

Le mémoire de Poincaré pour le prix du roi Oscar : l'harmonie céleste empêtrée dans les intersections homoclines

François Béguin

1 Le Système Solaire est-il stable ?

Il y a quelques années, un antiquaire parisien, la galerie J. Kugel, a organisé une exposition que je regrette fort d'avoir manquée¹. Cette exposition rassemblait des objets de diverses époques, tous créés dans un même but : représenter la Terre, les astres qui l'entourent, et leurs mouvements. On pouvait y admirer un globe céleste de l'époque romaine, des globes terrestres du XVIème siècle, des sphères armillaires, des anneaux astronomiques, etc.



La photographie ci-contre montre l'un de ces précieux objets, une *sphère mouvante* du début du XVIIIème siècle. Outre son indéniable beauté, cette sphère possède un intérêt historique particulier : c'est l'une des premières à avoir été conçues d'après le système héliocentrique de Nicolas Copernic². La boule dorée située sur l'axe vertical représente donc le Soleil, la boule dorée à gauche du Soleil représente la Terre, et les petites boules en métal noirci représentent les autres planètes connues à l'époque ainsi que la Lune. Un mécanisme d'horlogerie anime les planètes, qui tournent autour du Soleil à différentes vitesses, suivant une chorégraphie impeccablement réglée, harmonieuse et monotone.

On peut se laisser bercer pendant des heures par la valse des petites planètes de métal, mais il faut à quelque moment s'éveiller et se poser la question cruciale : cette valse reflète-t-elle fidèlement les mouvements des *vraies* planètes du Système Solaire ?

La réponse dépend de la précision que l'on souhaite et de l'échelle de temps à laquelle on s'intéresse. Sur une courte période (quelques années), les trajectoires de Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne dans notre ciel coïncident assez bien avec les trajectoires prévues

¹On peut heureusement avoir un aperçu des magnifiques objets qui étaient présentés sur le site internet de la galerie : <http://www.galerie-kugel.com/>

²Plus de 150 ans après la mort de Copernic !

par le modèle Copernic. Mais sur période plus longue³, les trajectoires coperniciennes ne sont que d'assez mauvaises approximations des trajectoires réelles des planètes : lentement mais inéluctablement, les trajectoires réelles s'écartent des trajectoires coperniciennes. En fait, il faut se rendre à l'évidence : si le modèle héliocentrique de Copernic constitue une véritable révolution d'un point de vue *métaphysique*, il n'est par contre guère plus efficace *en pratique* que le modèle géocentrique de Ptolémée, lorsqu'il s'agit d'expliquer les trajectoires des planètes dans notre ciel.

Dès le début du XVII^e siècle, Johannes Kepler a proposé un modèle du Système Solaire qui améliore celui de Copernic. Dans le modèle de Kepler, les orbites des planètes autour du Soleil ne sont pas des cercles ou des épicycles, mais des ellipses dont le Soleil occupe un foyer. L'adéquation de ce modèle avec les observations est bien meilleure que celle des modèles de Ptolémée ou Copernic. Ainsi, pour avoir une image plus fidèle du Système Solaire, on peut imaginer une sphère mouvante munie d'un mécanisme un peu plus complexe que celle ci-dessus, permettant aux petites planètes métalliques de décrire des ellipses plutôt que des cercles.

Mais cette image n'est toujours pas parfaite... Surtout, imaginer des sphères mouvantes plus ou moins sophistiquées ne nous épargnera pas une question plus fondamentale : les mouvements des planètes du Système Solaire peuvent-ils être représentés fidèlement par une chorégraphie parfaitement régulière, animée par un mouvement d'horlogerie ? La régularité des mouvements des planètes n'est-elle pas une simple illusion ? Ces mouvements nous paraîtraient-ils aussi réguliers si nous les observions durant plusieurs millions d'années ? L'allure du Système Solaire sera-t-elle à peu près la même dans quelques centaines de milliers d'années, ou la lente dérive des trajectoires réelles des planètes par rapport aux trajectoires prévues par Ptolémée, Copernic ou Kepler aura-t-elle complètement chamboulé la configuration des planètes ? Le chamboulement peut-il aller jusqu'à une collision entre deux planètes ? ou l'éjection d'une planète ? En un mot : le Système Solaire est-il stable ?

