(I_0))$ cutted out by the family $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$. (see figures 5.14, 5.15 and 5.16)

⁵It is not proved in [BLJ, lemma 4.4.1] that, if \mathcal{I} and \mathcal{J} are respectively positively and negatively invariant by f , then so are the saturations of \mathcal{I} and \mathcal{J} by u and s-arches. Nevertheless, this is a direct consequence of the invariance of the notion of s and u-arch by f and f^{-1} .

⁶It may be interesting to notice that the proof of lemma 4.4.1 in [BLJ] is essentially the only step where the realizability of the geometrical type T is actually used.

The families $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ and $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$ were clearly defined in order to verify properties (4) and (5). If \mathcal{I} and \mathcal{J} are adapted families of stable and unstable segments, if $f^p(\mathcal{J})$ contains the unstable boundaries of the classes of rails carried by \mathcal{I} and if \mathcal{I} contains the stable boundaries of the classes of rails carried by $f^p(\mathcal{J})$, then it is proved in [BLJ, theorem 4.3.3] that the families $D_{f^p(\mathcal{J})}(\mathcal{I})$ and $D_{\mathcal{I}}(f^p(\mathcal{J}))$ are the families of stable and unstable sides of a fitting Markov partition. Hence, for every $p \geq p_{min}(I_0)$, the segments of the families $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ and $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$ are respectively the stable and unstable sides of a fitting Markov partition of K .

Notation 5.28 For every $p \geq p_{min}(I_0)$, we will denote by $\mathcal{M}(I_0, p)$ the fitting Markov partition of K which stable and unstable sides are the segments of the families $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ and $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$.

The following diagram summarizes the construction of the primitive Markov partition $\mathcal{M}(I_0, p)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 I_0 & \xrightarrow{\text{first step}} & (\mathcal{I}_{init}(I_0), \mathcal{J}_{init}(I_0)) & \xrightarrow{\text{second step}} & (\mathcal{I}_{isol}(I_0), \mathcal{J}_{isol}(I_0)) & \xrightarrow{\text{third step}} & \dots \\
 & & & & & & \\
 \dots(\mathcal{I}_{sat}(I_0), \mathcal{J}_{sat}(I_0)) & & \xrightarrow{\text{fourth step}} & & (\mathcal{I}_{final}(I_0, p), \mathcal{J}_{final}(I_0, p)) & \longrightarrow & \mathcal{M}(I_0, p) \\
 & \searrow_{p_{min}(I_0)} & & \nearrow_{p \geq p_{min}(I_0)} & & &
 \end{array}$$

Definition of the set $\mathcal{T}(f, K, p)$ of primitive geometrical types

If I_0 is a primitive s-boundary segment then $f(I_0)$ is a primitive s-boundary segment as well. Clearly, the families of initial segments $\mathcal{I}_{init}(f(I_0))$ and $\mathcal{J}_{init}(f(I_0))$, associated with $f(I_0)$, coincide with the families $f(\mathcal{I}_{init}(I_0))$ and $f(\mathcal{J}_{init}(I_0))$. This implies that the families of segments $\mathcal{I}_{isol}(f(I_0))$, $\mathcal{J}_{isol}(f(I_0))$, $\mathcal{I}_{sat}(f(I_0))$ and $\mathcal{J}_{sat}(f(I_0))$ coincide with the families $f(\mathcal{I}_{isol}(I_0))$, $f(\mathcal{J}_{isol}(I_0))$, $f(\mathcal{I}_{sat}(I_0))$ and $f(\mathcal{J}_{sat}(I_0))$.

As there is only a finite number of orbits of primitive s-boundary segments of K , this proves that the supremum of all the integers $p_{min}(I_0)$ (when I_0 ranges over the set of all the primitive s-boundary segments of K) is finite. Moreover, for every $p \geq p_{min}(I_0)$, the Markov partitions $\mathcal{M}(f(I_0), p)$ and $f(\mathcal{M}(I_0, p))$ coincide (if $\mathcal{M} = \{R_i\}$ is a Markov partition, we denote by $f(\mathcal{M})$ the Markov partition which rectangles are the $f(R_i)$'s).

Definition 5.29 We define $p_{min}(f, K)$ as the maximum of the integers $p_{min}(I_0)$ when I_0 ranges over the set of all the primitive s-boundary segments of K .

If $p \geq p_{min}(f, K)$, we define $\mathcal{M}(f, K, p)$ as the family of the primitive Markov partitions $\mathcal{M}(I_0, p)$ when I_0 ranges over the set of all the primitive s-boundary segments of K . Thereafter, we define $\mathcal{T}(f, K, p)$ as the set of all the geometrical types of the Markov partitions of $\mathcal{M}(f, K, p)$.

(There are *a priori* $2^n n!$ geometrical types associated with each n rectangles Markov partition of $\mathcal{M}(f, K, p)$ (see the remark page 223)).

There are only finitely many orbits of primitive s-boundary segments. For every primitive s-boundary segment I_0 , the fitting Markov partition $\mathcal{M}(f(I_0), p)$ and $f(\mathcal{M}(I_0, p))$ coincide. These facts prove that, for every $p \geq p_{\min}(f, K)$, the set $\mathcal{M}(f, K, p)$ contains a finite number of orbits of Markov partitions. Moreover, for every fitting Markov partition \mathcal{M} , the geometrical types of the Markov partitions \mathcal{M} and $f(\mathcal{M})$ are the same. Hence, for every $p \geq p_{\min}(f, K)$, the set $\mathcal{T}(f, K, p)$ is finite.

Besides, it clearly follows from the construction that the integer $p_{\min}(f, K)$ and the sets of geometrical types $\mathcal{T}(f, K, p)$ are canonical *that is* only depend on the topological conjugacy class of $f|_{W^s(K) \cup W^u(K)}$. Summarizing:

Important facts:

- (i) For every $p \geq p_{\min}(f, K)$, the set of geometrical types $\mathcal{T}(f, K, p)$ is finite.
- (ii) If (g, L) is another couple such that the restriction of f and g to $\Delta(f, K)$ and $\Delta(g, L)$ are topologically conjugate then $p_{\min}(f, K) = p_{\min}(g, L)$ and, for every $p \geq p_{\min}(f, K)$, $\mathcal{T}(f, K, p) = \mathcal{T}(g, L, p)$.

If T is the geometrical type of a fitting Markov partition of K , item (ii) and theorem \star allows us to define the integer $p_{\min}(T) \equiv p_{\min}(f, K)$ and, for every $p \geq p_{\min}(T)$, the set $\mathcal{T}(T, p) \equiv \mathcal{T}(f, K, p)$.

5.2 A finite framework for the construction of the set $\mathcal{T}(f, K, p)$

The proof of theorem 5.2 begins here and will fill sections 5.2, 5.3 and 5.4.

The construction of primitive Markov partitions that we have described in section 5.1.3 consists in choosing some rectangles among those which are outlined by the s and u-boundary leaves of a basic piece K . The so-called s and u-boundary leaves of K outline infinitely many rectangles.

In the present section, we will designate *a priori* a finite number of stable and unstable segments among which we can choose the sides of one partition in the orbit of each $\mathcal{M}(I_0, p)$ belonging to $\mathcal{M}(f, K, p)$.

5.2.1 N -realization of a Markov partition, crossings, s and u-chains

In this subsection, we will define a finite framework (*that is* a finite number of stable and unstable segments) which can be used to construct $\mathcal{T}(f, K, p)$. The starting point of the construction of such a finite framework is any given Markov partition \mathcal{M} of K .

Definition of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$, of the crossings, of the s and u-chains of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$

As in section 5.1, we denote by f a Smale diffeomorphism of a compact surface and by K a 0-dimensional basic piece of f . We suppose that K admits a Markov partition

$\mathcal{M} = \{R_i\}_{i=1..n}$ with n rectangles. We denote by R the union of the rectangles of \mathcal{M} .

Definition 5.30 *The N -realization $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ is the surface with boundary $\bigcup_{k=-N}^N f^k(R)$, endowed with (see figure 5.9):*

- the trace of each rectangle $f^k(R_i)$ (where $i \leq n$ and $-N \leq k \leq N$),
- the orientation of the horizontal and vertical sides of each $f^k(R_i)$,
- the restriction of f to $\bigcup_{k=-N}^{N-1} f^k(R)$.

The sides of the rectangles $f^k(R_i)$ (where $-N \leq k \leq N$ and $1 \leq i \leq n$) draw a kind of squaring on $\bigcup_{k=-N}^N f^k(R)$. In order to simplify the definition of this squaring let us notice that:

- the stable sides of $f^k(R)$ are subsets of the stable sides of $f^{-N}(R)$ for every $k \geq -N$,
- the unstable sides of $f^k(R)$ are subsets of the unstable sides of $f^N(R)$ for every $k \leq N$.

These two properties are direct consequences of the remark following the definition of a fitting Markov partition. They justify the following definitions:

Definition 5.31 *We call s-woof of the N -realization $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ the union of segments $f^{-N}(\partial^s R)$ and u-woof of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ the union of segments $f^N(\partial^u R)$.*

We call crossing of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ a point of intersection of the s-woof and the u-woof.

We call s-chain of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ any segment which is included in the s-woof of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ and which both ends are crossings of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$.

We call u-chain of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ any segment which is included in the u-woof of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ and which both ends are crossings of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$. (see figure 5.9)

The crossings, s and u-chains of the N -realization $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ are morally the points and segments which are directly determined by the N first (positive and negative) iterates of the Markov partition \mathcal{M} .

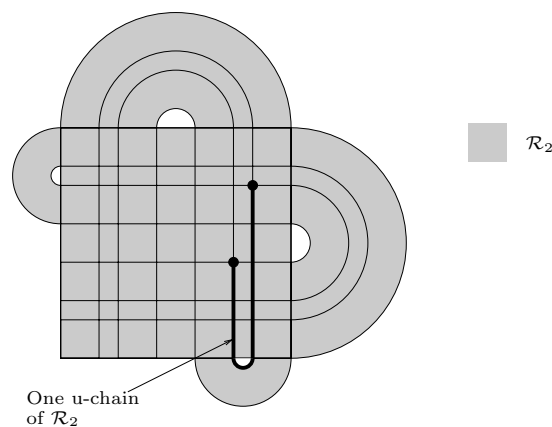


Figure 5.9: The 2-realization of the one-rectangle Markov partition of Smale's horseshoe and an example of u-chain

Remarks

- (i) There are clearly finitely many crossings, s and u-chains in $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$.

(ii) If $N' \geq N$ then $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ is naturally embedded in $\mathcal{R}_{N'}(f, \mathcal{M})$ and every s or u-chain of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ is a s or u-chain of $\mathcal{R}_{N'}(f, \mathcal{M})$. Notice that there are some s-chains of $\mathcal{R}_{N'}(f, \mathcal{M})$ which are contained in $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ and which are not s-chains of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$.

(iii) The images of the s and u-woofs of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ respectively by f and f^{-1} are trivially included in the s and u-woofs of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$. The images of the s and u-woofs of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ respectively by f^{-1} and f are the s and u-woofs of $\mathcal{R}_{N+1}(f, \mathcal{M})$. As a consequence, the images by f and f^{-1} of s and u-chains of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ are s and u-chains of $\mathcal{R}_{N+1}(f, \mathcal{M})$.

(iv) The sides of R_i are oriented. This induces (via f) some orientations of the sides of $f^N(R_i)$ and $f^{-N}(R_i)$. The s-woof (resp. the u-woof) of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ inherits the orientation of the connected components of $f^{-N}(\partial^s R)$ (resp. of $f^N(\partial^u R)$).

Let us recall that, for every primitive s-boundary segment I_0 , the primitive Markov partitions $\mathcal{M}(I_0, p)$ and $\mathcal{M}(f(I_0), p)$ have the same geometrical type. Hence, for every primitive s-boundary segment I_0 , we only need to know the geometrical type of the Markov partition $\mathcal{M}(f^k(I_0), p)$ for some integer k . One may say that the goal of section 5.2 is to prove the following

Theorem 5.32 *Let N_2 be an integer such that $N_2 \geq 23n^2$ (recall that n is the number of rectangles of \mathcal{M}). The following properties hold:*

- $p_{min}(f, K) \leq 2(N_2 + 2n)$.
- for every $p \geq p_{min}(f, K)$ and every primitive s-boundary segment I_0 , up to replacing I_0 by $f^k(I_0)$ for some $k \in \mathbb{Z}$, all the segments which appear in the steps of the construction of $\mathcal{M}(I_0, p)$ are s or u-chains of $\mathcal{R}_{N_2+p}(f, \mathcal{M})$. By such, we mean that all the segments of the families $\mathcal{I}_{init}(I_0)$, $\mathcal{J}_{init}(I_0)$, $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$, $\mathcal{J}_{isol}(I_0)$, $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$, $\mathcal{J}_{sat}(I_0)$, $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ and $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$ are s or u-chains of $\mathcal{R}_{N_2+p}(f, \mathcal{M})$.

Actually, we will not only need theorem 5.32 but also some more precise intermediate results. Nevertheless, theorem 5.32 indicates the spirit of section 5.2. Morally,

- (i) To construct $\mathcal{T}(f, K, p)$, one can work within a finite set of segments.
- (ii) These segments are directly determined by a finite number of iterates of \mathcal{M} .

In section 5.3, we will work within the sets s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_2+p}(f, \mathcal{M})$.

Important remark The number of crossings, s and u-chains of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ grows exponentially fast with N . For the final algorithm, we will use $\mathcal{R}_{N_2+p}(f, \mathcal{M})$ as a framework, where $N_2 + p \gg n$. This is the reason why the final algorithm has an exponential complexity.

During some intermediate steps of the proof of 5.32, we will use the following extra-notion:

Definition 5.33 *A half-s-chain of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ is a segment α included in the s-woof of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ such that: one end of α is a periodic s-boundary point and the other end of α lies on the u-woof of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$.*

A prototype of a half-s-chain is an embrionary s-boundary separatrix:

Definition 5.34 *Let W^s be a s-boundary separatrix and let us denote by δ^s the stable side of \mathcal{M} on which the periodic end of W^s lies (see property (1) in subsection 5.1.2). The embrionary stable separatrix W_0^s associated to W^s is the interval $W^s \cap \delta^s$.*

Some general lemmas on (half) s and u-chains of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$

In subsection 5.2.2, we will use several times some general properties of s and u-chains of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ that we prove here.

Definition 5.35 *We will call horizontal cross bar of a rectangle Q every non trivial stable segment, included in Q , which both ends are in $\partial^u Q$. (In other words, a horizontal cross bar of Q is a horizontal side of a horizontal subrectangle of Q)*

Lemma 5.36 *Let I be a s-chain of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ and let δ^s be a horizontal cross bar of $f^N(R_i)$ for some $i \leq n$. If $I \cap \delta^s$ is a non-degenerate segment (that is a segment which has a non-empty interior) then I contains δ^s .*

Proof To prove the lemma, we prove that the ends of I cannot lie in the interior of δ^s : the segment $f^{-N}(\delta^s)$ is an horizontal cross bar of R_i . The rectangles R_k ($1 \leq k \leq n$) of the partition \mathcal{M} are disjointed. Therefore no unstable side of a rectangle of \mathcal{M} intersects the interior of $f^{-N}(\delta^s)$. This proves that the u-woof $f^N(\partial^u R)$ of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ does not intersect the interior of δ^s . As the ends of I lie on the u-woof, this proves the lemma. \square

Corollary 5.37 *Let I be an externally isolated s-chain of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$. Let δ^s be a horizontal cross bar of $f^N(R)$. Then either I does not intersect δ^s or I contains δ^s .*

Proof In order to apply the preceeding lemma, it suffices to prove that $I \cap \delta^s$ cannot be a singleton. By contradiction, if $I \cap \delta^s = \{a\}$ then a is necessarily an end of I . Corollary 5.13 implies that each unstable side of $f^N(R)$ is accumulated by $W^u(K) \cap f^N(R)$. Hence, a is accumulated by points of $K \cap \delta^s$. If $\delta^s \cap I = \{a\}$, this contradicts the fact that I is externally isolated. As a consequence, $I \cap \delta^s$ cannot be a singleton and the corollary follows from lemma 5.36. \square

We will also use a second corollary (corollary 5.39) of lemma 5.36 involving periodic boundary points. Let us first recall that the union of the stable sides of \mathcal{M} is positively invariant by f : $f(\partial^s R) \subset \partial^s R$. A stable side δ^s of a rectangle of \mathcal{M} will be said to be p -periodic if $f^p(\delta^s) \subset \delta^s$. We will denote by $\partial_{per}^s R$ the set of periodic stable sides of \mathcal{M} . The following trivial remark will be useful at several steps:

Lemma 5.38 *The period of a stable side of \mathcal{M} is at most $2n$. Moreover, $f^{2n}(\partial^s R) \subset \partial_{per}^s R$.*

Proof This immediately follows from the following fact: there are only $2n$ stable sides. \square

It was noticed in part 5.1.2 that every periodic s-boundary point lies on a stable side of \mathcal{M} (property (1)). Actually, every periodic s-boundary point clearly lies on a periodic stable side. On the other hand, the restriction of f^p to a p -periodic stable side is a strict contraction (the stable sides of \mathcal{M} are subsets of $W^s(K)$). Thus every periodic stable side of \mathcal{M} contains one and only one periodic s-boundary point. We can now state the corollary:

Corollary 5.39 *Let \mathcal{I} be a family of non-degenerate s-chains of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ which contain all the periodic s-boundary points of K . Then, the union of the s-chains of \mathcal{I} contains $\partial_{per}^s f^N(R)$. As a consequence, the union of the s-chains of \mathcal{I} contains $\partial^s f^{N+2n}(R)$.*

Proof We will prove that \mathcal{I} contains $\partial_{per}^s f^N(R)$. As $\partial_{per}^s f^N(R)$ contains $\partial^s f^{N+2n}(R)$, this will imply the corollary.

Suppose that one segment I of \mathcal{I} contains a periodic s-boundary point x . Let us denote by δ^s the stable side of $f^N(\mathcal{M})$ which contains this point x . The intersection $I \cap \delta^s$ contains the point x and, in particular, $I \cap \delta^s$ is non empty. The segment δ^s is a stable cross bar of $f^N(R)$. To apply lemma 5.36, we have to prove that $I \cap \delta^s$ cannot be the singleton $\{x\}$.

— First, if x is not on the u-woof of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ then x is necessarily in the interior of I . Thus, $I \cap \delta^s$ is not the single point x .

— On the other hand, if x lies on the u-woof of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ then x is a periodic u-boundary point. Hence, x has a free stable separatrix that we denote by \mathcal{L} . As the ends of I are in K , I is necessarily disjoint of \mathcal{L} . For the same reason, δ^s is disjoint of \mathcal{L} . Thus I and δ^s are two non-degenerate stable segments which are on the same side of x . As a consequence, $I \cap \delta^s$ is not the singleton $\{x\}$.

We can now apply lemma 5.36, which tells us that I contains the stable side δ^s . Summarizing, we have proved that, if a segment I of \mathcal{I} contains a periodic s-boundary point x , then I contains the periodic side δ^s of $f^N(\partial^s R)$ on which x lies. As \mathcal{I} contains all the periodic s-boundary point, this proves that \mathcal{I} contains $f^N(\partial^s R)$. \square

We will finally need a kind of analog of corollary 5.39 concerning half-s-chains:

Lemma 5.40 *Let W^s be a s-boundary separatrix and let us denote by W_0^s the embryonary separatrix associated to W^s . Let \mathcal{I} be a family of non-degenerate half-s-chains of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ such that the family \mathcal{I} contains one half-s-chain on each s-boundary separatrix of the orbit of W^s . Then there is one half-s-chain of \mathcal{I} which contains $f^N(W_0^s)$.*

Proof This is the same kind of proof as that of lemma 5.36: The unstable sides of the rectangles of \mathcal{M} do not intersect the interior of W_0^s ; therefore the u-woof of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ does not intersect the interior of $f^N(W_0^s)$. On the other hand, there is one of the half-s-chains of \mathcal{I} which lies on the same separatrix as $f^N(W_0^s)$ and thus there is one of the half-s-chains of \mathcal{I} which has a non trivial intersection with $f^N(W_0^s)$. This proves the claim. \square

Of course, lemma 5.36, lemma 5.38, corollary 5.39 and lemma 5.40 have unstable versions (one has to replace f by f^{-1} in the statements).

5.2.2 Proof of theorem 5.32

Primitive s-boundary segments

We are now looking for results of the type of theorem 5.32. We first want to find some N_0 such that every primitive s-boundary segment I_0 is a half-s-chain of $\mathcal{R}_{N_0}(f, \mathcal{M})$ (up to replacing I_0 by $f^k(I_0)$). As a preliminary, lemma 5.41 finds one intersection point of the orbits of two given non free s and u-boundary separatrices of K .

For every stable and unstable boundary separatrices W^s and W^u of K , we denote by W_0^s and W_0^u the embrionary separatrices associated to W^s and W^u . We denote by \mathcal{W}^s the orbit of W^s and by \mathcal{W}_0^s the union of the embrionary separatrices associated to the separatrices of the orbit \mathcal{W}^s . We denote by q_s and q_u the periods W^s and W^u .