Alors que les modèles de Copernic ou Kepler n'avaient pour but que de *décrire* les mouvements des planètes autour du Soleil, vers 1685, Isaac Newton invente la Mécanique Céleste en énonçant deux lois fort simples qui visent à *expliquer* le mouvement des planètes :

- 1) Deux corps quelconques s'attirent en raison directe de leur masses, et en raison inverse du carré de leur distance mutuelle.
- 2) Le produit de l'accélération d'un corps par sa masse est à tout moment égale à la somme de toutes les forces exercées sur ce corps.

Ces deux lois plaident-elles en faveur de la stabilité du Système Solaire ? À première vue, oui. En effet, à partir de ces deux lois de Newton, on peut *démontrer* qu'une planète soumise à l'attraction du Soleil décrit perpétuellement une ellipse dont le Soleil occupe un foyer. Cependant, il s'agit ici d'une planète soumise à la *seule* attraction du Soleil. Or, les lois de Newton prévoient que *tous* les corps massifs s'attirent. Ainsi, une planète du Système Solaire subit-elle non seulement l'attraction du Soleil, mais aussi l'attraction des autres planètes. Bien sûr, les planètes sont beaucoup plus légères que le Soleil, et exercent donc une force d'attraction beaucoup plus faible. C'est pourquoi les ellipses képlériennes sont, sur une courte durée, de bonnes approximations des trajectoires des planètes. Mais, à tout moment, chaque planète est légèrement déviée de son orbite képlérienne par l'attraction

³De génération en génération, les astronomes se sont soigneusement transmis les relevés de positions des planètes dans le ciel depuis l'Antiquité.

qu'exercent les autres planètes. Au fil du temps, les petites déviations s'accumulent, et rien ne nous dit que cette accumulation de ces petites déviations ne finira pas par changer complètement l'allure du Système Solaire. Après tout, les plus anciens relevés de positions des planètes dont on ait trace datent des Chaldéens ; trois millénaires, c'est très long à l'échelle humaine, mais c'est ridiculement court devant l'âge du Système Solaire...

À partir de la fin du XVII^{ème} siècle, le problème de la stabilité du Système Solaire se scinde donc en deux questions :

- 1) Les lois de Newton suffisent-elles à expliquer les mouvements des astres ?
- 2) Un système de n corps s'attirant mutuellement selon les lois de Newton est-il stable ?

Tout au long des XVIII^{ème} et XIX^{ème}, les astronomes ne vont cesser d'accumuler des résultats qui plaident pour une réponse positive à la première question. Dès 1750, Alexis Clairaut explique le mouvement de la Lune avec les seules lois de Newton. Quelques années plus tard, il calcule avec Joseph-Jérôme de Lalande que l'attraction exercée par Jupiter et Saturne devraient, selon les lois de Newton, retarder le passage de la comète de Halley d'un an et huit mois, à un mois près ; le retard sera un an et sept mois. Une vingtaine d'années plus tard, Pierre Simon de Laplace montre que les lois de Newton expliquent les mouvements de Jupiter et Saturne observés depuis 2000 ans. En 1821, Alexis Bouvard constate que le mouvement d'Uranus (découverte en 1781) ne peut être expliqué par les lois de Newton... à moins qu'Uranus ne subisse l'attraction d'une planète inconnue ; en 1846, le Français Urbain Le Verrier et l'Anglais John C. Adams déterminent indépendamment, à l'issue de calculs titanesques, la position que devrait avoir cette planète hypothétique ; l'Académie des Sciences prête à peine plus d'attention aux résultats de Le Verrier que l'*astronomer royal* Georges B. Airy n'en accorde à ceux d'Adams ; mais l'astronome allemand Johann Galle braque sa lunette sur la position calculée par Le Verrier... et découvre Neptune⁴!

Les réponses à la seconde question seront moins convaincantes. En 1785, Laplace — dont on a reproduit le portrait ci-contre — annonce pourtant qu'il a pratiquement résolu cette question : il a montré que le système constitué du Soleil, Jupiter et Saturne est stable. Mais, le résultat de Laplace est très loin de clore le débat. Le problème n'est pas tant que Laplace se soit restreint à Jupiter et Saturne, mais plutôt que, dans ses calculs, il a fait une approximation majeure. Expliquons cela. On peut décomposer les forces que subit Saturne en une somme infinie de termes de plus en plus petits : le terme principal est la force d'attraction exercée par le Soleil, le terme suivant (dit *d'ordre 1*) est proportionnel au rapport entre la masse de Saturne et celle du Soleil, le terme suivant (dit *d'ordre 2*) est proportionnel au carré de ce rapport, le terme suivant (dit *d'ordre 3*) est proportionnel à la puissance troisième de ce rapport, etc.



Dans ses calculs, Laplace n'a tenu compte que du terme principal et du terme d'ordre 1. Sur

⁴Le Verrier n'aura pas toujours autant de succès : quelques années plus tard, il cherchera à expliquer l'avance du périhélie de Mercure par l'existence d'une autre planète, Vulcain, dont il calculera la trajectoire. Aux dernières nouvelles, la planète Vulcain n'a toujours pas été découverte (sauf par les scénaristes de la série Star Trek), et l'avance du périhélie de Mercure est due à la distorsion de l'espace-temps au voisinage d'un corps massif (ici, le Soleil) prévue par la Relativité Générale.

une courte durée (moins d'un million d'année), cela n'est pas bien grave : en effet, comme le rapport entre la masse de Saturne et celle du Soleil est très petit, les termes d'ordre plus grand que 1 sont minuscules et ne perturbent guère le mouvement. Mais, à plus longue échéance, les perturbations dues aux termes d'ordre plus grand que 1 ne peuvent plus être négligées. Ce que Laplace a montré, c'est donc que le système Soleil-Jupiter-Saturne est à peu près stable sur une durée de l'ordre du million d'années, mais ces travaux n'apportent aucune information sur le comportement de Jupiter et Saturne à plus longue échéance.

Vers 1850, Le Verrier poussera plus loin les calculs de Laplace en tenant compte cette fois-ci de toutes les planètes. Mais, les calculs de Le Verrier reposent sur le même genre d'approximations que ceux de Laplace. Par leur nature même, de tels calculs ne peuvent montrer que des résultats de stabilité valables sur une durée limitée. Ainsi, à la fin du XIX^{ème} siècle, on ne connaît pratiquement aucun résultat qui porte sur le comportement *en temps arbitrairement long* d'un système de n corps qui s'attirent mutuellement selon les lois de Newton.

En 1885, plusieurs revues scientifiques annoncent que le roi de Suède et de Norvège Oscar II, "désireux de prouver son intérêt pour les progrès de la science mathématique", a décidé d'accorder un prix "à une découverte importante dans le domaine de l'analyse mathématique supérieure". Le prix, qui sera remis le 21 janvier 1889 à l'occasion du soixantième anniversaire du roi, consiste en une médaille d'or et une somme de deux mille cinq cents couronnes. Les candidats devront présenter un mémoire traitant l'un des quatre problèmes proposés par le jury, composé du mathématicien suédois Gösta Mittag Leffler (qui est à l'origine de l'organisation du concours), et des deux grandes sommités de l'Analyse de l'époque : le français Charles Hermite et l'allemand Karl Weierstrass.

L'un des problèmes proposés concerne l'étude "sous le point de vue algébrique [...] des fonctions que M. Poincaré a introduite dans la science sous la dénomination de fonctions fuchsienues". Cette formulation est certainement une invitation pour Poincaré à développer les travaux qui l'avaient rendu célèbre cinq ans auparavant. Mais celui-ci préférera s'attaquer à un autre des quatre problèmes proposés : celui concernant l'étude du comportement "d'un système d'un nombre quelconque de [corps] s'attirant mutuellement selon la loi de Newton", et en particulier l'étude de la stabilité du Système Solaire...