Lemma 5.41 *For every s-boundary separatrix W^s and every u-boundary separatrix W^u , the intersection of $f^{n+q_u+q_s}(W_0^u)$ and \mathcal{W}_0^s is non-empty.*

Sublemma 5.42 *For every s-boundary separatrix W^s , the segment $f^{-q_s}(W_0^s)$ contains a stable cross bar of a rectangle of \mathcal{M} .*

Proof sublemma 5.42 Let us write $W_0^s =]x, b]^s$ where x is a periodic s-boundary point and b is the corner of a rectangle of \mathcal{M} . The negative invariance of $\partial^u R$ implies that $f^{-q_s}(b) \in \partial^u R$. As a consequence, $W_1^s \equiv f^{-q_s}(W_0^s) \setminus W_0^s =]b, f^{-q_s}(b)]^s$ is a semi-open stable interval whose both ends are in $\partial^u R$.

Hence, the following dichotomy holds: either the interior of W_1^s is disjoint of R or the closure of W_1^s contains a stable cross bar of R .

Because of property (2) (the sides of the rectangles of a Markov partition are externally isolated and thus “internally non-isolated”), b is accumulated by points of $K \cap W_0^s$. Hence, $f^{-q_s}(b)$ is accumulated by points of $K \cap f^{q_s}(W_0^s)$. As K is covered by R , this excludes the first possibility of the dichotomy. Hence, $[b, f^{-q_s}(b)]^s \subset f^{-q_s}(W_0^s)$ contains a stable cross bar of R . □

Proof lemma 5.41

- Sublemma 5.42 proves that $f^{-q_s}(W_0^s)$ contains a stable cross bar of a rectangle of \mathcal{M} .
- Similarly, $f^{q_u}(W_0^u)$ contains an unstable cross bar of a rectangle of \mathcal{M} .
- For every i, j , the rectangle $f^n(R_i)$ intersects the rectangle R_j . This is a classical fact; we only sketch the proof. One can define an oriented graph which n vertices are the rectangles of \mathcal{M} . There is an edge from R_k to R_l if and only if $f(R_k)$ intersects R_l . The properties of Markov partitions imply that if there is a chain of m edges from R_k to R_l then $f^m(R_k)$ intersects R_l . The transitivity of K clearly implies that, for every i, j , there is a chain of edges from R_i to R_j . As there are only n vertices, there is necessarily a chain of less than n edges from R_i to R_j . This proves that $f^n(R_i)$ intersects R_j .

• The definition of a Markov partition implies the following property. Assume that $f^n(R_i)$ intersects R_j and suppose that δ^u is an unstable cross-bar of R_i . Then $f^n(\delta^u)$ contains an unstable cross bar of R_j . As a further consequence, if δ^s is a stable cross-bar of R_j , then $f^n(\delta^u)$ intersects δ^s .

The four items prove that $f^{n+q_u}(W_0^u)$ intersects $f^{-q_s}(W_0^s)$. Using the positive invariance of W_0^s by f , this implies that $f^{n+q_u+q_s}(W_0^u)$ intersects W_0^s . \square

A symmetric result clearly holds: if W^s is a s-boundary separatrix and W^u is an orbit of u-boundary separatrices, then $f^{-(n+q_s+q_u)}(W_0^s)$ intersects W_0^u .

Corollary 5.43 *For every s and u-boundary separatrices W^s and W^u and every primitive intersection point z_0 of W^s and W^u , there exists $k \in \mathbb{Z}$ such that $f^k(z_0)$ lies in $W_0^s \cap f^{n+q_u+q_s+q_u}(W_0^u)$.*

Proof Thanks to lemma 5.41, we can choose a point z in $W_0^s \cap f^{n+q_u+q_s}(W_0^u)$. Up to replacing W^s by another separatrix in the orbit W^s , one may suppose that z lies on W^s . Every orbit of primitive intersection points of W^s and W^u has a point in $I \cap W^u$ where $I = [z, f^{q_s q_u}(z)]^s \subset W^s$. As a consequence, there exists an integer k such that $f^k(z_0)$ lies in $I \cap W^u$.

We claim that $f^k(z_0)$ is in $f^{n+q_u+q_s+q_u}(W_0^u)$. We argue by contradiction. Denote by x and y the periodic ends of the separatrices W^s and W^u . Then, the interiors of the segments $[x, f^k(z_0)]^s$ and $[y, f^k(z_0)]^u$ both contain the point $f^{q_s q_u}(z)$. This contradicts the definition of a primitive intersection point and proves the corollary. \square

Remark There are $2n$ stable sides of rectangles of \mathcal{M} and thus there are at most $2n$ periodic s-boundary points in K . A periodic s-boundary point has two stable separatrices, which could *a priori* belong to the same orbit. Nevertheless, every s-boundary leaf is accumulated on one and only one side by $W^s(K)$. As f preserves the orientation (and $f(W^s(K)) = W^s(K)$), this implies that the two stable separatrices of a periodic s-boundary point actually cannot belong to the same orbit. Thus the period of a s-boundary separatrix is at most $2n$. This allows us to bound $n + q_u + q_s + q_s q_u$ by $9n^2$.

Corollary 5.44 *For every primitive s-boundary segment I_0 , there exists an integer k such that the positive class $\mathcal{C}(f^k(I_0))$ of $f^k(I_0)$ is a family of half-s-chains of $\mathcal{R}_{N_0}(f, \mathcal{M})$ as soon as $N_0 \geq 11n^2$.*

Proof For every primitive s-boundary segment I_0 , it follows from corollary 5.43 that there exists an integer k such that $f^k(I_0)$ is a half-s-chain of $\mathcal{R}_{9n^2}(f, \mathcal{M})$. As the period of the s-boundary separatrix W^s which carries I_0 is at most $2n$, the segments of $\mathcal{C}(f^k(I_0))$ are half-s-chains of $\mathcal{R}_{9n^2+2n}(f, \mathcal{M}) \subset \mathcal{R}_{11n^2}(f, \mathcal{M})$. \square

Remark The estimation of N_0 is certainly not optimal. Nevertheless, one can easily find examples where N_0 is necessarily bigger than n . As already noticed, the number of crossings, s and u-chains of the N -realization $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ grows exponentially fast with N . This will force the complexity of our final algorithm to be exponential. Hence, we will not look for the most precise lower bounds.

First step of the construction

We now fix an integer $N_0 \geq 11n^2$. Given some primitive s-boundary segment I_0 , the first step of the construction yields a couple $(\mathcal{I}_{init}(I_0), \mathcal{J}_{init}(I_0))$ of families of segments which contain all the periodic s and u-boundary points. We are only interested in knowing $\mathcal{I}_{init}(f^k(I_0))$ and $\mathcal{J}_{init}(f^k(I_0))$ for some integer k that we can choose. Therefore, corollary 5.44 implies that (up to replacing I_0 by $f^k(I_0)$ for some k) we can assume that $\mathcal{C}(I_0)$ is a family of half-s-chains of $\mathcal{R}_{N_0}(f, \mathcal{M})$.

Proposition 5.45 *Let I_0 be a primitive s-boundary point such that $\mathcal{C}(I_0)$ is a family of half-s-chains of $\mathcal{R}_{N_0}(f, \mathcal{M})$. Then the segments of the families $\mathcal{I}_{init}^0(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}^0(I_0)$ are half s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(f, \mathcal{M})$ as soon as $N_1 \geq N_0 + 10n^2$.*

Proof We denote by W^s the s-boundary separatrix which carries I_0 . Lemma 5.40 proves that $\mathcal{C}(I_0)$ contains $f^{N_0}(W_0^s)$.

Let us consider a u-boundary separatrix W^u . Lemma 5.41 proves that $f^{5n^2}(W_0^u)$ intersects W_0^s and hence that $f^{N_0+5n^2}(W_0^u)$ intersects $\mathcal{C}(I_0)$. This proves that $\mathcal{J}_{init}^0(I_0)$ is a family of half-u-chains of $\mathcal{R}_{N_0+5n^2}(f, \mathcal{M})$.

Lemma 5.40 proves that the union of the segments of $\mathcal{J}_{init}^0(I_0)$ contains $f^{-(N_0+5n^2)}(W_0^u)$. A further use of lemma 5.41 proves that $\mathcal{I}_{init}^0(I_0)$ is a family of half-s-chains of $\mathcal{R}_{N_0+10n^2}(f, \mathcal{M})$. □

Corollary 5.46 *Let us suppose that I_0 is a s-boundary segment such that $\mathcal{C}(I_0)$ is a family of half-s-chains of $\mathcal{R}_{N_0}(f, \mathcal{M})$. Then the segments of the families $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ or $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ are s or u-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(f, \mathcal{M})$ provided that $N_1 \geq N_0 + 10n^2$.*

Proof For each segment I of the family $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ (see page 232):

— either I is a segment $[c, x]^s$ or $[x, d]^s$ lying on one of the stable separatrices of the periodic point x and the other stable separatrix of x is free. Proposition 5.45 implies that I is included in the s-woof of $\mathcal{R}_{N_0+10n^2}(f, \mathcal{M})$ and that d lies on the u-woof of $\mathcal{R}_{N_0+10n^2}(f, \mathcal{M})$. As one of the stable separatrices of x is free, x is necessarily a corner of a rectangle of \mathcal{M} and lies on the u-woof of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ for any $N \geq 1$. Hence, I is a u-chain of $\mathcal{R}_{N_0+10n^2}(f, \mathcal{M})$.

— or I is the union of two segments $[c, x]^s$ and $[x, d]^s$ (where x is periodic). Proposition 5.45 implies that I is included in the s-woof of $\mathcal{R}_{N_0+10n^2}(f, \mathcal{M})$ and that both the ends c and d of I lie on the u-woof of $\mathcal{R}_{N_0+10n^2}(f, \mathcal{M})$. Hence, I is a u-chain of $\mathcal{R}_{N_0+10n^2}(f, \mathcal{M})$. □

Second step of the construction

An integer $N_1 \geq N_0 + 10n^2$ is now fixed. Now, we consider the families $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{isol}(I_0)$ of externally isolated segments deduced from $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}(I_0)$.

Proposition 5.47 *Let us suppose that $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ are families of s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(f, \mathcal{M})$. Then $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{isol}(I_0)$ are also families of s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(f, \mathcal{M})$.*

Proof If a segment $I = [a, b]^s$ of $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ is not externally isolated near b , the corresponding segment $\tilde{I} = [a, b']^s$ in $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ is the biggest segment which is contained in $[a, b]^s$ and which both ends are in K . This implies that $[b', b]^s$ is an s-arch.

The proposition is now an immediate consequence of the following fact: if one end of an s-arch α lies on the u-woof of $\mathcal{R}_{N_1}(f, \mathcal{M})$ (that is on $\partial^u f^{N_1}(R)$), then both the ends of α lies on the u-woof of $\mathcal{R}_{N_1}(f, \mathcal{M})$. This last fact is a consequence of lemma 5.48 stated below. □

Third step of the construction

The third step of the construction of the geometrical types of $\mathcal{T}(f, K, p)$ consists in “saturating $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ by u-arches”. Intuitively, $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ is replaced by $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ which is the smallest union of stable segments containing $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ and containing both the ends of every u-arch γ that has one end on $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$. *A priori*, we have to locate the ends of infinitely many u-arches. Nevertheless, because $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ is a family of s-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(f, \mathcal{M})$, it will appear that it suffices to saturate $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ by a finite number of u-arches (which are u-chains of $\mathcal{R}_{N_2}(f, \mathcal{M})$ for $N_2 = N_1 + 2n$). This will imply that $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ is a set of s-chains of $\mathcal{R}_{N_2}(f, \mathcal{M})$.

Thanks to proposition 5.47, we can assume that $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ is a family of s-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(f, \mathcal{M})$. This implies that these segments are neither too long and nor too short. More precisely:

- $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ is contained in $f^{-N_1}(\partial^s R)$ (by definition of a s-chain), (★)
- $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ contains $f^{N_1+2n}(\partial^s R)$ (see corollary 5.39). (★★)

These properties will restrict the set of u-arches we have to take into account for the saturation of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$. We now have to understand the positions of u-arches with respect to $f^{-N_1}(\partial^s R)$ and $f^{N_1+2n}(\partial^s R)$.

Lemma 5.48 *Let k be a (positive or negative) integer and let α be a u-arch. One of the two possibilities (which are of course exclusive) holds:*

- either α is included in $f^k(R) \setminus \partial^s f^k(R)$,
- or $int(\alpha)$ is disjointed from $f^k(R)$.

In the second case, both the ends of α lie on $\partial^s f^k(R)$.

Proof To prove the dichotomy, let us suppose simultaneously that $int(\alpha)$ intersects $f^k(R)$ and that α is not included in $f^k(R) \setminus \partial^s f^k(R)$. In that case, as α is a segment of unstable manifold, α would intersect $\partial^s f^k(R)$.

— If $int(\alpha)$ intersects $\partial^s f^k(R)$, then $int(\alpha)$ intersect K (because α is an unstable segment, $\partial^s f^k(R)$ is a stable segment and K is saturated). As α is a u-arch, this leads to a contradiction.

— If $int(\alpha)$ does not intersect $\partial^s f^k(R)$ then, as α is an unstable segment, α is included in one rectangle $f^k(R_i)$ with at least one end of α on one of the stable sides δ^s of $f^k(R_i)$. But corollary 5.13 implies that δ^s is accumulated by $W^s(K) \cap f^k(R_i)$. This implies that $W^s(K)$ intersects $int(\gamma)$ which is once again in contradiction with the definition of a u-arch.

The dichotomy is proved. We now suppose that we are in the second case: $\text{int}(\alpha)$ does not intersect $f^k(R)$. Both the ends of α are in $K = \bigcap_{l \in \mathbb{Z}} f^l(R)$. This proves that the ends of α lie on the boundary of $f^k(R)$. As α is a segment of unstable manifold, both the ends of α actually lie on $\partial^s f^k(R)$. \square

Corollary 5.49 *Let α be a u-arch. The two following properties hold:*

- *If α is not included in $f^{N_1+2n}(R)$ then both the ends of α lie on $f^{N_1+2n}(\partial^s R)$.*
- *If $\text{int}(\alpha)$ has a non-empty intersection with $f^{-N_1}(R)$ then α does not have any end on $f^{-N_1}(\partial^s R)$.*

Proof This directly follows from lemma 5.48 with $k = N_1 + 2n$ (for the first assertion) and $k = -N_1$ (for the second assertion). \square

Properties (\star) and $(\star\star)$ and corollary 5.49 imply that we are only interested in u-arches α such that $\text{int}(\alpha) \subset f^{N_2}(R) \setminus f^{-N_2}(R)$ and such that the ends of α lie on $\partial^s f^{-N_2}(R)$ where $N_2 = N_1 + 2n$. Let us state a definition:

Definition 5.50 *We call unstable N_2 -ribbon the closure of any connected component of $f^{N_2}(R) \setminus f^{-N_2}(R)$.*

The definition of a Markov partition implies that every unstable N_2 -ribbon is an horizontal subrectangle of $f^{N_2}(R)$. In the language of ribbons, properties (\star) and $(\star\star)$ and corollary 5.49 imply that we are only interested in the u-arches which also are some unstable cross bar of a N_2 -ribbon.

On the other hand, a stable side of a N_2 -ribbon is a stable cross bar of $f^{N_2}(R)$. Corollary 5.37 implies that, if a segment of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ has a non-empty intersection with one stable side of an unstable N_2 -ribbon, then I contains this whole stable side.

Definition 5.51 *We define the saturation $\mathcal{I}_{sat}^N(I_0)$ of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ by unstable sides of unstable N -ribbons by replacing item (i) in the notation page 233 by*

(ibis) For every unstable side γ of an unstable N -ribbon, if one end of γ lies on a segment of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$, then both the ends of γ lie on a segment of $\mathcal{I}_{sat}^N(I_0)$,

Proposition 5.52 *Suppose that $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{isol}(I_0)$ are sets of s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(f, \mathcal{M})$.*

Then $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ is the saturation of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ by unstable sides of unstable N_2 -ribbons where $N_2 = N_1 + 2n$. Similarly, $\mathcal{J}_{sat}(I_0)$ is the saturation of $\mathcal{J}_{isol}(I_0)$ by stable sides of stable N_2 -ribbons. As a consequence, $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{sat}(I_0)$ are families of s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_2}(f, \mathcal{M})$ as soon as $N_2 \geq N_1 + 2n$.

Proof As already noticed, corollary 5.49 implies that $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ is the saturation of \mathcal{I}_{isol} by unstable cross bars of N_2 -ribbons. Moreover, if $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ intersects a stable side δ^s of a N_2 -ribbon then $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ contains δ^s . This proves that $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ is the saturation of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ by unstable sides of unstable N_2 -ribbons.

It remains to be proved that $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ is a set of s-chains of $\mathcal{R}_{N_2}(f, \mathcal{M})$:

— We first notice that $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ is included in the s-woof of $\mathcal{R}_{N_1}(f, \mathcal{M})$. The arguments are the following ones. First, $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ is included in the s-woof of $\mathcal{R}_{N_1}(f, \mathcal{M})$. Second, lemma 5.48 implies that, if one end of a u-arch γ lies on the s-woof of $\mathcal{R}_{N_1}(f, \mathcal{M})$, then both the ends of γ actually lie on this s-woof.

— We now prove that the ends of the segments of $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ lie on the u-woof of $\mathcal{R}_{N_2}(f, \mathcal{M})$: in fact, each end of a segment of $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ either is equal to the end of a segment of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$, or is a corner of an unstable N_2 -ribbon. In both cases, this end lies on the u-woof of $\mathcal{R}_{N_2}(f, \mathcal{M})$. \square

Remark As announced, we obtain some intermediate results which are stronger than theorem 5.32: we have results on the nature of the segments of $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$, $\mathcal{I}_{sat}(I_0), \dots$ but also on the nature of the u-arches which are used to saturate $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$.

Fourth step of the construction

We now have to find an upper bound for $p_{min}(I_0)$, that is some p_0 such that:

- (i) $f^{p_0}(\mathcal{I}_{sat}(I_0))$ contains the unstable boundary of the classes of unstable rails carried by $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$
- (ii) $f^{-p_0}(\mathcal{I}_{sat}(I_0))$ contains the stable boundary of the classes of stable rails carried by $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$.

Proposition 5.53 *Let us suppose that $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{sat}(I_0)$ are sets of s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_2}(f, \mathcal{M})$. Then $p_{min}(I_0) \leq 2(N_2 + 2n)$.*

Proof We will prove that the equivalence classes of unstable rails carried by $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ is a union of disjointed horizontal subrectangles of $f^{N_2+2n}(R)$. As a consequence, if $f^{p_0}(\mathcal{I}_{sat}(I_0))$ contains $\partial^u f^{N_2+2n}(R)$ then (i) will be satisfied. On the other hand, corollary 5.39 implies that $\mathcal{J}_{sat}(I_0)$ contains $\partial^u f^{-(N_2+2n)}(R)$. Hence, $p_0 \geq 2(N_2 + 2n)$ will be sufficient for (i) to be satisfied. By symmetry, the condition (ii) will lead to the same value of p_0 .

It remains to be proved that the equivalence classes of unstable rails carried by $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ are covered by disjointed horizontal subrectangles of $f^{N_2+2n}(R)$: Let us consider an unstable rail γ which is carried by $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$.

We know that $\text{int}(\gamma) \cap \mathcal{I}_{sat}(I_0) = \emptyset$. Corollary 5.39 implies that $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ contains $\partial^s f^{N_2+2n}(R)$. Hence $\text{int}(\gamma) \cap \partial^s f^{N_2+2n}(R) = \emptyset$. On the other hand, the ends of γ are points of $K = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^k(R)$ and thus lie in $f^{N_2+2n}(R)$. Thus, either γ is included in $f^{N_2+2n}(R)$ or $\text{int}(\gamma)$ is disjointed of $f^{N_2+2n}(R)$. In the second case, γ would be an arch which is not the case. Thus γ is included in $f^{N_2+2n}(R)$.

Let us now consider the unique horizontal subrectangle H of $f^{N_2+2n}(R)$ such that γ is included in H and such that the ends of γ lie on the two stable sides of H . A further use of corollary 5.37 proves that $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ contains $\partial^s H$ (see figure 5.10). Moreover $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ cannot intersect $H \setminus \partial^s H$. If it were the case, corollary 5.37 would imply that $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ would cross $H \setminus \partial^s H$ horizontally and thus would cross $\text{int}(\gamma)$; contradiction. As a consequence, H is a subclass of rails carried by $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$. \square

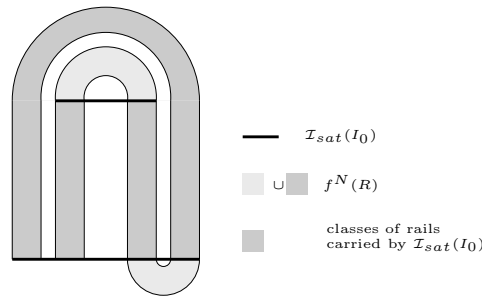


Figure 5.10: The rails carried by $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$

Proposition 5.54 *Let us suppose that $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{sat}(I_0)$ are sets of s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_2}(f, \mathcal{M})$. Then, for every $p \geq p_{min}(I_0)$, $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ and $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$ are sets of s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_2+p}(f, \mathcal{M})$.*

Proof The proposition follows from the definition of a family cutted out by another and from the two following facts:

- every segment of $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ is included in the s-woof of $\mathcal{R}_{N_2}(f, \mathcal{M})$,
- every segment of $f^p(\mathcal{J}_{sat}(I_0))$ is included in the u-woof of $\mathcal{R}_{N_2+p}(f, \mathcal{M})$. □

Corollaries 5.44 and 5.46, propositions 5.47, 5.52, 5.53 and 5.54 prove theorem 5.32.