2 Le mémoire de Poincaré pour le prix du roi Oscar



Dans l'histoire de l'étude de la stabilité du Système Solaire, et plus généralement, de l'étude des systèmes déterministes, le mémoire de Poincaré pour le prix du roi Oscar ([16],[17]) constitue une véritable révolution. Et cette révolution est avant tout un changement de point de vue. Alors qu'auparavant on avait toujours cherché à *calculer* avec la meilleure précision possible les trajectoires des planètes, Poincaré essaie de *dire quelque chose* sur l'allure de ces trajectoires *sans chercher à les calculer*. Alors qu'auparavant les équations différentielles qui traduisent la loi de Newton jouaient un rôle primordial dans le calcul des trajectoires, Poincaré oublie la plupart du temps ces équations pour n'en retenir que quelques propriétés fondamentales. Enfin, alors qu'auparavant on s'intéressait à *la* trajectoire que suit chaque planète, Poincaré s'intéresse *simultanément* à *toutes*

les trajectoires que la planète aurait pu suivre si la configuration initiale du système avait été différente. Tout le génie de Poincaré, c'est d'avoir compris qu'il est parfois plus facile de dire quelque chose sur le comportement de toutes les trajectoires de tous les systèmes d'un certain type que de calculer une trajectoire particulière d'un système particulier.

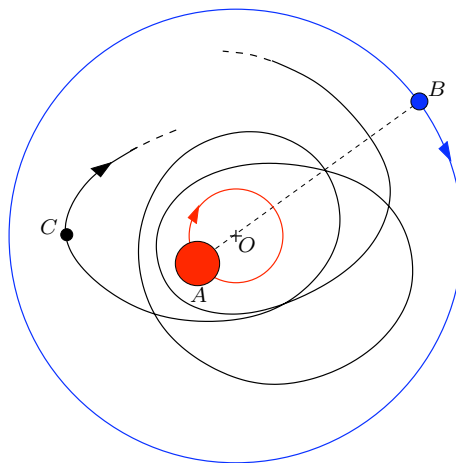
Le mémoire de Poincaré contient une quantité impressionnante de résultats qu'il est hors de question de tous expliquer ici. Je vais simplement essayer de présenter deux des résultats principaux du mémoire : le théorème de stabilité "à la Poisson", et le "théorème de coïncidence des surfaces asymptotiques".

Le problème restreint des trois corps

Les résultats qui vont nous intéresser ne concernent pas un système à n corps arbitraire. Ils concernent un système particulier, introduit pour la première fois par Leonard Euler dans son étude des mouvements de la Lune, et devenu très classique depuis. Ce système est constitué de trois corps célestes A , B , C qui s'attirent selon les lois de Newton, la masse de B étant petite devant celle de A , et la masse de C étant "infinitement petite". Puisque la masse de C est infinitement petite, les corps A et B forment un système isolé à deux corps ; les trajectoires de A et B sont donc des ellipses coplanaires. On se place de plus dans le cas le plus simple : les ellipses parcourues par A et B sont des cercles, et C se meut dans le plan de ces cercles.

Typiquement, le corps A représente le Soleil, le corps B Jupiter, et le corps C la Terre. Le système décrit ci-dessus modélise alors l'influence de Jupiter sur l'orbite de la Terre, en négligeant l'influence des autres planètes et l'excentricité de l'orbite de Jupiter, et en supposant que la Terre et Jupiter restent exactement dans le plan de l'écliptique. On peut également considérer que le corps A représente le Soleil, le corps B la Terre, et le corps C la Lune.

On choisit une unité de masse telle que la somme des masses de A et de B soit égale à 1, on note μ la masse de B , et O le centre de gravité du système constitué des corps A et B . On connaît parfaitement le mouvement des corps A et B (ils parcourent à vitesse constante des cercles centrés en O , de rayons respectifs μ et $1-\mu$ dans une unité de longueur adéquate, et, bien sûr, O , A et B sont en permanence alignés). Tout le problème consiste donc à étudier le mouvement de C . Pour ce faire, on se place dans un "repère tournant" : le repère orthonormé direct d'origine O , et dont le premier axe est la droite passant par A et B (orientée de A vers B pour fixer les idées). L'état du système à un instant donné est entièrement caractérisé par les coordonnées (x, y) de la planète C et les coordonnées (x', y') du vecteur vitesse de C dans ce repère. L'espace des configurations du système est donc de dimension 4 : c'est l'espace des quadruplets (x, y, x', y') .



Les lois de Newton se traduisent par un système de quatre équations différentielles⁵ qui gouvernent l'évolution du système. Ces équations n'interviendront cependant pratiquement pas dans la suite : c'est une des grandes originalités du point de vue de Poincaré.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' & , & \frac{dx'}{dt} = x + 2y' + \partial V / \partial x \\ \frac{dy}{dt} = y' & , & \frac{dy'}{dt} = y - 2x' + \partial V / \partial y \end{cases} \quad \text{où } V(x, y) = \frac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2+y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x+\mu-1)^2+y^2}}.$$

Par contre, il est important de comprendre le mode de représentation géométrique que nous allons adopter. Nous avons défini un espace : l'*espace des configurations* de notre système. Chaque configuration possible du système est représentée par un point dans cet espace. Chaque évolution possible du système au cours du temps sera représentée par une courbe dans l'espace des configurations, paramétrée par le temps ; une telle courbe s'appelle *une trajectoire du système*⁶. Chaque point de l'espace des configurations est la position initiale d'une *unique* trajectoire du système (ceci traduit le déterminisme du système : la connaissance de la configuration initiale du système détermine entièrement son évolution)⁷.

Nous avons dit dans la première partie qu'il n'existait, avant les travaux de Poincaré, quasiment aucun résultat sur le comportement du Système Solaire en temps arbitrairement long. Il y a tout de même une exception notable, un résultat démontré en 1878 par Georges W. Hill, et adapté en 1887 par Karl Bohlin au système particulier décrit ci-dessus ([3]) :

Théorème (Hill, Bohlin). *Pour le système à trois corps décrit ci-dessus, il existe deux valeurs E_{min} et E_{max} , telles que les trajectoires dont l'énergie est comprise entre E_{min} et E_{max} pour lesquelles les valeurs initiales de x et y ne sont pas trop grandes ne sortent jamais d'une région bornée de l'espace*⁸

C'est déjà un résultat de stabilité intéressant : pour des valeurs de l'énergie comprises entre E_{min} et E_{max} , et des valeurs initiales de x et y "pas trop grandes", le corps C ne se fera jamais "éjecter à l'infini". Je regrette d'ailleurs de ne pouvoir m'attarder sur ce résultat, dont la preuve est très jolie et tout à fait dans l'esprit de l'approche de Poincaré : on ne calcule surtout pas les trajectoires, mais on montre qu'il existe une courbe fermée infranchissable, qui empêchent les trajectoires de s'en aller à l'infini (voir [19]).

Notons que l'on obtient des valeurs de l'énergie comprises entre E_{min} et E_{max} et des valeurs initiales de x et y "pas trop grandes" dans beaucoup de situations réalistes ; par exemple, lorsqu'on donne aux corps A , B et C des masses, des vitesses, et des distances mutuelles comparables à celles du Soleil, de la Terre et de la Lune, ou à celles du Soleil, de Jupiter et de la Terre. Dans la suite de ce texte, nous ne considérerons d'ailleurs plus que des trajectoires ayant une énergie comprise entre E_{min} et E_{max} et des valeurs initiales de x et y "pas trop grandes" ; les trajectoires qui interviennent ci-après ne sortent donc pas d'une région bornée de l'espace des configurations.

Un théorème de stabilité "à la Poisson"

Le premier résultat de stabilité de Poincaré repose sur une remarque toute simple, mais fondamentale : le système à trois corps décrit ci-dessus *préserve le volume*.