5.3 N-cc-recursive functions. The function $\Pi_p : T \mapsto \mathcal{T}(T, p)$ is cc-recursive

In section 5.2, we have proved that the geometrical construction of $\mathcal{T}(f, K, p)$ can be performed without exiting the sets of crossings, s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_2+p}(f, \mathcal{M})$. The purposes of the present section are:

- to prove that the framework described in section 5.2 only depends on the geometrical type T of \mathcal{M} and not on the precise choices of f, K, \mathcal{M} .
- to prove that the construction of $\mathcal{T}(T, p)$ is algorithmic provided that a finite number of functions were pre-defined.

5.3.1 N-cc-recursive functions

Isomorphism of N-realization. N-realization of a geometrical type

The aim of the article is to describe a recursive function $T \mapsto \mathcal{T}(T, p)$. In particular, we have to bypass the use of a geometrical framework. An intermediate step consists in defining a notion of isomorphism of N-realizations.

Let f and g be some Smale diffeomorphisms of compact surfaces, let K and L be some 0-dimensional basic pieces of f and g and let $\mathcal{M} = \{R_i\}_{i=1\dots n}$ and $\mathcal{N} = \{Q_i\}_{i=1\dots n}$ be some Markov partitions of K and L .

We will say that the N -realization $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$ is *isomorphic* to the N -realization $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ if there exists an homeomorphism h from $\bigcup_{k=-N}^N f^k(R)$ to $\bigcup_{k=-N}^N g^k(Q)$ such that:

- (i) For every $i \leq n$, the homeomorphism h maps the rectangle R_i on the rectangle Q_i ,
- (ii) Moreover, h maps the oriented horizontal and vertical sides of R_i on the corresponding oriented horizontal and vertical sides of Q_i ,
- (iii) Finally, h conjugates the restrictions of f and g .

Remark One can already notice that (ii) and (iii) imply that, for every $\eta = b, t, l$ or r , every $i \leq n$ and every $-N \leq k \leq N$, the homeomorphism h maps the oriented side $\partial^\eta f^k(R_i)$ on the oriented side $\partial^\eta f^k(Q_i)$.

Using the notations of the preceding definition, theorem \star (stated in the introduction) has the following immediate corollary: *if \mathcal{M} and \mathcal{N} have the same geometrical type then $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ is isomorphic to $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$.* Conversely, this is clear that, if $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ is isomorphic to $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$, then \mathcal{M} and \mathcal{N} have the same geometrical type. This allows us to define the N -realization of a geometrical type:

Let T be realizable geometrical type. By definition, there exists a Smale diffeomorphism f such that one of the basic pieces of f admits a T -type Markov partition \mathcal{M} . We define the N -realization $\mathcal{R}_N(T)$ of T as the class of the N -realization $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ up to isomorphism of N -realization.

The remark above (for $k = -N$ and N) proves that every isomorphism h from $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ to $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$ maps the s and u-woofs of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ on the s and u-woofs of $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$. As a consequence, every isomorphism h induces a bijection from the set of the crossings of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ to the set of the crossings of $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$. As a further consequence, every isomorphism h induces two bijections from the sets of the s and the u-chains of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ to the sets of the s and the u-chains of $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$.

Moreover, for every automorphism h of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$, each oriented connected component of the s-woof and of the u-woof of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ is globally invariant under h . On the other hand, a crossing of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ is characterized by a maximal segment of the s-woof, a maximal segment of the u-woof and by a position on one of these two segments: namely, there exists only one crossing which is the l^{th} intersection of $\partial^\eta f^{-N}(R_i)$ and of $\partial^\zeta f^N(R_j)$ (where $\eta = b$ or t and $\zeta = l$ or r) when counting the intersection points according to the orientation of $\partial^\eta f^{-N}(R_i)$. This proves that every automorphism h of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ induces the identity map on the set of the crossings of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$. As a further consequence, every automorphism h of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ induces the identity map on the sets of the s and the u-chains of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$.

If \mathcal{M} is a T -type Markov partition, we may define a crossing of $\mathcal{R}_N(T)$ as the orbit of a crossing of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ under the action induced by the isomorphisms of $\mathcal{R}_N(T)$. The preceding discussion proves that such an orbit has exactly one point in each N -realization $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$ of the class $\mathcal{R}_N(T)$. In other words, one can identify the set of the crossings of $\mathcal{R}_N(T)$ with the set of the crossings of $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$ for every N -realization $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$ in the class $\mathcal{R}_N(T)$.

Similarly, one can define the sets of the s and the u-chains of $\mathcal{R}_N(T)$ which are identified with the sets of the s and the u-chains of $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$ for any $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$ in the class $\mathcal{R}_N(T)$. We will denote by $cr_N(T)$, $sc_N(T)$ and $uc_N(T)$ the sets of crossings, s and u-chains of the N -realization $\mathcal{R}_N(T)$.

Definition of the N -cc-elementary functions

We will now define a few elementary functions which manipulate the crossings, s and u-chains of the N -realization $\mathcal{R}_N(T)$. These elementary functions correspond to geometrical operations on the crossings, s and u-chains. The aim of the present section will be to prove that $T \mapsto \mathcal{T}(T, p)$ is an algorithmic combination of these elementary functions.

We first consider a Smale diffeomorphism f , a 0-dimensional basic piece K of f and a fitting T -type Markov partition $\mathcal{M} = \{R_i\}_{i=1..n}$ of K . We fix a positive integer N . We will first define some elementary functions acting on sets of crossings, s and u-chains of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ (in step **a**). Then, we will remark that these functions induce elementary functions acting on sets of crossings, s and u-chains of $\mathcal{R}_N(T)$ (in step **b**). Finally, we will consider the geometrical type T as a variable in the domains of some global elementary functions (in step **c**).

a) We denote by $cr_N(f, \mathcal{M})$, $sc_N(f, \mathcal{M})$ and $uc_N(f, \mathcal{M})$ the sets of crossings, s and u-chains of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$. Given any set E , we denote by $\mathcal{L}(E)$ the set of all the finite lists of elements of E . Here is the list of functions:

$$(1) \quad \begin{aligned} \Phi_{1,(f,\mathcal{M})}^l : \{1, \dots, n\} &\rightarrow uc_N(f, \mathcal{M}) \\ i &\mapsto \partial^l R_i \end{aligned}$$

Recall that $\partial^l R_i$ is the left side of the rectangle R_i . We define similarly the functions $\Phi_{1,(f,\mathcal{M})}^r$, $\Phi_{1,(f,\mathcal{M})}^b$ and $\Phi_{1,(f,\mathcal{M})}^t$ which map the integer i on the right, bottom and top sides of the rectangle R_i .

$$(2) \quad \begin{aligned} \Phi_{2,(f,\mathcal{M})}^s : sc_N(f, \mathcal{M}) &\rightarrow sc_N(f, \mathcal{M}) \\ \alpha &\mapsto f(\alpha) \end{aligned}$$

is only defined for s-chains α of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ such that $f(\alpha)$ is also a s-chain of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ (Recall that, *a priori* $f(\alpha)$ is a s-chain of $\mathcal{R}_{N+1}(f, \mathcal{M})$).

$$(\Phi_{2,(f,\mathcal{M})}^s)^{-1} : sc_N(f, \mathcal{M}) \rightarrow sc_N(f, \mathcal{M}) \\ \alpha \mapsto f^{-1}(\alpha)$$

is defined for s-chains α of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ such that $f^{-1}(\alpha)$ is also a s-chain of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$.

(3) $\Phi_{3,(f,\mathcal{M})}^s : sc_N(f, \mathcal{M}) \rightarrow (cr_N(f, \mathcal{M}))^2$ maps a s-chain $\alpha = [x, y]^s$ to the couple (x, y) : the crossings x and y are the left and right ends of α (any s-chain of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ inherits the orientation of the s-woof of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$; recall that left and right are defined such that the positive orientation goes from left to right)

$$(\Phi_{3,(f,\mathcal{M})}^s)^{-1} : (cr_N(f, \mathcal{M}))^2 \rightarrow sc_N(f, \mathcal{M}) \\ (x, y) \mapsto [x, y]^s$$

is defined on the range of $\Phi_{3,(f,\mathcal{M})}^s$ *that is* is only defined for couples of crossings (x, y) such that x and y lie on the same segment of s-woof and such that x is on the left of y according to the orientation of this segment.

(4) $\Phi_{4,(f,\mathcal{M})}^s : sc_N(f, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{L}(cr_N(f, \mathcal{M}))$ maps a s-chain α on the list of crossings which lie on α (ordered by the orientation of the s-woof).

(5) $\Phi_{5,(f,\mathcal{M})}^l : cr_N(f, \mathcal{M}) \rightarrow cr_N(f, \mathcal{M})$ is defined as follows: for every crossing x of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$,

— if there is a crossing of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ on the left of x (*that is* a crossing which lies on the same maximal segment of s-woof as x and which is on the left of x according to the orientation of this segment), then, by definition, $\Phi_{5,(f,\mathcal{M})}^l(x)$ is the crossing of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ which lies directly on the left of x .

— if there is no crossing on the left of x , then, by convention, $\Phi_{5,(f,\mathcal{M})}^l(x) = x$.

One defines similarly $\Phi_{5,(f,\mathcal{M})}^r$, $\Phi_{5,(f,\mathcal{M})}^b$ and $\Phi_{5,(f,\mathcal{M})}^a$ where r , b and a stands for “right”, “below” and “above”.

(6) $\Phi_{6,(f,\mathcal{M})}^s : \mathcal{L}(cr_N(f, \mathcal{M})) \rightarrow \mathcal{L}(cr_N(f, \mathcal{M}))$ is only defined for lists of crossings (x_1, \dots, x_n) of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ such that x_1, \dots, x_n all belong to the same connected component of the s-woof of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$. The function $\Phi_{6,(f,\mathcal{M})}^s$ arranges such a list of crossings (x_1, \dots, x_n) according to the order induced by the orientation of this connected component of the s-woof.

(7) $\Phi_{7,(f,\mathcal{M})}^s : (sc_N(f, \mathcal{M}))^2 \rightarrow \mathcal{L}(sc_N(f, \mathcal{M}))$ maps a couple of s-chains (α_1, α_2) to the list of the closures of the connected components of $\alpha_1 \setminus \alpha_2$ (No matter the order in the list. Notice that the closure of each connected component is a s-chain of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$).

(8) $\Phi_{8,(f,\mathcal{M})}^s : sc_N(f, \mathcal{M}) \rightarrow \{0, 1\}$ is only defined for s-chains α that are non trivial and minimal, *that is* for s-chains α which are not reduced to a point but which do not contain any crossing of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ in their interiors. Then, $\Phi_{8,(f,\mathcal{M})}^s$ answers 1 if α is a s-arch and 0 otherwise.

One can of course define some unstable analogs $\Phi_{2,(f,\mathcal{M})}^u$, $\Phi_{3,(f,\mathcal{M})}^u$, $\Phi_{4,(f,\mathcal{M})}^u$, $\Phi_{6,(f,\mathcal{M})}^u$, $\Phi_{7,(f,\mathcal{M})}^u$, $\Phi_{8,(f,\mathcal{M})}^u$ of the above functions.

b) Recall that the sets of crossings, s and u-chains of $\mathcal{R}_N(T)$ may be identified with the sets of crossings, s and u-chains of some N -realization $\mathcal{R}_N(f_T, \mathcal{M}_T)$ in the class $\mathcal{R}_N(T)$. This allow us to notice that the families of functions $\{\Phi_{1,(f,\mathcal{M})}^l\}$, $\{\Phi_{2,(f,\mathcal{M})}^s\}$, ... , induce families of functions $\{\Phi_{1,T}^l\}$, $\{\Phi_{2,T}^s\}$, ... , acting on the sets $cr_N(T)$, $sc_N(T)$ and $uc_N(T)$.

(The family $\{\Phi_{1,(f,\mathcal{M})}^l\}$ induces a family $\{\Phi_{1,T}^l\}$ because if h is a isomorphism from the N -realization $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ to the N -realization $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$, if $\mathcal{M} = \{R_i\}$ and $\mathcal{N} = \{Q_i\}$, then for every $i \leq n$, the homeomorphism h maps $\partial^l R_i$ on $\partial^l Q_i$.

The family $\{\Phi_{2,(f,\mathcal{M})}^s\}$ induces a family $\{\Phi_{2,T}^s\}$ because if h is a isomorphism from the N -realization $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ to the N -realization $\mathcal{R}_N(g, \mathcal{N})$, then h conjugates f and g .

We let the reader “prove” the claim for remaining families of functions.)

c) Finally, we consider the geometrical type T as a variable: for every e in $\text{Dom}(\Phi_{1,T}^l)$, let $\Phi_1^l(T, e) = \Phi_{1,T}^l(e)$. This defines a function Φ_1^l which domain is the union $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} (\{T\} \times \text{Dom}(\Phi_{1,T}^l))$ and which range is the union $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} \text{Ran}(\Phi_{1,T}^l)$. Of course, we define similarly the functions $\Phi_1^r, \dots, \Phi_2^s, \dots, \Phi_8^u$.

Note In order to be formal, we have to consider also some other elementary functions that are not really manipulations of crossings, s and u-chains but rather manipulation of lists:

- the function which maps T to the empty list of crossings of $\mathcal{R}_N(T)$ (resp. of s, u-chains),
 - the function which maps a list of crossings of $\mathcal{R}_N(T)$ to its cardinality (resp. s, u-chains),
 - the function which maps a list of crossings (resp. ...) of $\mathcal{R}_N(T)$ to its k^{th} element,
 - the function which adds a given crossing to a list of crossings of $\mathcal{R}_N(T)$ (resp. ...),
 - the function which takes off a given crossing of a list of crossings of $\mathcal{R}_N(T)$ (resp. ...).
- We will globally denote by $\{\Phi_0\}$ the set of these functions.

Definition 5.55 *The functions $\{\Phi_0\}, \Phi_1^l, \dots, \Phi_8^u$ will be called the N -cc-elementary functions (“cc” stands for crossings and chains).*

N -cc-recursivity

Definition 5.56 *We define a N -cc-recursive function as any function which is recursively defined with the help of N -cc-elementary functions.* ⁷

For many examples and properties of *recursive functions*, the reader is referred, for instance, to [Kle]. Actually, any function which can be described by what is usually called a finite algorithm is a recursive function (this assertion is known as *Church’s thesis*). Hence, a N -cc-recursive function is any function which can be described by an algorithm where the “crossings”, “s-chains” and “u-chains” are pre-defined data-structures and the N -cc-elementary functions are pre-defined functions. To prove the N -cc-recursivity of a function, we will give such an algorithmic description which we will call *N -cc-algorithm*.⁸

⁷The class \mathcal{R} of recursive functions is the smallest class of functions such that:

- the functions φ_1, φ_2 and φ_3 defined below belong to \mathcal{R} (for every non-negative integers n, q).
 - (1) $\varphi_1(x) = x + 1$ (2) $\varphi_2(x_1, \dots, x_n) = q$ (where x, x_1, x_2, \dots are non-negative integers);
 - (3) $\varphi_3(x_1, \dots, x_n) = x_i$
- if $\psi, \chi_1, \dots, \chi_m$ and χ belong to \mathcal{R} , then the functions φ_4 and φ_5 defined below belong to \mathcal{R} as well (y is a non-negative integer):
 - (4) $\varphi_4(x_1, \dots, x_n) = \psi(\chi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \chi_m(x_1, \dots, x_n))$
 - (5) $\varphi_5(0, x_2, \dots, x_n) = \psi(x_2, \dots, x_n)$
 $\varphi_5(y + 1, x_2, \dots, x_n) = \chi(y, \varphi_5(y, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$

Now, the class of N -cc-recursive functions is the smallest class of functions which verifies the properties of \mathcal{R} stated above and which contains the N -cc-elementary functions $\{\Phi_0\}, \Phi_1^l, \dots, \Phi_8^u$.

⁸Notice that the functions $\Phi_1^l, \Phi_1^r, \Phi_1^b$ and Φ_1^t have a special role in N -cc-recursive functions. Usual recursive functions are only dealing with integers. The functions $\Phi_1^l, \Phi_1^r, \Phi_1^b$ and Φ_1^t allow us to enter the world of crossings, s and u-chains

We can now state the theorem which constitutes the first part of the proof of theorem 5.2. The integer n is now fixed. Recall that we denote by \mathcal{T}_n the set of all the realizable transitive geometrical types with n rectangles and that we simply denote by \mathcal{T} the set of all the realizable transitive geometrical types. If $T \in \mathcal{T}_n$ and if N_0, N_1 and N_2 are integers such that $N_0 \geq 11n^2, N_1 \geq N_0 + 10n^2$ and $N_2 \geq N_1 + 2n$, it was proved in proposition 5.53 that $p_{min}(T)$ is less or equal than $2(N_2 + 2n)$. Moreover, we claim that:

Theorem 5.57 *For every $p \geq 2(N_2 + 2n)$, the function $\Pi_p : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$
 $T \mapsto \mathcal{T}(T, p)$*

is $(N_2 + p + 1)$ -cc-recursive.

5.3.2 The function Π_p is N -cc-recursive: proof of theorem 5.57

The results of section 5.2 can be considered as a preparation to the proof of theorem 5.57. In some sense, the results of section 5.2 prove that one can perform the construction of $\mathcal{T}(T, p)$, without exiting the sets of crossings, s and u-chains of $\mathcal{R}_N(T)$ for some N that we know *a priori*. The remaining part of the proof of theorem 5.57 consists in translating the construction of part 5.1.3 in a recursive combination of the N -cc-elementary functions. We will once again proceed step by step.

We fix some integers N_0, N_1 and N_2 such that $N_0 \geq 11n^2, N_1 \geq N_0 + 10n^2, N_2 \geq N_1 + 2n$. We fix an integer $p \geq 2(N_2 + 2n)$. Finally, N will be an integer bigger than $(N_2 + p + 1)$.

Given a geometrical type T , we will identify⁹ the crossings, s and u-chains of $\mathcal{R}_N(T)$ with the crossings, s and u-chains of a N -realization $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ is the class $\mathcal{R}_N(T)$. Recall that none of the N -cc-elementary functions and thus no N -cc-recursive function depends on the choice of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ in the class $\mathcal{R}_N(T)$.

Preliminaries

Let us first make a couple of remarks about N -cc-algorithms.

Remarks If $E(T)$ is a (finite) list of crossings, s or u-chains of $\mathcal{R}_N(T)$, we say that $E(T)$ is N -cc-constructible if the function $T \mapsto E(T)$ is N -cc-recursive.

— Assume that $E(T)$ is known to be N -cc-constructible. Then, the function of $\{\Phi_0\}$ which sends a list on its cardinality and the function which picks up the i^{th} element of a list allow us to use expressions of the type “for every e in $E(T)$ do ...” in N -cc-algorithms: this expression is equivalent to “for $i = 1$ to $\#E(T)$, let e be the i^{th} element of $E(T)$ and do ...”.

— Besides, assume that $E(T)$ is N -cc-constructible and Γ is a N -cc-recursive function defined on $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} (\{T\} \times E(T))$. Then, the list $L(T) = \{\Gamma(T, e)\}_{e \in E(T)}$ is N -cc-constructible:

⁹Formally, this means that for every geometrical type $T \in \mathcal{T}_n$, we choose f_T, K_T and \mathcal{M}_T such that \mathcal{M}_T is a T -type Markov partition of K_T and we identify the sets of crossings, s and u-chains of $\mathcal{R}_N(T)$ with those of $\mathcal{R}_N(f_T, \mathcal{M}_T)$. Nevertheless, as we will never use several geometrical types simultaneously, we will often forget the subscript.

- $L(T)$ is initialized with the empty list,
 - For every e in $E(T)$, we add $\Gamma(T, e)$ to $L(T)$
- (the function which adds a crossing, s or u-chain to a list is a function of $\{\Phi_0\}$)

Now, preliminarily to the proof of 5.57, we want to define two variations of the N -cc-elementary functions Φ_4 and Φ_7 :

Lemma 5.58 *The two following functions are N -cc-recursive:*

(4') $\Phi_{4'} : \bigcup_{T \in \mathcal{T}} (\{T\} \times sc_N(T) \times uc_N(T)) \rightarrow \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \mathcal{P}(cr_N(T))$ maps a triple (T, α, γ) to the list (x_1, \dots, x_r) of crossings which are in $\alpha \cap \gamma$.