Pour expliquer ce que cela signifie, il me faut introduire une notation. Étant donné une région R dans l'espace des configurations de notre système et un nombre k , on définit une autre région $R(k)$ de l'espace des configurations de la manière suivante : pour chaque point p de la région R , on considère la trajectoire du système qui se trouve en p à l'instant 0, et on marque le point où se trouve cette trajectoire au bout de k jours ; la région $R(k)$

⁶Une trajectoire du système est une courbe dans l'espace des configurations, et n'est donc pas une trajectoire du corps C dans l'espace physique. Cependant, la connaissance d'une trajectoire du système équivaut à la connaissance d'une trajectoire des corps C .

⁷D'un point de vue mathématique, les trajectoires du système sont les solutions du système d'équations différentielles ci-dessus, et c'est un théorème classique, le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui nous assure localement de l'existence et l'unicité d'une trajectoire passant par un point.

⁸Il s'agit ici aussi bien de l'espace "physique" (le plan dans lequel se meuvent les corps A , B et C), que de l'espace des configurations ; les résultats dans ces deux espaces sont équivalents.

est l'ensemble de tous les points qu'on a marqués. Reformulons cela : la région $R(k)$ est l'ensemble de tous les points de l'espace des configurations où peuvent se trouver les trajectoires qui, k jours auparavant, se trouvaient quelque part dans la région R . Maintenant, dire que *le système préserve le volume*, c'est dire que, pour toute région R de l'espace des configurations, et pour tout nombre k , le volume de la région $R(k)$ est égal au volume de la région R . C'est une propriété assez abstraite, mais simple. On peut vérifier que notre système à trois corps préserve le volume grâce à un calcul de quelques lignes portant sur les équations différentielles qui gouvernent l'évolution du système⁹.

Grâce à cette remarque, Poincaré va prouver un résultat qu'il appelle *théorème de stabilité à la Poisson*¹⁰, et qu'on nomme aujourd'hui *théorème de récurrence de Poincaré*.

Théorème de récurrence de Poincaré. *Presque toute trajectoire*¹¹ *du système à trois corps décrit ci-dessus repasse une infinité de fois arbitrairement près de sa position initiale.*

L'expression "presque toute trajectoire vérifie la propriété (P)" signifie "l'ensemble des positions initiales des trajectoires qui ne vérifient pas la propriété (P) est de volume nul". Ainsi, dire que "presque toute trajectoire vérifie la propriété (P)", c'est dire que "si on choisit *au hasard* un point dans l'espace des configurations, il y a une probabilité nulle pour que la trajectoire passant par ce point à l'instant 0 ne vérifie pas la propriété (P)".

En particulier, le théorème ci-dessus implique que, si on choisit au hasard une configuration initiale de notre système, il y a une probabilité nulle pour que cette configuration soit telle que le corps C ne repasse pas une infinité de fois près de sa position initiale.

Preuve d'une version simplifiée du théorème de récurrence. Fixons un nombre réel δ strictement positif (aussi petit que l'on veut). Nous allons montrer l'énoncé suivant : *presque toute trajectoire repasse à une distance inférieure à δ de sa position initiale.* Cette version simplifiée du théorème de récurrence de Poincaré est déjà un résultat très intéressant, et permet d'alléger la preuve de quelques complications techniques.

Considérons une région R dans l'espace des configurations. Supposons que R est de volume non nul. Nous pouvons alors choisir une boule de diamètre δ , tel que l'intersection de la région R avec cette boule a un volume non nul¹² ; nous noterons \tilde{R} cette intersection. Par construction, la région \tilde{R} est contenue dans la région R et a un volume non nul, que nous noterons v . De plus, \tilde{R} est contenue dans une boule de diamètre δ ; deux points quelconques de \tilde{R} sont donc toujours situés à une distance inférieure à δ l'un de l'autre.