(7') $\Phi_{7'}^s : \bigcup_{T \in \mathcal{T}} (\{T\} \times (sc_N(T))^2) \rightarrow \{0, 1\}$ maps a triple (T, α_1, α_2) on 1 if $\alpha_1 \subset \alpha_2$ and on 0 otherwise.

Remark If $E(T)$ and $F(T)$ are N -cc-constructible sets then $G(T) = E(T) \cap F(T)$ is also N -cc-constructible:

- $G(T)$ is initialized with the empty list
- For every e in $E(T)$, for every f in $F(T)$,
 - If $e = f$ then we add e to $G(T)$

Proof of lemma 5.58 For (4'), we use the preceding remark and the following equality:

$$\Phi_{4'}(T, \alpha, \gamma) = \Phi_4^s(T, \alpha) \cap \Phi_4^u(T, \alpha)$$

The N -cc-recursive of (7') follows from the N -cc-recursive of (7) (recall that the emptylist of crossings is provided by a function of $\{\Phi_0\}$):

$$\begin{aligned} \text{If } \Phi_7^s(T, \alpha_1, \alpha_2) = \emptyset \quad & \text{then } \Phi_{7'}^s(T, \alpha_1, \alpha_2) = 1 \\ \text{else } \Phi_7^s(T, \alpha_1, \alpha_2) &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

Finally, we want to state and prove one more preliminary lemma. The s-chains of $\mathcal{R}_N(T)$ which are identified to the periodic sides of \mathcal{M}_T are of special interest for the construction (because each periodic side of \mathcal{M}_T contains one and only one periodic boundary point). The following lemma will thus be useful at several steps:

Lemma 5.59 *The function $\Lambda^s : \mathcal{T}_n \rightarrow \bigcup_{T \in \mathcal{T}_n} \mathcal{L}(sc_N(T))$ is N -cc-recursive.*

$$T \mapsto \partial_{per}^s R_T$$

(In the statement of lemma 5.59, one should understand that $\Lambda^s(T)$ is the list of s-chains of $\mathcal{R}_N(T)$ which are identified to the connected components of $\partial_{per}^s R_T$ where R_T denotes the union of the rectangles of \mathcal{M}_T ; no matter of the order of the list.)

Proof lemma 5.59 It was noticed in subsection 5.2.1 that the period of a periodic stable side of a n -rectangles Markov partition is at most $2n$. This means that a stable side δ^s of \mathcal{M} is periodic if and only if there exists a positive integer $p \leq 2n$ such that $f^p(\delta^s) \subset \delta^s$. This leads to the following N -cc-algorithm:

- $\partial_{per}^s R$ is initialized with the empty list of s-chains of $\mathcal{R}_N(T)$.
- For every $i \leq n$,

- Let $\delta^b = \Phi_1^b(T, i)$
- If $(\Phi_7^s(T, \Phi_9^s(T, \delta^b), \delta^b) = 1)$ or ... or $(\Phi_7^s(T, (\Phi_9^s)^{2n}(T, \delta^b), \delta^b) = 1)$
then we add the s-chain δ^b in the list $\partial_{per}^s R$
- Let $\delta^t = \Phi_1^t(T, i)$
- If $(\Phi_7^s(T, \Phi_9^s(T, \delta^t), \delta^t) = 1)$ or ... or $(\Phi_7^s(T, (\Phi_9^s)^{2n}(T, \delta^t), \delta^t) = 1)$
then we add the s-chain δ^t in the list $\partial_{per}^s R$

This proves the N -cc-recursivity of Λ^s . □

Primitive s-boundary segments

The base of the geometrical construction of $\mathcal{T}(f, \mathcal{M}, p)$ consists in finding the positive class of one segment I_0 in each orbit of primitive s-boundary segments. When we try to translate the geometrical construction into a N -cc-algorithm, the following problem appears: primitive s-boundary segments can be assumed to be half-s-chains (in certain cases) but are not s-chains. Nevertheless, we are actually only interested in the intersections of the positive class $\mathcal{C}(I_0)$ with the u-woof of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ (in order to construct $\mathcal{J}_{init}(I_0)$). Hence, we pass around the problem by defining the following notion:

Definition 5.60 *Let $I = [x, a]^s$ be a half-s-chain of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ (where x is periodic). The s-chain $[I]$ associated to I will be the biggest s-chain which is included in $[x, a]^s$.*

Remark The s-chain $[I]$ associated to $I = [x, a]^s$ was defined in order to verify the following property: if J is any u-chain of $\mathcal{R}_N(T)$, then $[I] \cap J = [x, a]^s \cap J$.

If $\mathcal{C}(I_0)$ is the positive class of a primitive s-boundary segment I_0 and if the elements of $\mathcal{C}(I_0)$ are half-s-chains of $\mathcal{R}_N(T)$, then we will denote by $[\mathcal{C}(I_0)]$ the set of s-chains associated to the connected components of $\mathcal{C}(I_0)$. For the algorithmic construction of $\mathcal{T}(T, p)$, we will construct the set of s-chains $[\mathcal{C}(I_0)]$ for some primitive s-boundary segments I_0 .

Proposition 5.61 *For every $T \in \mathcal{T}_n$, there exists a subset $Prim(T)$ of $\mathcal{L}(sc_N(T))$ (that is $Prim(T)$ is a family of lists of s-chains) such that:*

- (i) *for every \mathcal{C} in $Prim(T)$, there exists a primitive s-boundary segment I_0 of K_T such that \mathcal{C} is identified with $[\mathcal{C}(I_0)]$. Moreover, the segments of the positive class $\mathcal{C}(I_0)$ are half-s-chains of $\mathcal{R}_{N_0}(f, \mathcal{M})$,*
- (ii) *for every primitive s-boundary segment I_0 of K_T , there exists an integer k and an element \mathcal{C} of $Prim(T)$ such that \mathcal{C} is identified to $[\mathcal{C}(f^k(I_0))]$,*
- (iii) *the function $\Psi_0 : T \mapsto Prim(T)$ is N -cc-recursive.*

Proof We define $Prim(T)$ as the family $\{[\mathcal{C}(I_0)]\}_{I_0 \in E(T)}$ where $E(T)$ is the set of primitive s-boundary segments I_0 of K_T such that:

- the segments of $\mathcal{C}(I_0)$ are half-s-chain of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$
- the segment $f^{-1}(I_0)$ is not a half-s-chain of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$

The set $Prim(T)$ obviously satisfies (i). On the other hand, corollary 5.44 proves that $Prim(T)$ satisfies (ii). It remains to find a N -cc-algorithmic construction of $Prim(T)$.

For the sake of clarity, we will not construct directly $Prim(T)$.

1) We first define $Prim_0(T)$ as the set of all the s-chains of $\mathcal{R}_N(T)$ which are associated to some primitive half-s-chains I_0 of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$ (by “primitive half-s-chain of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$ ”, we mean a primitive s-boundary segment which is a half-s-chain of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$). In other words, a s-chain I of $\mathcal{R}_N(T)$ is in $Prim_0(T)$ if and only if there exists a primitive half-s-chain I_0 of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$ such that $I = [I_0]$. (Notice that the elements of $Prim_0(T)$ are s-chains of $\mathcal{R}_N(T)$ whereas the elements of $Prim(T)$ are lists of s-chains of $\mathcal{R}_N(T)$). We will first give a N -cc-algorithmic construction of the set $Prim_0(T)$

2) Now, we denote by $Prim_1(T)$ the subset of $Prim_0(T)$ defined by: a s-chain I is in $Prim_1(T)$ if and only if I is associated to a primitive half-s-chain I_0 of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$ such that $[C(I_0)] \in Prim(T)$. We will give a N -cc-algorithmic characterization of the subset $Prim_1(T)$ of $Prim_0(T)$.

3) Finally, we will gather the s-chains of $Prim_0(T)$ which are in the same element of $Prim(T)$ (recall that an element of $Prim(T)$ is a list of s-chains of $Prim_0(T)$).

1) *Construction of $Prim_0(T)$*

The following remarks characterize the s-chains of $Prim_0(T)$.

- Each component of $f^N(\partial_{per}^s R)$ is a minimal s-chain of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ which contains a periodic s-boundary point. Hence, every s-chain α of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ which is associated to a half-s-chain of $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ can be written as $\alpha = [\tilde{a}, z]^s$ where \tilde{a} is one of the ends of a segment of $f^N(\partial_{per}^s R)$ (in this case, we misuse the notation $[\tilde{a}, z]^s$: \tilde{a} is not necessarily on the left of z).

- Moreover, if $\alpha = [\tilde{a}, z]^s$ is associated to a half-s-chain of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$ then z is a crossing of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$, that is $z \in (f^{-N_0}(\partial^s R) \cap f^{N_0}(\partial^u R))$.

- The half-s-chain to which $\alpha = [\tilde{a}, z]^s$ is associated is a primitive s-boundary segment if and only if there exists a periodic u-boundary point c such that $[\tilde{a}, z]^s \cap [c, z]^u = \{z\}$.

- As every component of $f^{-N}(\partial_{per}^u R)$ is a minimal u-chain and contains a periodic u-boundary point, the preceding item is equivalent to the following one: there exists an end \tilde{c} of a segment of $f^{-N}(\partial_{per}^u R)$ such that \tilde{c} and z are on the same segment of $f^{N_0}(\partial_{per}^u R)$ and $[\tilde{a}, z]^s \cap [\tilde{c}, z]^u = \{z\}$.

On the other hand, we will use the following fact:

- The function $T \mapsto Cl(f^{-N_0}(\partial_{per}^s R) \setminus f^N(\partial_{per}^s R))$ is N -cc-recursive (“Cl” stands for “closure”): this is obviously a combination of Λ^s , Φ_2^s , $(\Phi_2^s)^{-1}$ and Φ_7^s . Similarly, the function $T \mapsto Cl(f^{N_0}(\partial_{per}^u R) \setminus f^{-N}(\partial_{per}^u R))$ is N -cc-recursive.

The preceding discussion proves that the following N -cc-algorithm is a description of the function $T \mapsto Prim_0(T)$:

- $Prim_0(T)$ is initialized with the empty list of s-chains of $\mathcal{R}_N(T)$.
- For every s-chain I in $Cl(f^{-N_0}(\partial_{per}^s R) \setminus f^N(\partial_{per}^s R))$ and for every u-chain J in $Cl(f^{N_0}(\partial_{per}^u R) \setminus f^{-N}(\partial_{per}^u R))$

- Let $(a_1, a_2) = \Phi_3^s(T, I)$
- Let $\tilde{a} = a_1$ or a_2 according to whether a_1 or $a_2 \in f^N(\partial_{per}^s R) \equiv (\Phi_2^s)^N(T, \Lambda^s(T))$
- Let $(c_1, c_2) = \Phi_3^u(T, J)$
- Let $\tilde{c} = c_1$ or c_2 according to whether c_1 or $c_2 \in f^{-N}(\partial_{per}^u R) \equiv (\Phi_2^u)^{-N}(T, \Lambda^u(T))$
- For each point z of $I \cap J \equiv \Phi_{4'}(T, I, J)$,
 - If $[\tilde{a}, z]^s \cap [\tilde{c}, z]^u \equiv \Phi_{4'}(T, (\Phi_3^s)^{-1}(T, \Phi_6^s(\tilde{a}, z)), (\Phi_3^u)^{-1}(T, \Phi_6^u(\tilde{c}, z)))$ is reduced to $\{z\}$ then $[\tilde{a}, z]^s$ is the s-chain associated to a primitive s-boundary segment and we add $[\tilde{a}, z]^s$ in the list $Prim_0(T)$.

2) Construction of $Prim_1(T)$

For every $\mathcal{C} \in Prim(T)$, there exists a primitive s-boundary segment I_0 such that $\mathcal{C} = [\mathcal{C}(I_0)]$. Moreover, I_0 is a half-s-chain of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$ but $f^{-1}(I_0)$ is not a half-s-chain of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$. In other words, $[I_0]$ is in $Prim_0(T)$ but $[f^{-1}(I_0)]$ is not in $Prim_0(T)$.

Recall that $Prim_1(T)$ is the subset of $Prim_0(T)$ defined by $I \in Prim_1(T)$ if and only if $I = [I_0]$ and $[\mathcal{C}(I_0)] \in Prim(T)$. The preceding discussion proves that $I \in Prim_1(T)$ if and only if $I = [I_0]$ and $[f^{-1}(I_0)] \notin Prim_0(T)$.

Hence, we may characterize $Prim_1(T)$ as follows. A s-chain $I = [\tilde{a}, z]^s$ of $Prim_0(T)$ (where $z \notin f^N(\partial_{per}^u R)$) is in $Prim_1(T)$ if and only if $f^{-1}(z)$ is not an end of a s-chain of $Prim_0(T)$. This characterization is N -cc-algorithmic. We let the reader write the corresponding N -cc-algorithm.

3) Construction of $Prim(T)$

Now, for every $I = [I_0] = [\tilde{a}, z]^s$ in $Prim_1(T)$, the corresponding element of $Prim(T)$ is the list of s-chains of $Prim_0(T)$ which primitive ends are the points $z, f(z), \dots, f^{q-1}(z)$ where the integer q is characterized by $f^q(z) \in I$. We let the reader write the corresponding N -cc-algorithm.

This proves that the function $\Psi_0 : T \mapsto Prim(T)$ is recursive. □

From now onwards, we will not even really give any algorithmic description of functions. We will only give the key arguments which show how the construction can be reduced to a N -cc-algorithm. The algorithms themselves (precisely, the N -cc-algorithms) are usually obvious.

First step of the construction

For every list of s-chains \mathcal{C} of $Prim(T)$, there exists a primitive half-s-chain I_0 of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$ such that $\mathcal{C} = [\mathcal{C}(I_0)]$. For such a primitive s-boundary segment I_0 , corollary 5.46 proves that $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ are sets of s on u-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(T) \subset \mathcal{R}_N(T)$. This allows us to state the following:

Proposition 5.62 *Let $T \in \mathcal{T}$. By definition of $Prim(T)$, every element \mathcal{C} in $Prim(T)$, there exists a primitive half-s-chain I_0 of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$ such that $\mathcal{C} = [\mathcal{C}(I_0)]$.*

The function Ψ_1 defined on the set $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} (\{T\} \times Prim(T))$ by $\Psi_1(T, [\mathcal{C}(I_0)]) = (\mathcal{I}_{init}(I_0), \mathcal{J}_{init}(I_0))$ is N -cc-recursive.

Let us first define a couple of intermediate functions:

- $\Phi_9^u : \bigcup_{T \in \mathcal{T}} (\{T\} \times uc_N(T) \times \mathcal{L}(sc_N(T))) \rightarrow \bigcup_{T \in \mathcal{T}} uc_N(T)$ is defined for triples (T, J, \mathcal{I}) such that the u-chain J does not intersect the union of the s-chains of the list \mathcal{I} . For such a triple, $\Phi_9^s(T, J, \mathcal{I})$ is defined as follows :
 - Let $J = [a, b]^u$ (where a is below b according to the orientation of the u-woof).
 - Let a' be the first crossing below of a such that a' lies on a segment of \mathcal{I} . If such a crossing does not exist, let $a' = a$.
 - Let b' be the first crossing above b such that b' lies on a segment of \mathcal{I} . If such a crossing does not exist, let $b' = b$.
 - Now, $\Phi_9^s(T, J, \mathcal{I}) = [a', b']^u$.
- One defines similarly Φ_9^s .

Lemma 5.63 Φ_9^u and Φ_9^s are N -cc-recursive functions.

Proof The function Φ_9^u is mainly a combination of the N -cc-elementary functions Φ_5^b , Φ_5^a and Φ_4^s . Recall that :

- Given any crossing x , the function Φ_5^b allow us to test if there exists a crossing below x . If such a crossing exists, Φ_5^b returns the crossings which lies directly below x .
- The function Φ_4^s allow us to test if a crossing lies on a union of s-chains.

Thanks to Φ_5^b and Φ_5^a , one can continue a u-chain J in both directions until continuation is no more possible or until the ends of the continuation of J are in $\Phi_4^s(T, \mathcal{I})$. We leave the N -cc-algorithm to the reader. □

Proof proposition 5.62

- Recall that if $[\mathcal{C}(I_0)] \in Prim(T)$ then the elements of $\mathcal{C}(I_0)$ are half-s-chains of $\mathcal{R}_{N_0}(T)$. In that case, corollary 5.46 proves that $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ is a family of u-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(T) \subset \mathcal{R}_N(T)$.

- On the other hand, every u-chain of $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ is non-trivial and contains a periodic u-boundary point. Hence, every u-chain of J of $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ necessarily contains a u-chain J_{min} of the family $f^{-N}(\partial_{per}^u R)$ (corollary 5.39). Moreover,

- either there is no crossing strictly above J_{min} which lies on $\mathcal{C}(I_0)$; then the unstable separatrix above the top end of J_{min} is free and the top end of J necessarily coincides with the top end of J_{min} .

- or the top end of J is the first crossing above J_{min} which lies on $\mathcal{C}(I_0)$.

An analogous dichotomy holds for the bottom end of J .

- Finally, recall that s-chains associated with half-s-chains were defined in order to satisfy the following property : the intersection of $[\mathcal{C}(I_0)]$ with the u-woof of $\mathcal{R}_N(T)$ is equal to the intersection of $\mathcal{C}(I_0) \setminus \{\text{periodic s-boundary points of } K_T\}$ with the u-woof of $\mathcal{R}_N(T)$.

The three items above imply that $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ is the family of u-chains $\Phi_9^u(T, J_{min}, [\mathcal{C}(I_0)])$ where J_{min} ranges over the family of u-chains $f^{-N}(\partial_{per}^u R)$, that is

$$\mathcal{J}_{init}(I_0) = \{\Phi_9^u(T, J_{min}, [\mathcal{C}(I_0)])\}_{J_{min} \in (\Phi_2^u)^{-N}(\Lambda^u(T))}$$

Similar arguments prove that

$$\mathcal{I}_{init}(I_0) = \{\Phi_9^s(T, J_{min}, \mathcal{J}_{init}(I_0))\}_{J_{min} \in (\Phi_2^s)^N(\Lambda^s(T))}$$

This finally proves the N -cc-recursiveity of Ψ_1 . □

Second step of the construction

Proposition 5.47 proves that if $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ are lists of s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(T)$ then $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{isol}(I_0)$ also are lists of s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(T)$. On the other hand, the sets $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{isol}(I_0)$ respectively only depend on the sets $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ and not directly on I_0 . This gives a meaning to the following statement:

Proposition 5.64 *The function Ψ_2 defined on $Ran(\Psi_1)$ by $\Psi_2(T, \mathcal{I}_{init}(I_0), \mathcal{J}_{init}(I_0)) = (\mathcal{I}_{isol}(I_0), \mathcal{J}_{isol}(I_0))$ is N -cc-recursive.*

Proof The key argument is the following. Let $I = [a, b]^s$ be a s-chain of $\mathcal{R}_N(T)$ and let a' be the crossing which is directly on the right of a . Then:

— either $[a, a']$ is a s-arch and then I is not externally isolated near a and $[a', b]^s$ is the externally isolated segment associated to I .

— or $[a, a']$ is not a s-arch and then I is externally isolated near a .

We let the reader write the corresponding N -cc-algorithm. Recall that $\Phi_5^r(a)$ is the crossing which lies directly on the right of a and that one can use Φ_8^s to test if a minimal s-chain is a s-arch). □

Third step of the construction

Proposition 5.52 proves that if $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{isol}(I_0)$ are sets of s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(T)$ then the elements of the corresponding sets $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{sat}(I_0)$ are s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_2}(T) \subset \mathcal{R}_N(T)$. Moreover, $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{sat}(I_0)$ only depend on $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{isol}(I_0)$ and not on I_0 . Thus we can state the following:

Proposition 5.65 *The function Ψ_3 defined on $Ran(\Psi_2)$ by $(T, \mathcal{I}_{isol}(I_0), \mathcal{J}_{isol}(I_0)) \mapsto (\mathcal{I}_{sat}(I_0), \mathcal{J}_{sat}(I_0))$ is N -cc-recursive.*

Lemma 5.66 *The function which decides whether a list \mathcal{I} of s-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(T)$ is saturated by u-arches or not is N -cc-recursive.*

If \mathcal{I} is not saturated, let us denote by $Sat(\mathcal{I})$ the saturation of \mathcal{I} by u-arches. There exists a N -cc-recursive function defined for non-saturated lists of s-chains which maps a list \mathcal{I} to a crossing of $Sat(\mathcal{I}) \setminus \mathcal{I}$.