Considérons maintenant les régions $\tilde{R}(1), \tilde{R}(2), \tilde{R}(3), \dots$ (on rappelle que la région $\tilde{R}(k)$ est l'ensemble de tous les points où peuvent se trouver les trajectoires qui, k jours auparavant, étaient dans la région \tilde{R}). Puisque le système préserve le volume, chacune de ces régions a le même volume que la région \tilde{R} , c'est-à-dire v . Rappelons, par ailleurs, que les trajectoires ne sortent pas d'une région bornée de l'espace des configurations. Il en résulte que les régions en nombre infini $\tilde{R}(1), \tilde{R}(2), \tilde{R}(3), \dots$ ne peuvent pas être deux-à-deux disjointes : en effet, on ne peut pas mettre une infinité de régions de même volume v non

⁹En fait, il ne s'agit pas du volume usuel dans les coordonnées (x, y, x', y') décrites ci-dessus ; il faut donc faire un changement de coordonnées. Mais, une fois qu'on a trouvé le bon changement de coordonnées, le calcul est effectivement élémentaire : en termes techniques, il suffit de vérifier que la *divergence* du système d'équations différentielles est nulle.

¹⁰Du nom du mathématicien Siméon Denis Poisson (1781-1840).

¹¹Sous-entendu : d'énergie comprise entre E_{min} et E_{max} et pour lesquelles les valeurs initiales de x et y ne sont "pas trop grandes".

¹²Une telle boule existe. En effet, si l'intersection de la région R avec n'importe quelle boule avait un volume nul, alors la région R aurait un volume nul.

nul, deux-à-deux disjointes, dans une région bornée de l'espace (on ne peut pas mettre une infinité d'oranges dans une caisse !). Il existe donc deux entiers i et j tels que la région $\tilde{R}(i)$ rencontre la région $\tilde{R}(j)$. Choisissons un point dans l'intersection de ces deux régions, notons T la trajectoire qui passe par ce point au jour j .

D'une part, la trajectoire T se trouve dans la région $\tilde{R}(j)$ au jour j ; elle se trouvait donc dans la région \tilde{R} au jour 0 ; autrement dit, sa position initiale est située dans \tilde{R} . D'autre part, la trajectoire T se trouve dans la région $\tilde{R}(i)$ au jour j ; elle se trouvait donc dans \tilde{R} au jour $j - i$. Nous avons donc trouvé une trajectoire T dont la position initiale est située dans la région \tilde{R} (donc *a fortiori* dans R), et qui repasse dans \tilde{R} (au jour $j - i$). Puisque deux points de \tilde{R} sont toujours à une distance inférieure à δ l'un de l'autre, la trajectoire T repasse à une distance inférieure à δ de sa position initiale.

Pour montrer l'existence de la trajectoire T , la seule hypothèse que nous avons faite était que la région R avait un volume non nul. Par conséquent, s'il n'existe aucune trajectoire dont la position initiale est située dans la région R et qui repasse à une distance inférieure à δ de sa position initiale, alors c'est que la région R a un volume nul. En particulier, si R est la région constituée de tous les points p telle que la trajectoire de position initiale p ne repasse pas à une distance inférieure à δ de p , alors R a un volume nul. Ceci signifie exactement que presque toute trajectoire repasse à une distance inférieure à δ de sa position initiale. \square

Comme on peut le voir, la preuve ci-dessus n'utilise que deux propriétés du système considéré : le fait que ce système préserve le volume, et le fait que les trajectoires restent dans une région bornée. Ainsi, le théorème de récurrence de Poincaré est valable pour n'importe quel système déterministe qui vérifie ces deux propriétés.

Je vais prendre quelques lignes pour essayer d'expliquer pourquoi je trouve que ce théorème tout simple, mais parfaitement typique de la démarche de Poincaré dans son mémoire, est absolument admirable.

Pendant tout le XVIIIème et tout le XIXème siècles, les plus grands mathématiciens ont cherché à montrer que le Système Solaire est stable. Pour cela, ils ont déployé une intelligence fabuleuse et une puissance de calcul colossale afin de déterminer le plus précisément possible les trajectoires des planètes ; une fois les calculs effectués, il n'y avait plus qu'à constater que les trajectoires obtenues étaient périodiques ou presque. Mais, les trajectoires n'étant calculées que de manière approchée, on ne pouvait obtenir ainsi des informations que sur l'avenir relativement proche du Système Solaire.