Proof Let \mathcal{I} be a union of s-chains of $\mathcal{R}_{N_1}(T)$. Recall that \mathcal{I} is saturated by u-arches if and only if \mathcal{I} is saturated by u-arches which are u-chains of $\mathcal{R}_{N_2}(T) \subset \mathcal{R}_N(T)$ (proposition 5.52). On the other hand, for every crossing x in \mathcal{I} , the point x is the end of two minimal u-chains of $\mathcal{R}_N(T)$: if y and z are the next crossing respectively above and below x , these two u-chains are $[x, y]^u$ and $[z, x]^u$. One and only one of these two minimal u-chains is a u-arch. Let $a(x) = y$ or z according to whether $[x, y]^u$ or $[z, x]^u$ is a u-arch. The family \mathcal{I} is saturated by u-arches if and only if $a(x) \in \mathcal{I}$ for every crossing x in \mathcal{I} . If \mathcal{I} is not saturated then there exists a crossing x lying on \mathcal{I} such that the crossing $a(x)$ lies on $Sat(\mathcal{I}) \setminus \mathcal{I}$. Using Φ_5^a , Φ_5^b , Φ_8^u and Φ_4^s , one can easily write the wanted N -cc-algorithms. □

Proof proposition 5.65 Using the preceding lemma, one may write a N -cc-algorithmic description of Ψ_3 :

We work with an intermediate list of s-chains that we denote by \mathcal{I} . The list \mathcal{I} is initialized with $\mathcal{I}_{isol}(I_0)$.

While \mathcal{I} is not saturated, the preceding lemma gives us a crossing a in $\text{Sat}(\mathcal{I}) \setminus \mathcal{I} = \mathcal{I}_{sat}(I_0) \setminus \mathcal{I}$. Proposition 5.52 implies that there exists one (and only one) s-chain I of \mathcal{I} which lies on the same maximal segment of s-woof as a (the s-chain I can be found using $\Phi_1^s, (\Phi_2^s)^{-N}, \Phi_7^s$, and Φ_4^s). One replaces I by $\Phi_9^s(T, I, \{[a, a]^u\})$ in the list \mathcal{I} .

After a finite number of steps, the family of segments \mathcal{I} is saturated (because there are only finitely many crossings of $\mathcal{R}_{N_2}(T)$). Then $\mathcal{I}_{sat}(I_0) = \mathcal{I}$. □

Fourth step of the construction

We will now translate the fourth step of the construction into a N -cc-algorithmic language. Recall that proposition 5.54 proves that, if $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{sat}(I_0)$ are set of s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_2}(T)$ then the corresponding $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ and $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$ are sets of s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_2+p}(T) \subset \mathcal{R}_N(T)$. Moreover the sets $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ and $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$ only depend on $\mathcal{I}_{sat}(I_0), \mathcal{J}_{sat}(I_0)$ and p . This gives a meaning to the following statement:

Proposition 5.67 *The function Ψ_4 defined by*

$(T, \mathcal{I}_{sat}(I_0), \mathcal{J}_{sat}(I_0), p) \mapsto (\mathcal{I}_{final}(I_0, p), \mathcal{J}_{final}(I_0, p))$ for $(\mathcal{I}_{sat}(I_0), \mathcal{J}_{sat}(I_0)) \in \text{Ran}(\Psi_3)$ and $p \geq p_{min}(I_0)$ is N -cc-recursive.

Proof Thanks to Φ_2^u , one can easily construct the u-chains of $\mathcal{R}_N(T)$ which are identified with $f^p(\mathcal{J}_{sat}(I_0))$.

Now, if I is a s-chain in $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$, one may consider the list of crossings $(x_1, x_2, \dots, x_r) = I \cap f^p(\mathcal{J}_{sat}(I_0)) \equiv \Phi_{4'}(T, I, f^p(\mathcal{J}_{sat}(I_0)))$. Up to a rearrangement (using Φ_6^s), one may assume the indexation of these crossings is induced by the orientation of I .

By hypothesis, the union of u-chains $f^p(\mathcal{J}_{sat}(I_0))$ contains the boundaries of the equivalence classes of unstable rails carried by $\mathcal{I}_{sat}(I_0)$. Hence, x_1 and x_r are the ends of I , the integer r is even and $[x_1, x_2]^s$ is not a s-arch, $[x_2, x_3]^s$ is a s-arch, $[x_3, x_4]^s$ is not a s-arch, $[x_4, x_5]^s$ is a s-arch, etc. The sublist of $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ corresponding to I is $[x_1, x_2]^s, [x_3, x_4]^s, [x_5, x_6]^s, \dots$ □

Construction of $\mathcal{T}(T, p)$

We are now given two families $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ and $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$ of s and u-chains of $\mathcal{R}_{N_2+p}(T) \subset \mathcal{R}_N(T)$ which we know to be the families of stable and unstable sides of a Markov partition $\mathcal{M}(I_0, p)$. We want to find the geometrical types of $\mathcal{M}(I_0, p)$.

Remark Recall (see the end of subsection 5.1.1) that there is not a single geometrical type but $2^n n!$ geometrical types which are associated to $\mathcal{M}(I_0, p)$. We let the reader write the recursive function Σ which given a geometrical type T_0 returns all the geometrical types of any T_0 -type Markov partition.

Proposition 5.68 *For every couple $(\mathcal{I}_{final}(I_0, p), \mathcal{J}_{final}(I_0, p))$ in $Ran(\Psi_4)$, the segments of the families $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ and $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$ are known to be the stable and unstable sides of a Markov partition $\mathcal{M}(I_0, p)$. There exists a N -cc-recursive function Θ_0 defined on $Ran(\Psi_4)$ which maps a triple $(T, \mathcal{I}_{final}(I_0, p), \mathcal{J}_{final}(I_0, p))$ to one geometrical type $T_0(I_0, p)$ of the partition $\mathcal{M}(I_0, p)$.*

Proof We fix the notation: $T_0(I_0, p) = (n_0, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi, \varepsilon)$.

Let us first notice that the number n_0 of rectangles of $\mathcal{M}(I_0, p)$ is half the cardinality of $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ (or of $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$).

We may now virtually reconstitute the rectangles Q_1, \dots, Q_r of $\mathcal{M}(I_0, p)$. By such, we mean recognize the segments of $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ and $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$ which are the left, right, bottom and top sides of a rectangle. This can be easily done thanks to the elementary functions Φ_3^s and Φ_3^u . We will now denote by $\partial^\eta Q_i$ (where $\eta = l, r, b, t$ and $1 \leq i \leq n_0$) the s and u-chains of the families $\mathcal{I}_{final}(I_0, p)$ and $\mathcal{J}_{final}(I_0, p)$.

The geometrical type $T_0(I_0, p)$ is now fixed by the indexation of the rectangles Q_i that we have chosen and by the orientation of $\partial^l Q_i$ and $\partial^t Q_i$ for every i . We can reconstitute $T_0(I_0, p)$ by considering the intersections between the stable sides of the rectangles of the partition Q_i and unstable sides of the images of the rectangles of the partition. For $\eta = l, r, b$ or t , we denote by $\partial^\eta Q$ the union of the sides $\partial^\eta Q_i$. The following N -cc-algorithm reconstitutes $T_0(I_0, p)$.

- For $i = 1$ to r
 - h_i is the cardinality of the intersection of $f(\partial^l Q_i)$ and $\partial^b Q$ that is the cardinality of $\Phi_{4'}(T, \Phi_2^u(T, \partial^l Q_i), \partial^b Q)$.
 - v_i is the cardinality of the intersection of $\partial^b Q_i$ and $f(\partial^l Q)$.
 - Let $(x_1, x_2, \dots, x_{2h_i}) = f(\partial^l Q_i) \cap \partial^s Q$, the order of the x_i being induced by the orientation of $f(\partial^l Q_i)$ (we use successively $\Phi_{4'}$ and Φ_6^u).
 - For $j = 1$ to h_i
 - Let k be the integer such that x_{2j-1} and x_{2j} both belong to $\partial^s Q_k$ (we use Φ_4^s).
 - If $x_{2j-1} \in \partial^b Q_k$ then
 - $\varepsilon(i, j) = +$
 - Let $2l - 1$ be the position of x_{2j-1} in the list of the crossings of $f(\partial^l Q) \cap \partial^b Q_k$, ordered according to the orientation of $\partial^b Q_k$.
 - Let $\Phi(i, j) \leftarrow (k, l)$.
 - else
 - $\varepsilon(i, j) = -$
 - Let $2l$ be the position of x_{2j-1} in the list of the crossings of $f(\partial^l Q) \cap \partial^t Q_k$ ordered according to the orientation of $\partial^t Q_k$.
 - Let $\Phi(i, j) \leftarrow (k, l)$.

□

Conclusion

Proof theorem 5.57 The functions Ψ_1, \dots, Ψ_4 , Θ_0 and Σ were defined such that Π_p is a combination of these functions. Precisely, the following equality holds:

$$\Pi_p(T) = \{\Sigma(\Theta_0(T, \Psi_4(T, \Psi_3(T, \Psi_2(T, \Psi_1(T, \mathcal{C}))))), p)\}_{\mathcal{C} \in \Psi_0(T)}$$

□

5.4 The function $\Pi_p : T \mapsto \mathcal{T}(T, p)$ is recursive

In the preceding section, we have proved that the construction of $\mathcal{T}(T, p)$ can be performed by an algorithm where some data structures (the crossings, s and u-chains of $\mathcal{R}_N(T)$) and a finite number of functions (the N -cc-elementary functions) were pre-defined. The aim of the present section is to code the crossings, s and u-chains (as 4-uples or 6-uples of integers and binary symbols) and to prove that the N -cc-elementary functions are recursive functions. This will imply that the function Π_p is recursive.

5.4.1 Definition of the powers of a geometrical type

We want to define some symbolic representations of the crossings, s and u-chains of the N -realization $\mathcal{R}_N(T)$, *that is* to code these crossings, s and u-chains as finite lists of integers, binary codes... For this purpose, we will use the $(2N)^{th}$ power of the geometrical type T that we define now:

As usual, let f be a Smale diffeomorphism and K be a 0-dimensional basic piece of f . For each $p \geq 1$, the set K is hyperbolic and saturated for the diffeomorphism f^p as well. Let us now consider a T -type Markov partition $\mathcal{M} = \{R_i\}$ of K (considered as a basic piece of f). For any $p \geq 1$, it is not difficult to check that \mathcal{M} satisfies the definition of a fitting Markov partition of K for the diffeomorphism f^p . Moreover, it is a direct consequence of theorem \star that the geometrical type of \mathcal{M} considered as a Markov partition for f^p only depends on T and not on the precise choices of f , K and \mathcal{M} . Hence, using above notations, we can define the p^{th} power $T^{(p)}$ of the geometrical type T as the geometrical type of \mathcal{M} considered as a fitting Markov partition for the diffeomorphism f^p .

Because of its technicity, we prefer to postpone the description of an algorithm which computes the p^{th} power $T^{(p)}$ of a geometrical type T to appendix A. In other words, in appendix A, we will prove that the function $\Theta : \mathcal{T} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{T}$ is recursive.

$$(T, p) \mapsto T^{(p)}$$

In the remainder of the section, every quantity which is related to the p^{th} power of T will always be denoted with (p) as a superscript: $T^{(p)} = \{n^{(p)}, h_i^{(p)}, v_i^{(p)}, \Phi^{(p)}, \varepsilon^{(p)}\}$.

Moreover, we will denote by $V_i^{j,(p)}$ (where $1 \leq j \leq v_i^{(p)}$) the fundamental vertical subrectangles of R_i when \mathcal{M} is considered as a rectangle of a Markov partition for f^p . In other words, the subrectangles $V_i^{j,(p)}$ are the connected components of $R_i \cap f^p(R)$. We will denote by $H_i^{j,(p)}$, where $1 \leq j \leq h_i^{(p)}$, the fundamental horizontal subrectangles of R_i when \mathcal{M} is considered as a Markov partition for f^p . The subrectangles $H_i^{j,(p)}$ are the components of $f^{-p}(f^p(R_i) \cap R)$.

Remark Let us recall that proposition 5.9 states that, if p and q are two integers such that $q \geq p$, the intersection $f^q(R) \cap R$ is contained in the intersection $f^p(R) \cap R$. This implies

that, if $q \geq p$, each $V_i^{j,(q)}$ is a vertical subrectangle of some $V_i^{l,(p)}$ (because $R_i \cap f^q(R)$ is a subset of $R_i \cap f^p(R)$). Similarly, each $H_i^{j,(q)}$ is an horizontal subrectangle of some $H_i^{l,(p)}$.

5.4.2 Symbolic representations of crossings, s and u-chains

We are now going to define some symbolic representations of the crossings, s and u-chains of $\mathcal{R}_N(T)$ thanks to the geometrical type $T^{(2N)}$.

Notations 1 *The notation $\eta = l/r$ will mean that η is a binary symbol which is either equal to l or to r . If $\varepsilon = \pm$, the binary symbol $\eta' = \varepsilon\eta$ is equal to η if $\varepsilon = +$ and is the contrary of η if $\varepsilon = -$. In other words, ($\eta' = \eta$ if $\varepsilon = +$), ($\eta' = r$ if $\varepsilon = -$ and $\eta = l$) and ($\eta' = l$ if $\varepsilon = -$ and $\eta = r$).*

We will now identify the sets of crossings, s and u-chains of $\mathcal{R}_N(T)$ with the sets of crossings, s and u-chains of a N -realization $\mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$ of the class $\mathcal{R}_N(T)$. A crossing x of $\mathcal{R}_N(T)$ can be naturally coded in two different ways:

- We denote by y the point $f^N(x)$. As x lies on the s-woof of $\mathcal{R}_N(T)$ there exist $i \leq n$ and $\eta = b/t$ such that y lies on $\partial^\eta R_i$. As x also lies on the u-woof of $\mathcal{R}_N(T)$, there exist $q \leq n$ and $\nu = l/r$ such that $f^{-2N}(y) = f^{-N}(x)$ lies on $\partial^\nu R_q$. This implies that there exist $j \leq v_i^{(2N)}$ and $\xi = l/r$ such that y lies on $\partial^\xi V_i^{j,(2N)}$. Let us remark that i, η, j and ξ are unique and that the two assertions “ y lies on $\partial^\eta R_i$ ” and “ y lies on $\partial^\xi V_i^{j,(2N)}$ ” characterize uniquely the point $x = f^{-N}(y)$.
- On the other hand, let us denote by z the point $f^{-N}(x)$. As x lies on the u-woof of $\mathcal{R}_N(T)$ there exist $k \leq n$ and $\zeta = l/r$ such that z lies on $\partial^\zeta R_k$. As x also lies on the s-woof, there exist $r \leq n$ and $\theta = b/t$ such that $f^{2N}(z) = f^N(x)$ lies on $\partial^\theta R_r$. This implies that there exist $l \leq h_k^{(2N)}$ and $\mu = b/t$ such that z lies on $\partial^\mu H_k^{l,(2N)}$. The values of k, ζ, l and μ are unique and characterize uniquely the point $x = f^N(z)$.

Definition 5.69 *Let x be a crossing of $\mathcal{R}_N(T) \simeq \mathcal{R}_N(f, \mathcal{M})$.*

- *We will call s-symbolic representation of x the quadruple (i, η, j, ξ) such that $1 \leq i \leq n$, $\eta = b/t$, $1 \leq j \leq v_i^{(2N)}$, $\xi = l/r$ and $f^N(x)$ lies on $\partial^\eta R_i \cap \partial^\xi V_i^{j,(2N)}$.*
- *We will call u-symbolic representation of x the quadruple (k, ζ, l, μ) such that $1 \leq k \leq n$, $\zeta = l/r$, $1 \leq l \leq h_k^{(2N)}$, $\mu = b/t$ and $f^{-N}(x)$ lies on $\partial^\zeta R_k \cap \partial^\mu H_k^{l,(2N)}$.*

Remark If i and j are integers such that $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq v_i^{(2N)}$, if $\eta = b/t$ and $\xi = l/r$ then $\partial^\eta R_i$ and $\partial^\xi V_i^{j,(2N)}$ have one and only one intersection point. Thus, the set of crossings of $\mathcal{R}_N(T)$ is in bijection via s-symbolic representations with the set of 4-uples (i, η, j, ξ) which verify $i \leq n$, $\eta = b/t$, $j \leq v_i^{(2N)}$ and $\xi = l/r$. Similarly, the set of crossings is in bijection via u-symbolic representations with the set of 4-uples (k, ζ, l, μ) which verify $k \leq n$, $\zeta = l/r$, $l \leq h_k^{(2N)}$ and $\mu = b/t$.

Given the s-symbolic representation of a crossing, we will have to be able to compute its u-symbolic representation and conversely. Let us first note that if $f^N(x)$ lies in $V_i^{j,(2N)}$

then $f^{-N}(x)$ lies in $H_k^{l,(2N)}$ where $\Phi^{(2N)}(k, l) = (i, j)$. On the other hand, if $f^N(x)$ lies on $\partial^n R_i$ then $f^{-N}(x)$ lies on $\partial^\mu H_k^{l,(2N)}$ where $\mu = \varepsilon^{(2N)}(k, l)\eta$ and if $f^N(x)$ lies on $\partial^\xi V_i^{j,(2N)}$ then $f^{-N}(x)$ lies on $\partial^\zeta R_k$ where $\zeta = \varepsilon^{(2N)}(k, l)\xi$ (we use the notations defined above). This proves the following proposition:

Proposition 5.70 *Let x be a crossing of $\mathcal{R}_N(T)$ with s -symbolic representation (i, η, j, ξ) and u -symbolic representation (k, ζ, l, μ) . We have the following relations:*

$$(i, j) = \Phi^{(2N)}(k, l) \qquad \mu = \varepsilon^{(2N)}(k, l)\eta \qquad \zeta = \varepsilon^{(2N)}(k, l)\xi.$$

In particular, the function which maps the s -symbolic representation of a crossing to the u -symbolic representation of this crossing is recursive.

We now want to define some symbolic representations of s and u -chains of $\mathcal{R}_N(T)$. We will need the following lemma and definition:

Lemma and definition 5.71 *We consider the set C_s of crossings which lie on a given maximal segment $f^{-N}(\partial^n R_i)$ of the s -woof of $\mathcal{R}_N(T)$. We will denote by \prec_s the order induced on s -symbolic representations of the crossings of C_s by the orientation of $f^{-N}(\partial^n R_i)$. This order is the following:*

$$\dots \prec_s (i, \eta, j - 1, \text{right}) \prec_s (i, \eta, j, \text{left}) \prec_s (i, \eta, j, \text{right}) \prec_s (i, \eta, j + 1, \text{left}) \prec_s \dots$$

Similarly, let C_u be the set of crossings which lie on a given maximal segment $f^N(\partial^\zeta R_k)$ of the u -woof of $\mathcal{R}_N(T)$. We will denote by \prec_u the order induced on s -symbolic representations of the crossings of C_u by the orientation of $f^N(\partial^\zeta R_k)$. This order is the following:

$$\dots \prec_u (k, \zeta, l - 1, \text{top}) \prec_u (k, \zeta, l, \text{bottom}) \prec_u (k, \zeta, l, \text{top}) \prec_u (l, \zeta, l + 1, \text{bottom}) \prec_u \dots$$

Proof This directly follows from the definition of s and u -symbolic representations. \square

Definition 5.72 *Let I be a s -chain of \mathcal{R}_N and denote by x and y the left and the right ends of I . The crossings x and y lie on the same segment of s -woof and x is on the left of y . This implies that the s -symbolic representations of x and y are of type (i, η, j_1, ξ_1) and (i, η, j_2, ξ_2) with $(i, \eta, j_1, \xi_1) \prec_s (i, \eta, j_2, \xi_2)$. We will call symbolic representation of I the 6-uple $(i, \eta, j_1, \xi_1, j_2, \xi_2)$.*

Similarly, let J be a non-empty u -chain of \mathcal{R}_N and denote by x and y its bottom and top ends. The crossings x and y are on the same segment of u -woof and x is under y . The u -symbolic representations of x and y are of type (k, ζ, l_1, μ_1) and (i, ζ, l_2, μ_2) with $(k, \zeta, l_1, \mu_1) \prec_u (k, \zeta, l_2, \mu_2)$. We will call symbolic representation of J the 6-uple $(k, \zeta, l_1, \mu_1, l_2, \mu_2)$.

Symbolic representation realizes a bijection from the set of s -chains of \mathcal{R}_N to the set of 6-uples $(i, \eta, j_1, \xi_1, j_2, \xi_2)$ verifying $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j_1, j_2 \leq v_i^{(2N)}$, $\eta = b/t$, $\xi_1, \xi_2 = l/r$ and $(i, \eta, j_1, \xi_1) \prec_s (i, \eta, j_2, \xi_2)$. Similarly, it realizes a bijection from the set of u -chains of \mathcal{R}_N to the set of 6-uples $(k, \zeta, l_1, \mu_1, l_2, \mu_2)$ verifying $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l_1, l_2 \leq h_k^{(2N)}$, $\zeta = l/r$, $\mu_1, \mu_2 = b/t$ and $(k, \zeta, l_1, \mu_1) \prec_u (k, \zeta, l_2, \mu_2)$.

5.4.3 Symbolic elementary functions are recursive

Given a geometrical type T , let us denote by $\widetilde{cr}_N(T)$, the set of s-symbolic representations of the crossings of $\mathcal{R}_N(T)$, by $\widetilde{sc}_N(T)$ and $\widetilde{uc}_N(T)$ the sets of symbolic representations of the s and u-chains of $\mathcal{R}_N(T)$. Symbolic representations induce three bijections from $cr_N(T)$ to $\widetilde{cr}_N(T)$, from $sc_N(T)$ to $\widetilde{sc}_N(T)$ and from $uc_N(T)$ to $\widetilde{uc}_N(T)$. We define symbolic elementary functions by conjugating cc-elementary functions by these bijections. We will denote by $\widetilde{\Phi}_1^s, \widetilde{\Phi}_2^s$, etc, the symbolic elementary functions. Namely,

- $\widetilde{\Phi}_1^l : \bigcup_{T \in \mathcal{T}} (\{T\} \times \{1, \dots, n\}) \rightarrow \bigcup_{t \in \mathcal{T}} \widetilde{sc}_N(T)$ maps a triple (T, i) on the the symbolic representation of the s-chain $\partial^l R_i$ of $\mathcal{R}_N(T)$.
- $\widetilde{\Phi}_2^s : \bigcup_{T \in \mathcal{T}} (\{T\} \times \widetilde{sc}_N(T)) \rightarrow \bigcup_{t \in \mathcal{T}} \widetilde{sc}_N(T)$ maps the symbolic representation of a s-chain α to the symbolic representation of $f(\alpha)$.
- etc.

The definition of symbolic elementary functions can be naturally extended in order to define a symbolic analog of every N -cc-recursive function. Namely, a N -cc-recursive function Ψ is defined by a series of applications of the five classical elementary recursive functions and of the functions $\{\Phi_0\}, \Phi_1^l, \dots, \Phi_8^u$ (see the footnote, page 251). The symbolic analog of Ψ is the function defined by the same series of applications of the five classical elementary recursive functions and of the functions $\{\widetilde{\Phi}_0\}, \widetilde{\Phi}_1^l, \dots, \widetilde{\Phi}_8^u$. Notice that, for every p , as $\text{Dom}(\Pi_p)$ and $\text{Ran}(\Pi_p)$ do not involve any crossing, s or u-chain, the function Π_p is its own symbolic analog. The aim of this last subsection is to prove the following:

Theorem 5.73 *The symbolic elementary functions $\{\widetilde{\Phi}_0\}, \widetilde{\Phi}_1^l, \dots, \widetilde{\Phi}_8^u$ are recursive.*

Remark Recall that strictly speaking, a recursive functions is a function from a subset of \mathbb{N}^p to a subset of \mathbb{N}^q . In the statement of theorem 5.73, it should be understood that we consider the binary codes l/r or b/t as integers and that a list of symbolic representation is identified with the concatenation of the symbolic representations.

Notice that the functions of $\{\widetilde{\Phi}_0\}$ are now clearly recursive (On one hand, a list of crossings, s or u-chains are represented as concatenations of the symbolic representations of the elements of the list. On the other hand, the function $\varphi_3(x_1, \dots, x_n) = x_i$, where x_1, \dots, x_n are integers, is by definition recursive).

Proof theorem 5.2 Theorem 5.73 implies that the symbolic analog of any N -cc-recursive function is recursive. In particular, thanks to theorem 5.57, this implies theorem 5.2. \square

The proof of theorem 5.73 will be splitted in a few propositions and remarks in order to regroup the symbolic elementary functions which recursivity can be proved using similar techniques.

Remark We have used s-symbolic representations of crossings to define some symbolic analogs of N -cc-recursive functions. Nevertheless, the function which maps the s-symbolic representation of a crossing to the u-symbolic representation of this crossing is recursive (proposition 5.70; we use the fact that the function $T \mapsto T^{(2N)}$ is recursive). As a

consequence, we may use indifferently s or u-symbolic representations of crossings in the proofs.

Remark One may already notice that the recursivity of the symbolic elementary functions $\widetilde{\Phi}_3$ and $\widetilde{\Phi}_3^{-1}$ directly follows from the construction of the symbolic representation of a s or u-chain by concatenation of the symbolic representations of its ends.

Proposition 5.74 *The symbolic elementary functions $\widetilde{\Phi}_4$, $\widetilde{\Phi}_5$, $\widetilde{\Phi}_6$ and $\widetilde{\Phi}_7$ are recursive.*

Proof The recursivity of the symbolic elementary functions $\widetilde{\Phi}_4$, $\widetilde{\Phi}_5$ and $\widetilde{\Phi}_6$ immediately follows from the description of the orders \prec_s and \prec_u induced on symbolic representations of crossings by the orientation of the s and u-woofs of $\mathcal{R}_N(T)$ (see lemma and definition 5.71).

In order to obtain a recursive description of $\widetilde{\Phi}_7$, one only has to distinguish the possible mutual dispositions of two given s or u-chains lying on the same segment of s or u-woof and then use \prec_s and \prec_u . We let the reader write these recursive descriptions. \square

Proposition 5.75 *The symbolic elementary function $\widetilde{\Phi}_8$ is recursive.*

Proof Let I be a minimal s-chain of $\mathcal{R}_N(T)$. We first claim that I is a s-arch if and only if I is not included in $f^N(R)$.

In fact, I is either included in $f^N(R)$ or its interior is disjointed of $f^N(R)$ (because I is minimal, see lemma 5.36). If the interior of I is disjointed of $f^N(R)$ then the interior of I is disjointed of K and I is a s-arch. Conversely, let us suppose that I is included in $f^N(R)$. If I were a s-arch, the second item of corollary 5.49 would imply that I would not have any end on $\partial^u f^N(R)$. But I is a s-chain and therefore both the ends of I precisely lie on $\partial^u f^N(R)$. Thus I is not a s-arch.

In other words, a non-trivial minimal s-chain I of $\mathcal{R}_N(T)$ is a s-arch if and only if I is included in $\cup_{i,j} V_i^{j,(2N)}$. The minimality of I and the order \prec_s implies that the symbolic representation of I either is of the type $(i, \eta, j, \text{left}, j, \text{right})$ and then I is included in $f^N(R)$ and is a s-arch, or is of the type $(i, \eta, j, \text{right}, j + 1, \text{left})$ and then $\text{int}(I) \cap f^N(R) = \emptyset$ and I is not a s-arch. The case of u-chains is similar. \square

In order to prove the recursivity of $\widetilde{\Phi}_1$, $\widetilde{\Phi}_2$ and $\widetilde{\Phi}_2^{-1}$, we will first have to define and compute some extra-quantities. Let p and q be two positive integers such that $q \geq p$. Let us recall that each horizontal subrectangle $H_i^{j,(q)}$ is a horizontal subrectangle of $H_i^{l,(p)}$ for some $l \leq h_i^{(p)}$ and each vertical subrectangle $V_i^{j,(q)}$ is a vertical subrectangle of $V_i^{l,(p)}$ for some $l \leq v_i^{(p)}$. This allows us to define:

- $\theta_{i,j}^{(p),(q)}$ as the number of horizontal subrectangles $H_i^{j,(q)}$ of $T^{(q)}$ contained in the union of horizontal subrectangles $H_i^{1,(p)} \cup \dots \cup H_i^{j,(p)}$ of $T^{(p)}$.
- $\nu_{k,l}^{(p),(q)}$ as the number of vertical subrectangles $V_k^{j,(q)}$ of $T^{(q)}$ contained in the union of vertical subrectangles $V_k^{1,(p)} \cup \dots \cup V_k^{l,(p)}$ of $T^{(p)}$.

Proposition 5.76

For every $\alpha \leq h_i^{(p)}$, let $(k_\alpha, l_\alpha) = \Phi^{(p)}(i, \alpha)$. Then $\theta_{i,j}^{(p),(q)} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=j} h_{k_\alpha}^{(q-p)}$.
 For every $\beta \leq v_k^{(p)}$, let $(i_\beta, j_\beta) = (\Phi^{(p)})^{-1}(k, \beta)$. Then $\nu_{k,l}^{(p),(q)} = \sum_{\beta=0}^{\beta=l} v_{i_\beta}^{(q-p)}$.

Proof For every $\alpha \leq h_i^{(p)}$, the number of horizontal subrectangles $H_i^{(q)}$ of $T^{(q)}$ contained in $H_i^{\alpha,(p)}$ is the number of connected components of $f^q(H_i^{\alpha,(p)}) \cap R$. On the other hand, $f^q(H_i^{\alpha,(p)}) = f^{q-p}(f^p(H_i^{\alpha,(p)})) = f^{q-p}(V_{k_\alpha}^{l_\alpha,(p)})$ where $(k_\alpha, l_\alpha) = \Phi^{(p)}(i, \alpha)$.

This implies that the number of horizontal subrectangles $H_i^{(q)}$ of $T^{(q)}$ contained in $H_i^{\alpha,(p)}$ is the number of connected components of $f^{q-p}(V_{k_\alpha}^{l_\alpha,(p)}) \cap R$. This last number is equal to the number of connected components of $f^{q-p}(R_{k_\alpha}) \cap R$, that is, by definition, $h_{k_\alpha}^{(q-p)}$. This proves the first formula. The second formula may be proved using similar arguments. \square

In particular, the function $(i, j, p, q) \mapsto \theta_{i,j}^{(p),(q)}$ and $(i, j, p, q) \mapsto \nu_{i,j}^{(p),(q)}$ are recursive (we use the recursivity of $\Theta : (T, p) \mapsto T^{(p)}$). We can now prove the following:

Proposition 5.77 *The symbolic elementary functions $\tilde{\Phi}_1$ is recursive.*

Proof To prove the recursivity of $\tilde{\Phi}_1$, we have to find the symbolic representation of the sides of the rectangles of \mathcal{M} . Thanks to $\tilde{\Phi}_3$ and $\tilde{\Phi}_3^{-1}$ (which recursivity has already been proved), it suffices to find the symbolic representations of the corners of the rectangles of \mathcal{M} . As an example, we will compute the s-symbolic representation of the bottom-left corner x of R_k .

The point x lies on $\partial^b H_k^{1,(N)}$. As a consequence, the point $f^N(x)$ lies on $\partial^\eta V_i^{j',(N)} \subset \partial^\eta R_i$ where $(i, j') = \Phi^{(N)}(k, 1)$ and $\eta = b/t$ according to whether $\varepsilon^{(N)}(k, 1) = +/ -$.

Moreover, $f^N(x)$ lies on $\partial^\xi V_i^{j',(N)}$ where $\xi = l/r$ according to whether $\varepsilon^{(N)}(k, 1) = +/ -$. Hence, the point $f^N(x)$ lies on $\partial^\xi V_i^{j,(2N)}$ where $(j = \nu_{i,j'-1}^{(N),(2N)} + 1$ if $\xi = l$) and $(j = \nu_{i,j'}^{(N),(2N)}$ if $\xi = r$).

The s-symbolic representation of x is, by definition, (i, η, j, ξ) . The formulae explicited along the proof show that the function $(T, k) \mapsto (i, \eta, j, \xi)$ is recursive (notice that we have once again used the recursivity of $\Theta : (T, p) \mapsto T^{(p)}$ which will be proved in appendix A). The case of the other corners can be treated with similar arguments. \square

Proposition 5.78 *The symbolic elementary functions $\tilde{\Phi}_2$ and $(\tilde{\Phi}_2)^{-1}$ are recursive.*

Proof Given the symbolic representation of a s-chain of $\mathcal{R}_N(T)$, we have to find the symbolic representation of its image by f (provided that this image is also a s-chain of $\mathcal{R}_N(T)$). Thanks to $\tilde{\Phi}_3$ and $\tilde{\Phi}_3^{-1}$, we can reduce our problem to the following: given the s-symbolic representation of one crossing x of $\mathcal{R}_N(T)$, how can we compute the s-symbolic representation of its image by f (provided that $f(x)$ is also a crossing of $\mathcal{R}_N(T)$). Let (i, η, j, ξ) be the s-symbolic representation of x .

- The first part of the s-symbolic representation of x indicates that $f^N(x)$ lies on $\partial^\eta R_i$.

If we define m by $(m = 1$ if $\eta = b)$ and $(m = h_i^{(1)}$ if $\eta = t)$, then $f^N(x)$ always lies on $\partial^\eta H_i^{m,(1)}$. This implies that $f^N(f(x))$ lies on $\partial^\mu V_k^{r,(1)} \subset \partial^\mu R_k$ where $(k, r) = \Phi^{(1)}(i, m)$ and $\mu = \varepsilon^{(1)}(i, m)\eta$. The s-symbolic representation of $f(x)$ is of the type (k, μ, \cdot, \cdot) .

- The second part of the s-symbolic representation of x indicates that $f^N(x)$ lies on $\partial^\xi V_i^{j,(2N)}$.

But $f(x)$ is a crossing of \mathcal{R}_N , hence we know that $f^N(x)$ actually lies on $\partial^\xi V_i^{j',(2N-1)}$ for some $j' \leq v_i^{(2N-1)}$. Proposition 5.76 allows us to compute j' . If $\xi = \text{left}$ then j' is the integer such that $j = \nu_{i,j'-1}^{(2N-1),(2N)} + 1$. If $\xi = \text{right}$ then j' is the integer such that $j = \nu_{i,j'}^{(2N-1),(2N)}$.

The point $f^N(x)$ is on the ξ side of the $(j')^{\text{th}}$ vertical subrectangle of $T^{(2N-1)}$ of R_i . Thus $f^N(f(x))$ is on the ζ side of the $(j')^{\text{th}}$ vertical subrectangle of $T^{(2N)}$ of $V_k^{r,(1)}$ counting from left or right according to whether $\varepsilon^{(1)}(i, m) = +/ -$ and where $\zeta = \varepsilon^{(1)}(i, m)\xi$. This means that $f^N(f(x))$ is on the ζ side of the l^{th} vertical subrectangle of $T^{(2N)}$ of R_k where $l = \nu_{k,r-1}^{(1),(2N)} + j'$ if $\varepsilon^{(1)}(i, m) = +$ and $l = \nu_{k,r}^{(1),(2N)} + 1 - j'$ if $\varepsilon^{(1)}(i, m) = -$.

The s-symbolic representation of $f(x)$ is (k, μ, l, ζ) . Using the formulae explicited in the proof, the reader may write the function $\tilde{\Phi}_2 : (T, (i, \eta, j, \xi)) \mapsto (k, \mu, l, \zeta)$ as a recursive function. The recursivity of $\tilde{\Phi}_2^{-1}$ can be proved in a similar way. \square

Appendix A. An algorithm for the product of geometrical types

The main goal of this appendix is to prove that the computation of the powers of a geometrical type is an algorithmic operation, *that is* to prove that the function $\Theta : (T, p) \mapsto T^{(p)}$ is recursive. Actually, we will not write explicetely an algorithm but rather describe a method which can be easily translated into an algorithm.

Besides, we put the computation of the powers of a geometrical type in its natural context: under some hypotheses, we will define the product $T_2 \circ T_1$ of two geometrical types T_1 and T_2 and give an algorithmic description of the function $(T_1, T_2) \mapsto T_2 \circ T_1$.

We suppose that we are given two Smale diffeomorphisms f and g acting on the same compact surface and such that there exists a set K which is a basic piece for f , g and $g \circ f$. Moreover, we assume that there exists a finite collection of rectangles $\mathcal{M} = \{R_i\}_{i=1..n}$ which is a fitting Markov partition of K for both the diffeomorphisms f and g (typically, we are in this situation when f and g are some powers of the same diffeomorphism). As usual, we denote by R the union of the rectangles of \mathcal{M} . Finally, we assume that f , g and R verify the following property: $g(f(R)) \cap R = g(f(R) \cap R) \cap R \quad (\star)$

One easily checks that property (\star) implies that \mathcal{M} is a fitting Markov of K for the diffeomorphism $g \circ f$. Let us denote by T_1 , T_2 and $T_3 = T_2 \circ T_1$ the geometrical types of \mathcal{M} considered as a fitting Markov partition of K for the diffeomorphisms f , g and $g \circ f$. The aim of this appendix is to give an algorithmic description of the function $(T_1, T_2) \mapsto T_3 = T_2 \circ T_1$.

Remarks

— Proposition 5.9 implies that property (\star) is always verified if f and g are some powers of the same diffeomorphism. This allows us to compute the powers of a geometrical type.

Therefore, if we want to compute the powers of a single geometrical type T , we just will have to specialize the algorithm to the case $(T_1 = T^{(r)}, T_2 = T^{(s)})$.

— It may happen that \mathcal{M} is a Markov partition of $g \circ f$ even if the property (\star) is not verified. Nevertheless, property (\star) is fundamental to compute T_3 .

The integers and functions which constitute T_1 and T_2 will be denoted as follows: $T_1 = \{n, h_i^{(1)}, v_i^{(1)}, \Phi^{(1)}, \varepsilon^{(1)}\}$ and $T_2 = \{n, h_i^{(2)}, v_i^{(2)}, \Phi^{(2)}, \varepsilon^{(2)}\}$.

We will denote by $H_{\cdot}^{(1)}$ the fundamental horizontal subrectangles of \mathcal{M} considered as a Markov partition for f . Recall that this means that the subrectangles $H_{\cdot}^{(1)}$'s are the connected components of $f^{-1}(f(R) \cap R)$. Similarly, we will denote by $H_{\cdot}^{(2)}$ and $H_{\cdot}^{(3)}$ the fundamental horizontal subrectangles of \mathcal{M} respectively considered as a Markov partition for g and $g \circ f$.

We will denote by $V_{\cdot}^{(1)}$ the fundamental vertical subrectangles of \mathcal{M} considered as a Markov partition for f . This means that the $V_{\cdot}^{(1)}$'s are the connected components of $f(R) \cap R$. Similarly, we will denote by $V_{\cdot}^{(2)}$ and $V_{\cdot}^{(3)}$ the fundamental vertical subrectangles of \mathcal{M} respectively considered as a Markov partition for g and $g \circ f$.

Preliminaries

Property (\star) implies that every connected component of $g \circ f(R) \cap R$ is included in a connected component of $g(R) \cap R$. Using our notations, every vertical subrectangle $V_k^{j,(3)}$ is included in the vertical subrectangle $V_k^{l,(2)}$ for some $l \leq h_i^{(2)}$. During the computation of T_3 , we will need some quantitative information about these inclusions. Namely, we define, for every $k \leq n$ and every $l \leq v_k^{(2)}$, the integer $\nu_{k,l}$ as the number of vertical subrectangles of the type $V_k^{j,(3)}$ contained in the union $V_k^{1,(2)} \cup \dots \cup V_k^{l,(2)}$. The proof of the following formula is entirely similar to those of the formulae of proposition 5.76:

For every $\beta \leq v_k^{(2)}$, let $(i_{\beta}, j_{\beta}) = (\Phi^{(2)})^{-1}(k, \beta)$. Then $\nu_{k,l} = \sum_{\beta=0}^{\beta=l} v_{i_{\beta}}^{(1)}$.

Image by $[g]$ of $(R_i, +)$. Image by $[f]$ of $(R_m, +)$

While the computation of products of subshifts, of graph maps,... and of many symbolic dynamical systems is straightforward, the computation of products of geometrical types is quite technical. One convenient way to compute the product of two geometrical types is to write them as substitutions. We will adopt this point of view.

For every $i \leq n$, the geometrical type T_2 contains some information relative to the disposition of $g(R_i)$ with respect to R . Namely, the information contained in T_2 is the following:

- The connected components of $g(R_i) \cap R$ are the vertical subrectangles $V_{k_1}^{l_1,(2)}, \dots, V_{k_s}^{l_s,(2)}$ where $s = h_i^{(2)}$, where $(k_1, l_1) = \Phi^{(2)}(i, 1), \dots$ and $(k_s, l_s) = \Phi^{(2)}(i, s)$.
- The order of the sequence $(V_{k_1}^{l_1,(2)}, \dots, V_{k_s}^{l_s,(2)})$ is induced by the orientation of the vertical sides of R_i (via g) (recall that $V_{k_1}^{l_1,(2)}, \dots, V_{k_s}^{l_s,(2)}$ are horizontal subrectangles of $g(R_i)$).
- For every $\beta \leq s$, the vertical sides of $V_{k_{\beta}}^{l_{\beta},(2)}$ inherit two orientations: the orientation of the vertical sides of R_i (via g) and the orientation of the vertical sides of $R_{k_{\beta}}$. These

orientations coincide if and only if $\varepsilon_\beta^{(2)} \equiv \varepsilon^{(2)}(i, \beta) = +$.

We propose to write this information as follows:

$$[g] : (R_i, +) \longrightarrow (V_{k_1}^{l_1, (2)}, \varepsilon_1^{(2)}), \dots, (V_{k_s}^{l_s, (2)}, \varepsilon_s^{(2)}) \quad (*)$$

(Although it is not explicit, the right member of course depends on i). The sign $+$ in $(R_i, +)$ means that the rectangle R_i is endowed with the initial orientation of its vertical sides. The expression above will be called the image of $(R_i, +)$ by $[g]$. Let us give a general definition:

Definition 5.79 *Let Q be a subrectangle of a rectangle R_i of the Markov partition \mathcal{M} .*

• *We say that the image by $[g]$ of $(Q, +)$ is defined if every connected component $g(Q) \cap R$ is both a vertical subrectangle of R and an horizontal subrectangle of $g(Q)$.*

• *In this case, the image by $[g]$ of $(Q, +)$ is defined as the sequence $(V_1, \varepsilon_1), \dots, (V_s, \varepsilon_s)$ where:*

(i) *We suppose that the vertical sides of Q inherit of the orientation of the vertical sides of R_i ; then the vertical sides of $g(Q)$ inherit these orientations via g .*

(ii) *The subrectangles V_β 's are the connected components of $g(Q) \cap R$.*

(iii) *The order of the sequence $(V_1, \varepsilon_1), \dots, (V_s, \varepsilon_s)$ is induced by the orientation of the vertical sides of $g(Q)$.*

(iv) $\varepsilon_\beta = +$ or $-$ according to whether the orientation of the vertical sides of $g(Q)$ coincide or not with the orientation of the vertical sides of V_β .

The information carried by the geometrical type of a Markov partition $\mathcal{N} = \{Q_i\}$ of a diffeomorphism h is equivalent to the information carried by the images by $[h]$ of the $(R_i, +)$'s (where $i = 1 \dots n$). Hence, one can reformulate our goal as follows: to compute the image by $[g \circ f]$ of $(R_m, +)$ for every $m \leq n$.

In order to fix our notations, let us also write the images by $[f]$ of $(R_m, +)$ (where m is any integer such that $m \leq n$):

$$[f] : (R_m, +) \longrightarrow (V_{i_1}^{j_1, (1)}, \varepsilon_1^{(1)}), \dots, (V_{i_r}^{j_r, (1)}, \varepsilon_r^{(1)}) \quad (**)$$

Image by $[g]$ of $(R_i, -)$

We define the image by $[g]$ of $(Q, -)$ by reversing the orientation of the vertical sides of Q in item (i) of the preceding definition. We clearly have:

$$[g] : (R_i, -) \longrightarrow (V_{k_s}^{l_s, (2)}, -\varepsilon_s^{(2)}), \dots, (V_{k_1}^{l_1, (2)}, -\varepsilon_1^{(2)})$$

where $k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_s, \varepsilon_1^{(2)}, \dots, \varepsilon_s^{(2)}$ are defined by (*).

The geometrical types T_2 and T_1 considered as substitutions

One can easily checks that property (\star) implies:

— that the images by $[g]$ of $(V_i^{j, (1)}, +)$ and $(V_i^{j, (1)}, -)$ are defined for every $i \leq n$ and $j \leq h_i^{(1)}$

— that the image by $[g \circ f]$ of $(R_m, +)$ is the list obtained by concatenation of the images by $[g]$ of $(V_{i_1}^{j_1, (1)}, \varepsilon_1^{(1)}), \dots, (V_{i_r}^{j_r, (1)}, \varepsilon_r^{(1)})$ where $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r, \varepsilon_1^{(1)}, \dots, \varepsilon_r^{(1)}$ are defined by (**).

In that sense, geometrical types may be considered as substitutions: if one substitutes the images by $[g]$ of the $(V_{i_\beta}^{j_\beta, (1)}, \varepsilon_\beta)$'s for the $(V_{i_\beta}^{j_\beta, (1)}, \varepsilon_\beta)$'s themselves in the image by $[f]$ of $(R_m, +)$ then one obtains the image of $(R_m, +)$ by $[g \circ f]$.

Our goal is now to compute the images by $[g]$ of $(V_i^{j, (1)}, +)$ and $(V_i^{j, (1)}, -)$ for every $i \leq n$ and $j \leq h_i^{(1)}$.

Images by $[g]$ of $(V_i^{j, (1)}, +)$ and $(V_i^{j, (1)}, -)$

- $V_i^{j, (1)}$ is a vertical subrectangle of the rectangle R_i . As a consequence, $g(V_i^{j, (1)}) \cap R$ is constituted of one vertical subrectangle of the type $V_{k_\beta}^{j_\beta, (3)}$ in each $V_{k_\beta}^{l_\beta, (2)}$ (for $\beta = 1 \dots s$).
- More precisely, $V_i^{j, (1)}$ is the j^{th} vertical subrectangle of the type $V_i^{j, (1)}$ in R_i (when counting the vertical subrectangles according to the orientation of the horizontal sides of R_i). As a consequence, $g(V_i^{j, (1)}) \cap V_{k_\beta}^{l_\beta, (2)}$ is the j^{th} subrectangle of the type $V_{k_\beta}^{j_\beta, (3)}$ in $V_{k_\beta}^{l_\beta, (2)}$ when counting according to the orientation of the horizontal sides of $V_{k_\beta}^{l_\beta, (2)}$ if $\varepsilon_\beta^{(2)} = +$ and counting according to the reversed orientation of the horizontal sides of $V_{k_\beta}^{l_\beta, (2)}$ if $\varepsilon_\beta^{(2)} = -$.
- In other words, for every $\beta \leq s \equiv h_i^{(2)}$, $g(V_i^{j, (1)}) \cap V_{k_\beta}^{l_\beta, (2)} = V_{k_\beta}^{j_\beta, (3)}$ where $j_\beta = \nu_{k_\beta}^{l_\beta - 1} + j$ if $\varepsilon_\beta^{(2)} = +$ and $j_\beta = \nu_{k_\beta}^{l_\beta} + 1 - j$ if $\varepsilon_\beta^{(2)} = -$.

Hence, the image of $(V_i^{j, (1)}, +)$ by $[g]$ is given by the following expression:

$$[g] : (V_i^{j, (1)}, +) \longrightarrow (V_{k_1}^{j_1, (3)}, \varepsilon_1^{(2)}), \dots, (V_{k_s}^{j_s, (3)}, \varepsilon_s^{(2)})$$

where $j_\beta = \nu_{k_\beta}^{l_\beta - 1} + j$ if $\varepsilon_\beta^{(2)} = +$ and $j_\beta = \nu_{k_\beta}^{l_\beta} + 1 - j$ if $\varepsilon_\beta^{(2)} = -$. Similarly, we can deduce the image by $[g]$ of $(V_i^{j, (1)}, -)$ from the image by $[g]$ of $(R_i, -)$.

Conclusion

Recall that the geometrical type T_1 gives us the image of $(R_m, +)$ by $[f]$:

$$[f] : (R_m, +) \longrightarrow (V_{i_1}^{j_1, (1)}, \varepsilon_1^{(1)}), \dots, (V_{i_s}^{j_s, (1)}, \varepsilon_s^{(1)})$$

Substituting the image by $[g]$ of $(V_{i_\beta}^{j_\beta, (1)}, \varepsilon_\beta^{(1)})$ for $(V_{i_\beta}^{j_\beta, (1)}, \varepsilon_\beta^{(1)})$ in this expression (for every $\beta = 1 \dots s$), we obtain the image by $[g \circ f]$ of $(R_m, +)$.

The procedure we have described can easily be translated into an algorithm which computes the function $(T_1, T_2) \mapsto T_2 \circ T_1$. Let us summarize the algorithm:

- (1) Translate the information contained in T_1 into n lists which represent the images by $[f]$ of $(R_1, +), \dots, (R_n, +)$.
- (1') Translate the information contained in T_2 into n lists which represent the images by $[g]$ of $(R_1, +), \dots, (R_n, +)$.
- (1'') From the lists obtained in (1'), deduce n lists representing the images by $[g]$ of $(R_1, -), \dots, (R_n, -)$.

- (2) From the lists obtained in (1'), deduce some lists representing the images by $[g]$ of $(V_i^{j,(1)}, +)$ for every $i \leq n$ and every $j \leq h_i^{(1)}$.
- (2') Similarly, from the lists obtained in (1''), deduce some lists representing the images by $[g]$ of $(V_i^{j,(1)}, -)$ for every $i \leq n$ and every $j \leq h_i^{(1)}$.
- (3) Substitute the lists representing the images by $[g]$ of $(V_{i_\beta}^{j_\beta,(1)}, \varepsilon_\beta^{(1)})$ for $(V_{i_\beta}^{j_\beta,(1)}, \varepsilon_\beta^{(1)})$ in the image by $[f]$ of $(R_m, +)$ (do that for every $\beta = 1 \dots s$ and for every $m \leq n$). We obtain n lists representing the images by $[g \circ f]$ of $(R_1, +), \dots, (R_n, +)$.
- (4) Transform the n lists obtained in (3) in the geometrical type $T_2 \circ T_1$.

Notice the formulae which are necessary to write this algorithm were all given along this appendix.

Appendix B. An example: Primitive geometrical types of Smale's horseshoe

Before showing a representation of the 3-realization of T , it may be useful to recall that T is given by: $n = 1, h_1 = v_1 = 2, \Phi(1, 1) = (1, 1), \varepsilon(1, 1) = +$.

$$\Phi(1, 2) = (1, 2), \varepsilon(1, 2) = -$$

We also recall that Smale's horseshoe has a unique periodic boundary that we will denote by x . The point x actually is a fixed point and is both a s and a u-boundary point.

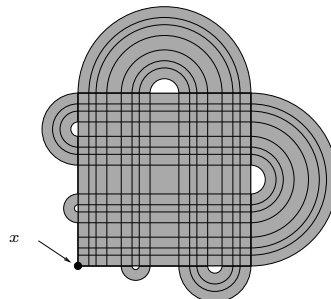


Figure 5.11: The realization \mathcal{R}_3 of T

The following figure represents the s-chains associated to the two primitive s-boundary segments (one segment in each orbit of primitive s-boundary segments) that will be used for the construction of $\mathcal{T}(T, 2)$.

The construction of $\mathcal{I}_{init}(I_0^1), \mathcal{J}_{init}(I_0^1), \mathcal{I}_{init}(I_0^2)$ and $\mathcal{J}_{init}(I_0^2)$ is straightforward (see figure 5.13).

It appears that the example we are studying leads to families $\mathcal{I}_{isol}(I_0^i)$ and $\mathcal{J}_{isol}(I_0^i)$ which are already saturated respectively by u and s-archs. Hence, the third step of the construction does not modify the families of segments.

As one may see on figure 5.15, it happens that (for both $i = 1$ and $i = 2$) the segments of the family $f^2(\mathcal{J}_{sat}(I_0^i))$ contain the unstable boundaries of the classes of unstable rails carried by $\mathcal{I}_{sat}(I_0^i)$ and that the segments of the family $\mathcal{I}_{sat}(I_0^i)$ contain the

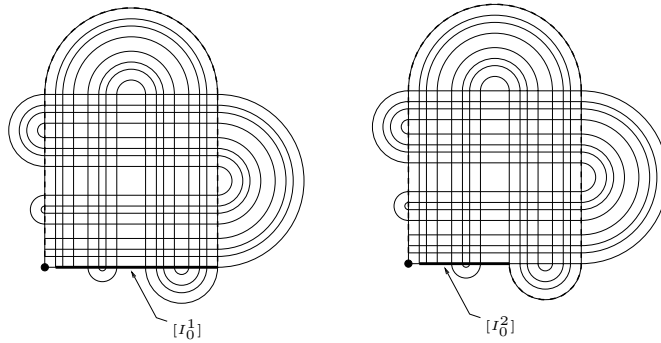


Figure 5.12: The s-chains $[I_0^1] = [\mathcal{C}(I_0^1)]$ and $[I_0^2] = [\mathcal{C}(I_0^2)]$ associated to the primitive s-boundary segments I_0^1 and I_0^2 (one segment in each orbit)

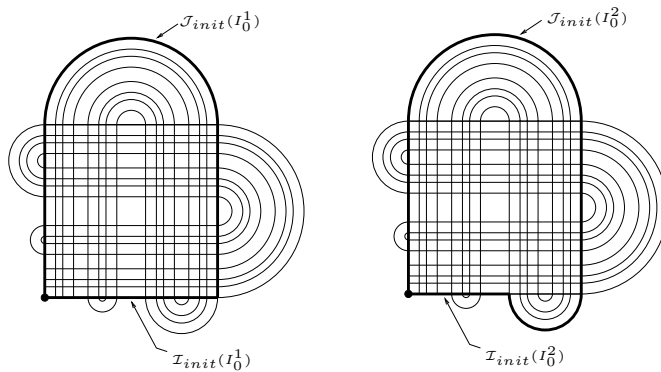


Figure 5.13: The sets of segments $\mathcal{I}_{init}(I_0^i)$ and $\mathcal{J}_{init}(I_0^i)$ with $i = 1, 2$

stable boundaries of the classes of stable rails carried by $f^2(\mathcal{J}_{sat}(I_0^i))$. Thus $p_{min}(f, K) = 2$ and we will construct one representative of each orbit of $\mathcal{M}(f, K, 2)$.

Finally, the set $\mathcal{T}(T, 2)$ contains two geometrical types : T itself and the geometrical type defined by $n = 2, h_1 = h_2 = v_1 = v_2 = 2$ and

$$\begin{aligned} \Phi(1, 1) &= (1, 1), \varepsilon(1, 1) = +, . \\ \Phi(1, 2) &= (2, 2), \varepsilon(1, 2) = -, \\ \Phi(2, 1) &= (1, 2), \varepsilon(2, 1) = +, \\ \Phi(2, 2) &= (2, 1), \varepsilon(2, 2) = - \end{aligned}$$

Appendix C. Comments on the non-transitive case

The transitivity assumption for the geometrical types was made in order to simplify the algorithm. Nevertheless, the reader might have noticed that, during the article, we have rarely used directly the transitivity of the hyperbolic set K but rather one of its consequences (see the “important remark” page 226):

- (i) either K is reduced to a single orbit and then, the problem is trivial,
- (ii) or each leaf of $W^s(K)$ (resp. of $W^u(K)$) is accumulated, at least on one side, by $W^s(K)$ (resp. of $W^u(K)$).

If K is a (non-necessarily transitive) hyperbolic saturated set which satisfies (ii), we say that K has *no double-boundary*. The construction of $\mathcal{M}(f, K, p)$ and the algorithm of

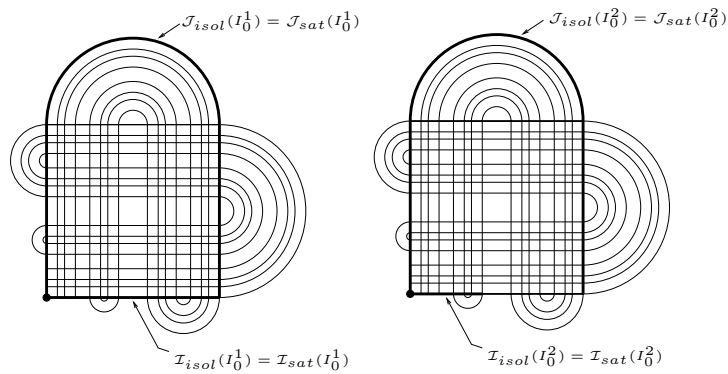


Figure 5.14: The sets of externally isolated segments $\mathcal{I}_{isol}(I_0^i) = \mathcal{I}_{sat}(I_0^i)$ and $\mathcal{J}_{isol}(I_0^i) = \mathcal{J}_{sat}(I_0^i)$

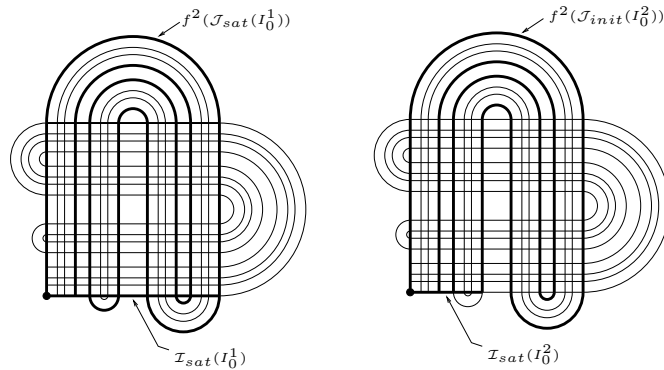


Figure 5.15: The sets of saturated segments $\mathcal{I}_{sat}(I_0^i)$ and $f^2(\mathcal{J}_{sat}(I_0^i))$

theorem 5.2 can be easily modified in order to take into account hyperbolic sets which are not necessarily transitive but have no double-boundary.

Actually, the only step that has to be modified is the construction of the families $\mathcal{I}_{init}^0(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}^0(I_0)$. Namely, lemma 5.22 is not correct if K is not transitive and has to be replaced by the following:

Lemme 5.22bis *Let Λ be a basic piece of K and W be a stable (resp. unstable) non-free separatrix of Λ (by such, we mean that W is not free even when considered as part of Λ and not only when considered as part of K). Then W^u is dense in $W^s(\Lambda)$ (resp. $W^u(\Lambda)$).*

If K has no double-boundary then every point has at least one non-free stable and one non-free unstable separatrix. This remark and lemma 5.22bis are sufficient to prove that the construction below leads to families $\mathcal{I}_{init}^0(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}^0(I_0)$ containing a segment on each non-free boundary separatrix:

Construction

— We define $\mathcal{J}_{init,1}^0(I_0)$ as the family of all the minimal unstable segments joining a periodic u-boundary point to a point of $\mathcal{C}(I_0)$.

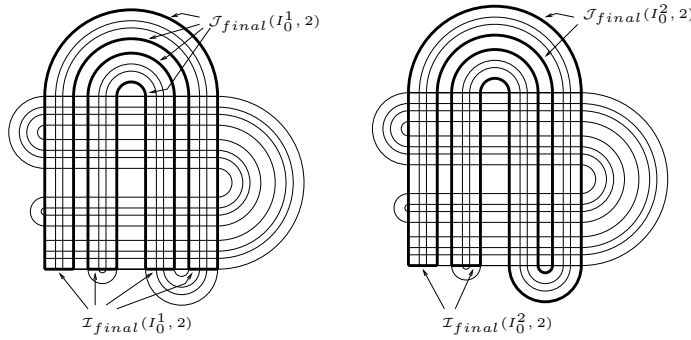


Figure 5.16: The sides of the Markov partitions of $\mathcal{M}(I_0^i, 2)$

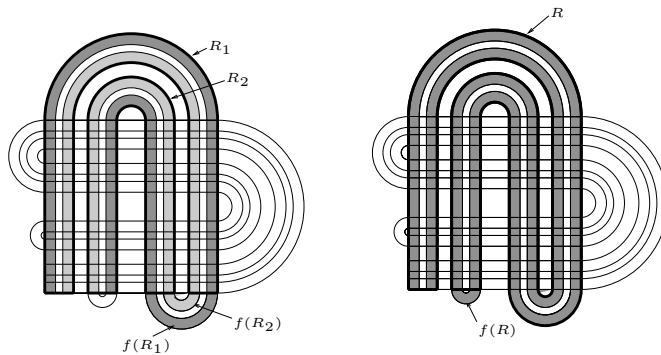


Figure 5.17: The final Markov partitions

- We define $\mathcal{I}_{init,1}^0(I_0)$ as the family of all the minimal stable segments joining a periodic s-boundary point to a point of $\mathcal{J}_{init,1}^0(I_0)$.
- We define $\mathcal{J}_{init,2}^0(I_0)$ as the family of all the minimal unstable segments joining a periodic u-boundary point to a point of $\mathcal{I}_{init,1}^0(I_0)$.
- We define $\mathcal{I}_{init,2}^0(I_0)$ as the family of all the minimal stable segments joining a periodic s-boundary point to a point of $\mathcal{J}_{init,2}^0(I_0)$.
- etc, until $\mathcal{I}_{init,k}^0(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init,k}^0(I_0)$ contains a segment on each non-free boundary separatrix. Then we define $\mathcal{I}_{init}^0(I_0) = \mathcal{I}_{init,k}^0(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}^0(I_0) = \mathcal{J}_{init,k}^0(I_0)$.

Of course, the statement and the proof of proposition 5.45 have to be slightly modified but the flavour remains the same. The only argument which should be added is the following: K contains at most n basic pieces and this implies that the integer k in the construction above is less than n . Using this supplementary argument, one can prove that, if K has no double-boundary (whenever K is not necessarily transitive) and if I_0 is a half-s-chain of \mathcal{R}_{N_0} , then the segments of the families $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}(I_0)$ defined above are s and u-chains of \mathcal{R}_{N_1} as soon as $N_1 \geq N_0 + 10n^3$.

Finally, the N -cc-algorithm described in the proof of proposition 5.62 has to be modified in a straightforward way in order to fit the new definition of $\mathcal{I}_{init}(I_0)$ and $\mathcal{J}_{init}(I_0)$. The reader can check that the proofs of all the other results never use directly the transitivity of K but only the no-double-boundary property.

Double-boundary leaves (*that is* leaves of $W^s(K)$ and $W^u(K)$ which are not accumu-

lated by $W^s(K)$ and $W^u(K)$) may be considered as the simplest part of the invariant laminations from the dynamical point of view (one may say that double-boundary leaves correspond to Morse-Smale part of invariant manifolds). Nevertheless, the algorithm has to be much more deeply modified in order to take into account the “double-boundary” case. We will not discuss this case here.

Appendix D. Topological conjugacy of pseudo-Anosov homeomorphisms

In this appendix, we prove that the conjugacy problem of pseudo-Anosov homeomorphisms can be reduced to the conjugacy problem for certain Smale diffeomorphisms (via DA operations). Hence, we obtain a new algorithmic classification of pseudo-Anosov homeomorphisms (may we recall that classifications of pseudo-Anosov homeomorphisms were already obtained by Fehrenbach following Los and Mosher ([Feh],[Lo96],[Mo95])).

Proof of proposition 5.5

It was noticed in the introduction that pseudo-Anosov homeomorphisms admit *adapted* Markov partitions and that the geometrical type of a Markov partition characterizes the underlying pseudo-Anosov homeomorphism up to topological conjugacy. On the other hand, we have proved that the correspondance $T \mapsto \mathcal{T}(T, p)$ was algorithmic.

In order to get a complete classification of pseudo-Anosov homeomorphisms, what is left to be proved is proposition 5.5, *that is*: if T_1 and T_2 are geometrical types of adapted Markov partitions of two pseudo-Anosov homeomorphisms f and g , then f and g are topologically conjugate if and only if, for every $p \geq p_{\min}(T_1, T_2)$, the sets of geometrical types $\mathcal{T}(T_1, p)$ and $\mathcal{T}(T_2, p)$ coincide.

The idea is to associate a Smale diffeomorphism to each pseudo-Anosov homeomorphism. This can be done by using DA operations (see [Sm67] for the definition). Namely, given a pseudo-Anosov homeomorphism f on a surface S , we first define an homeomorphism f' derived from f by opening all the stable separatrices of the singularities of f . Then, we define an homeomorphism \tilde{f} derived from f' by opening all the traces of the unstable separatrices of the singularities of f . Using the properties of dilatation-contraction and the transitivity of f , one can check that we obtain a Smale diffeomorphism \tilde{f} with one non-trivial 0-dimensional basic piece K and a finite number sinks and sources (see figure 5.18).

The key-arguments of the proof of proposition 5.5 are the three following items:

(i) In general, the result of a DA operation only depend on the stable or unstable leaf one opens (see [Wi70]). In our case, the stable and unstable separatrices of the singularities are canonically associated to f . Hence, the Smale diffeomorphism \tilde{f} is canonically associated to f . As a consequence, if f and g are topologically conjugate pseudo-Anosov homeomorphisms, then the derived Smale diffeomorphisms \tilde{f} and \tilde{g} are topologically conjugate diffeomorphisms.

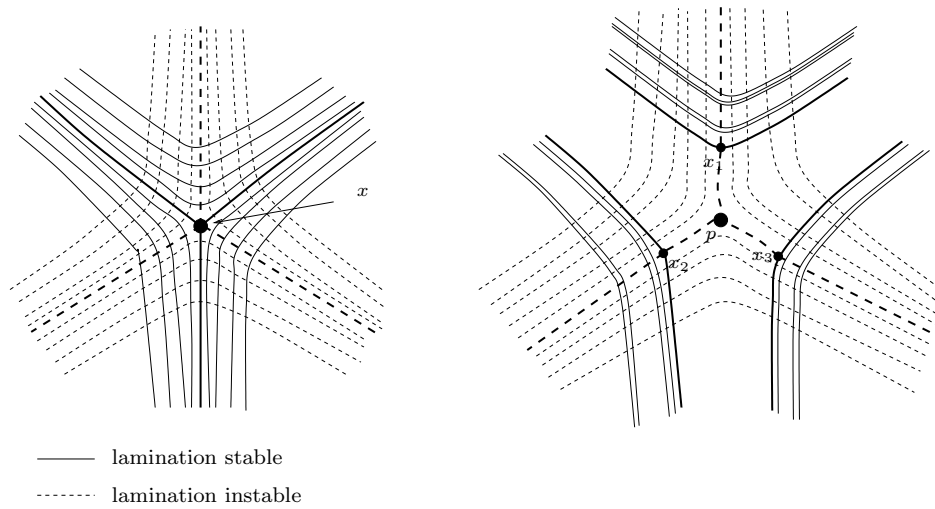


Figure 5.18: Local picture of f , f' and \tilde{f} near a singularity of f

(ii) For the converse, we use the following result of C. Bonatti and E. Jeandenans (see [BLJ, theorem 8.3.1]; we specialize the result to our case): Let \tilde{f} be a Smale diffeomorphism of a compact surface S . Assume that \tilde{f} is obtained from a pseudo-Anosov homeomorphism f by a finite number of DA operations and let K be the unique non-trivial basic piece of f . Then $f|_{\Delta(K,f)}$ is semi-conjugate to $\tilde{f}|_S$. The semi-conjugacy π is canonical: in fact, it consists in collapsing every s or u-arch, every free separatrix and every rectangle bounded by two s-arches and two u-arches. As a consequence, if $\tilde{f}|_{\Delta(\tilde{f},K)}$ and $\tilde{g}|_{\Delta(\tilde{g},L)}$ are topologically conjugate then f and g are topologically conjugate pseudo-Anosov homeomorphisms.

(iii) If \mathcal{M} is an adapted Markov partition of a pseudo-Anosov homeomorphism f , then $\tilde{\mathcal{M}} \equiv \pi^{-1}(\mathcal{M})$ is clearly a fitting Markov partition of K for \tilde{f} (the rectangles of $\tilde{\mathcal{M}}$ are disjoint because all the sides of \mathcal{M} are contained in the leaves we have opened). The geometrical types of \mathcal{M} and $\tilde{\mathcal{M}}$ are equal. As a consequence, if T_1 and T_2 are geometrical types of adapted Markov partitions of two pseudo-Anosov homeomorphisms f and g , then T_1 and T_2 are geometrical of fitting Markov partitions of the derived Smale diffeomorphisms \tilde{f} and \tilde{g} .

Item (iii) first proves that the set of all the adapted geometrical types of pseudo-Anosov homeomorphisms is included in the set of all the realizable transitive geometrical types. Now, items (i), (ii) and (iii) prove proposition 5.5. Finally, theorem 5.2 and proposition 5.5 directly imply corollary 5.6, *that is* give an algorithmic classification of pseudo-Anosov homeomorphisms.

Morphisms of the fundamental group, train-tracks and geometrical types of adapted Markov partitions

Corollary 5.6 leads to a complete algorithmic classification of pseudo-Anosov homeomorphisms. Nevertheless, this classification uses geometrical types of adapted partitions which are not the most natural presentations of pseudo-Anosov homeomorphisms. We

will sketch the links between geometrical types of adapted partitions and some other combinatorial presentations.

Pseudo-Anosov homeomorphisms were originally defined as canonical representatives of some classes of the mapping class group of a surface. Hence, pseudo-Anosov homeomorphisms are naturally yielded as morphisms of the fundamental group of the underlying surface. Considering a base point and a set of generating loops, one may see a pseudo-Anosov homeomorphism as a map acting on a one-vertex (embedded) graph (the embedding induces a cyclic order on the set of the edges).

Train-tracks are invariant special graphs which were originally defined by W. Thurston. It is now well-known that one can associate a train-track to a pseudo-Anosov homeomorphism originally yielded as a graph map (see, for example [Lo97]). Actually, train-tracks have become the usual finite presentations of pseudo-Anosov homeomorphism ([BeHa], [Lo97],...).

From a train-track, one may deduce a Markov partition: first, by thickening the edges of the train-track in order to obtain a bi-foliated *regular neighbourhood*; then, by carefully extending the rectangles in the complementary of the regular neighbourhood. The image of the train-track by the homeomorphism can be embedded in the so-called regular neighbourhood. The transversal order of the segments of the image in the regular neighbourhood is uniquely determined (see [Lo97]). The information carried by the words describing the action of the homeomorphism on the train-track and by the transversal words is similar to the information carried by the geometrical type of the derived Markov partition. Hence, the geometrical type of the derived Markov partition can be deduced from the words describing the action of the homeomorphism on the train-track.

Nevertheless, our techniques only deal with *adapted* Markov partitions. Hence, it should be interesting to solve the following problems (by algorithmical methods):

- (1) Given a pseudo-Anosov train-track, is the derived Markov partition adapted or not ?
- (2) Given the geometrical type of any Markov partition of a pseudo-Anosov homeomorphism f , find the geometrical type of an adapted Markov partition of f .

Bibliographie

- [AbSm] R. Abraham and S. Smale. *Non-genericity of Ω -stability*. in Global Analysis. Proc. of Symp. in Pure Math. 14, AMS, 1970.
- [ABS] V.S. Afraimovitch, V.V. Bykov and L.P. Shil'nikov. *On the appearance and structure of the Lorenz attractor*. Dokl. Acad. Sci. USSR 234, p. 336-339, 1977.
- [AnPo] A.A. Andronov, L.S. Pontriaguine. *Systèmes grossiers*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 14, p. 247-250, 1937.
- [Ano] D.V. Anosov. *Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature*. Proc. Steklov Inst. of Math. (translated by the AMS) 90, 1967.
- [ArGr] S. Kh. Aranson, V.Z. Grines. *The topological classification of cascade on closed two-dimensional manifolds*. Russian Math. Surv. 45, p.1-35, 1990.
- [Asi] D. Asimov. *Round handles and non-singular Morse-Smale flows*. Annals of Mathematics 102, p. 41-54, 1975.
- [Ba95] T. Barbot. *Carctérisation des flots d'Anosov en dimension 3 par leurs feuilletages faibles*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 15, p. 247-270, 1995.
- [Ba96] T. Barbot. *Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen*. Ann. Inst. Fourier 46, p. 1451-1517, 1996.
- [Beg] F. Béguin. *Smale diffeomorphisms of compact surfaces: an algorithm for the conjugacy problem*. Prépublication Lab. Topologie, Univ. Bourgogne, 1999.
- [BeBo] F. Béguin et C. Bonatti. *Flots de Smale en dimension 3 : présentation finie de voisinages invariants d'ensembles selles*. Prépublication Lab. Topologie, Univ. Bourgogne, 1997.
- [BBV] F. Béguin, C. Bonatti et J.L. Vieitez. *Construction de flots de Smale en dimension 3*. A paraître aux Annales de la Faculté de Sciences de Toulouse.
- [BeHa] M. Bestvina and M. Handel. *Train tracks for surface homeomorphisms*. Topology 34, p.109-140, 1995.
- [Bi17] G.D. Birkhoff. *Dynamical systems with two degrees of freedom*. Trans. AMS 18, p. 199-300, 1917.
- [Bi68] G.D. Birkhoff. *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques*. Oeuvres complètes, vol. 2, Dover, 1968.
- [BiWi] J.S. Birman and R.F. Williams. *Knotted periodic orbits in dynamical systems II: knots holders for fibered knots*. Contemporary mathematics, Volume 20, 1983.
- [BlFr] P. Blanchard and J. Franks. *An obstruction to the existence of certain dynamics on surfaces*. Ergodic theory and Dynamical systems 1, p. 255-260, 1981.

- [BoLa] C. Bonatti et R. Langevin. *Un exemple de flot d'Anosov transitif transverse un tore et non-conjugué une suspension*. Ergod. Theory and Dynam. Sys. 14, p. 633-643, 1994.
- [BLJ] C. Bonatti et R. Langevin avec la collaboration de E. Jeandenans. *Difféomorphismes de Smale des surfaces*. Astérisque 250, 1998.
- [Bo70] R. Bowen. *Topological entropy and Axiom A*. Proc. Symp. Pure Math. 14, AMS, Providence, p.23-41, 1970.
- [Bow] R. Bowen. *One dimensional hyperbolic sets for flows*. J. of Diff. Eq. 12, p. 173-179, 1972.
- [Bru] M. Brunella. *Expansive flows on three-manifolds*. PhD Thesis Trieste, 1992.
- [Ch92] J. Christy. *Intransitive Anosov flows*. Memoirs AMS, 1992.
- [Ch93] J. Christy. *Branched surfaces and attractors I: dynamic branched surfaces*. Trans. AMS 336, p. 759-784, 1993.
- [deM] W. de Melo. *Structural Stability of Diffeomorphisms on Two-Manifolds*. Invent. Math. 21, p. 233-246, 1973.
- [deR] K. de Rezende. *Smale flows on the three sphere*. Trans. AMS 303, p. 283-310, 1987.
- [Feh] J. Fehrenbach. *Roots and symetries of pseudo-Anosov homeomorphims*. Preprint INLN, 1997.
- [Fe95] S. Fenley. *Quasigeodesic Anosov flows and homotopic properties of closed orbits*. J. Diff. Geom. 41, p. 479-514, 1995
- [Fe97] S. Fenley. *Homotopic indivisibility of closed orbits of Anosov flows*. Math. Zeit.225, p. 289-294, 1997.
- [Fe98] S. Fenley. *The structure of branching of Anosov foliations in 3-manifolds*. Comment. Helvetici 73, p. 259-297, 1998.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Astérisque 66-67, 1979.
- [Fr83] J. Franks. *Symbolic dynamics in flows on three manifolds*. Trans. AMS 279, volume 1, pages 231-236, 1983.
- [Fr84] J. Franks. *Flow equivalence of subshifts of finite type*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 4, p. 53-66, 1984.
- [Fr85] J. Franks. *Non singular Smale flows on S^3* . Topology 24, pages 265-282, 1985
- [FrRo] J. Franks and C. Robinson. *A quasi-Anosov diffeomorphism that is not Anosov*. Trans. AMS 223, p. 267-278, 1976.
- [FrWi] J. Franks and R.F. Williams. *Anomalous Anosov flows*. Global theory of dynamical systems. Springer Lecture Notes 819, 1980.
- [Fr82] D. Fried. *Subshifts on surfaces*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 2, p. 15-21, 1982.
- [Fr83] D. Fried. *Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps*. Topology 22, p. 299-303, 1983.
- [Ghr] R.W. Ghrist. *Branched two-manifolds supporting all links*. Topology, 1996.
- [GHS] R.W. Ghrist, P.J. Holmes et M.C. Sullivan. *Knots and Links in Three-Dimesnional Flows*. Springer Lecture Notes, 1997.

- [Ghy] E. Ghys. *Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 4, p. 67-80, 1984.
- [Goo] S. Goodman. *Dehn surgery and Anosov flows*. SLN 1007, 1983.
- [Gri] V.Z. Grines. *Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic trajectories on surfaces*. Math. Notes 54, p.881-889, 1994.
- [GrKa] V.Z. Grines and Kh.Kh. Kalay, *The topological classification of basic sets with no pairs of conjugate points of A-diffeomorphisms of surfaces*. Gorkii state university, Gorkii, p.1-95, 1988.
- [GuWi] J. Guckenheimer and R.F. Williams. *Structural stability of Lorenz Attractors*. Publications de l'I.H.E.S. 50, p. 59-72, 1979.
- [HaTh] M. Handel and W.P. Thurston. *Anosov flows on new three-manifolds*. Inv. Math. 59, 1980.
- [Hay] S. Hayashi. *Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 -stability and Ω -stability conjectures for flows*. Annals of math. 145, p. 81-137, 1997.
- [Hem] G. Hemion. *On the classification of homeomorphisms of 2-manifolds and the classification of 3-manifolds*. Acta Math. 1-2, p.125-155, 1979.
- [HPS] M. Hirsch, C. Pugh et M. Shub. *Invariant manifolds*. Lectures Notes in Mathematics 583, Springer-Verlag, 1977.
- [Jea] E. Jeandenans. *Difféomorphismes hyperboliques des surfaces et combinatoire des partitions de Markov*. Thèse de doctorat de l'Université de Bourgogne, 1996.
- [KaHa] A. Katok and B. Haselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [KiRo] K.H. Kim and F.W. Roush. *The Williams conjecture is false for irreducible subshifts*. Elect. Research Announ. of A.M.S. Vol. 3, p.105-109, 1997.
- [Kle] S.C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. Van Nostrand, 1952.
- [Lo93] J. Los. *Pseudo-Anosov maps and invariant train tracks in the disc: A finite algorithm*. Proc. London Math. Soc. III. Ser. 66, No.2, p. 400-430, 1993.
- [Lo96] J. Los. *On the conjugacy problem for automorphisms of free groups*. Topology 35, 3, p.779-806, 1996.
- [Lo97] J. Los. *On the forcing relation for surface homeomorphisms*. Publ. IHES 85, p.5-61,1997.
- [Man] R. Mañé. *A proof of the C^1 -stability conjecture*. Pub. IHES 66, pages 161-210, 1988.
- [Mann] A. Manning. *There are no new Anosov diffeomorphisms on tori*. Amer. J. Math. 96, p. 422-429, 1974.
- [MaMi] H.A. Masur and Y.N. Minsky. *Geometry of the complex of curves II: hierarchical structure*. Preprint.
- [Mor] J.W. Morgan. *Non-singular Morse-Smale flows on 3-dimensional manifolds*. Topology 18, p. 41-53, 1978.
- [Mo86] L. Mosher. *The classification of Pseudo-Anosovs*. London Math. Soc. Lecture Notes 112, p.13-75, 1986.
- [Mo95] L. Mosher. *Mapping class groups are automatic*. Ann. of Math.142, page 303-384, 1995.

- [NePa] S. Newhouse et J. Palis. *Hyperbolic nonwandering sets on two-dimensional manifolds*. Dynamical Systems, Peixoto ed., Salvador, p. 293-301, 1973.
- [Pal] J. Palis. *On the C^1 Ω -stability conjecture*. Pub. IHES 66, p. 211-215, 1988.
- [PaMe] J. Palis, W. de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems, An introduction*. Springer Verlag, 1982.
- [PaTa] J. Palis et F. Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge University Press, 1993.
- [PaSu] W. Parry and D. Sullivan. *A topological invariant for flows on one-dimensional spaces*. Topology 14, p. 297-299, 1975.
- [Pe62] M. Peixoto. *Structural stability on two-dimensional manifolds*. Topology 1, 1962.
- [Pe73] M. Peixoto. *On the classification of flows on two-manifolds*. in Dynamical Systems, edited by M. Peixoto, 1973.
- [Poi] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Les grands classiques Gauthier-Villars.
- [PS70] C. Pugh and M. Shub. *Linearization of normally hyperbolic diffeomorphisms and flows*. Invent. Math. 187, 10, 1970.
- [PS81] C. Pugh and M. Shub. *Suspending subshifts*. In *Contributions to geometry and Analysis*, C. Percelli and R. Sacksteder editors, John Hopkins University Press, 1981.
- [Ro71] J.W. Robbin. *A structural stability theorem*. Annals of Mathematics 94, pages 447-493, 1971.
- [Ro75] C. Robinson. *Structural stability of C^1 flows*. Dynamical systems (Warwick, 1974), Lecture Notes in Math. 468, p. 262-277, Springer Verlag, 1975.
- [Ro76] C. Robinson. *Structural stability of C^1 -diffeomorphisms*. J. Diff. Eq. 22, p. 28-73, 1976.
- [Rua] G. Ruas. *Atratores hiperbólicos de codimensão um e classes de isotopia em superficies*. Prépublication, Informes de Matematica, Série F-01/82, IMPA, 1982.
- [Sin] Ya. G. Sinai. *Markov partitions and C -diffeomorphisms*. English transl. Funct. Anal. Appl. 2, p. 61-82, 1968.
- [Sm60] S. Smale. *On dynamical systems*. Bol. Soc. Mat. Mexicana 5, p. 195-198, 1960.
- [Sm67] S. Smale. *Differentiable dynamical systems*. Bull. AMS 73, 1967, p. 747-817.
- [Shu] M. Shub. *Stabilité globale des systèmes dynamiques*. Astérisque 56, 1978.
- [Sul] M. Sullivan. *Visually building Smale flows in S^3* . To appear in Topology and its applications.
- [Thu] W. Thurston. *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*. Bull. AMS 19, p.415-431, 1988.
- [Tuc] W. Tucker. *The Lorenz attractor exists*. PhD thesis, Univ. Uppsala, 1998.
- [Ver] A. Verjovsky. *Codimension one Anosov flows*. Bol. Soc. Mat. Mex. 19, p. 46-77, 1977.
- [Wad] M. Wada. *Closed orbits of nonsingular Morse-Smale flows on S^3* . J. Math. Soc. Japan 41, p. 405-413, 1989.
- [Wi70] R.F. Williams. *The "DA" maps of Smale and structural stability*. Global Analysis , Proc. of Symp. Pure Math. 14, p.326-334, 1970.

- [Wi70-2] R.F. Williams. *Classification of one-dimensional attractors*. Proc. Symp. Pure Math. 14, p.341-363, 1970.
- [Wi74] R.F. Williams. *Classification of subshifts of finite type*. Annals of Math. 98, p.120-153, 1973. Errata Annals of Maths 99, p.380-381, 1974.
- [Wi74-2] R.F. Williams. *Expanding attractors*. Publications de l'I.H.E.S. 43, pages 169-203, 1974.
- [Zhi] A.Yu. Zhironov. *Hyperbolic attractors of diffeomorphisms of orientable surfaces III: Classification algorithm*. Translation from Mat. Sb. 186, p.59-82, 1995.