Poincaré, lui, "prend de la hauteur". Il se demande si, sans calculer les trajectoires des planètes, sans connaître les positions initiales de ces planètes, sans même s'intéresser de près aux équations différentielles qui traduisent les lois de Newton, on ne pourrait pas tout de même *dire quelque chose*. N'y a-t-il pas quelque chose de très général à dire sur les trajectoires d'un système déterministe ? Le pari paraît complètement insensé. Et pourtant, en une page, Poincaré nous montre que, dans tout système déterministe qui préserve le volume, si les trajectoires restent dans une région bornée, alors presque toute trajectoire repasse une infinité de fois près de sa position initiale. Ce résultat s'applique en particulier au système à trois corps décrit ci-dessus ; c'est un des premiers résultats sur le comportement de ce système dont la validité n'est pas limitée dans le temps.

Bien sûr, il y a un prix à payer : l'information que nous fournit le théorème de récurrence est extrêmement abstraite. En effet, on ne sait absolument pas quand les trajectoires repasseront près de leur position initiale (pour certaines d'entre elles, le Système Solaire aura peut être cessé d'exister avant le premier retour), ou ce que fait chaque trajectoire entre deux passages. C'est pourquoi le théorème de récurrence de Poincaré ne disqualifie

en rien les calculs titanesques des Laplace, Le Verrier, etc. Mais, en une page, Poincaré nous a ouvert la porte d'un nouveau monde¹³ !

Un théorème de coïncidence des surfaces asymptotiques

On s'intéresse toujours au système constitué de trois corps décrit précédemment. Avec le théorème de récurrence, Poincaré a montré un premier résultat de stabilité pour ce système : presque toute trajectoire repasse une infinité de fois près de sa position d'origine. Ce résultat est sans doute trop abstrait pour avoir des conséquences pratiques. Poincaré continue donc son étude et s'intéresse à des formes de stabilité plus concrètes : Existe-t-il des trajectoires périodiques ? Si oui, comment se comportent les trajectoires voisines ? Peut-on montrer que les trajectoires "ne s'en vont pas trop loin" ?

Commençons par expliquer pourquoi, bien que l'espace des configurations du système soit de dimension 4, on peut étudier ces trajectoires dans des espaces de dimension 3.

Suivant la configuration dans laquelle il se trouve, le système possède une énergie plus ou moins grande. Par abus de langage, on parle donc de l'énergie d'une configuration ou d'un point dans l'espace des configurations¹⁴. Pour chaque valeur E , on peut alors considérer l'ensemble de tous les points de l'espace des configurations dont l'énergie est égale à E ; cet ensemble s'appelle l'*hypersurface d'énergie E* ; on peut montrer que c'est un sous-espace de dimension 3 à l'intérieur de l'espace de configurations (sauf pour quelques valeurs de E qui ne nous intéresseront pas). Et, comme l'évolution du système se fait toujours à énergie constante (aucun élément extérieur ne vient fournir ou retirer de l'énergie et il n'y a pas de frottements), chaque trajectoire du système reste dans une hypersurface d'énergie. Ceci permet d'étudier, quand on le souhaite, le système restreint à une hypersurface d'énergie¹⁵. Comme les hypersurfaces d'énergie sont de dimension 3, c'est bien pratique pour visualiser les trajectoires et faire des dessins.

Souvenons-nous maintenant que notre système est constitué d'un corps A de masse $1 - \mu$, d'un corps B de masse μ et d'un corps C de masse négligeable, et expliquons le rôle que va jouer la masse μ . En fait, Poincaré utilise cette masse comme un paramètre. Lorsque μ est nulle, la seule force subie par le corps C est l'attraction du corps A , qui reste fixe au point O ; on connaît donc parfaitement le comportement du système : quelle que soit sa position et sa vitesse initiale, le corps C parcourt une ellipse dont un foyer se trouve en O . Poincaré va alors chercher à comprendre comment se déforment les trajectoires lorsque μ , partant de 0, augmente petit à petit. Le plus souvent, il obtiendra ainsi des résultats du type : "Lorsque μ est assez petit, les trajectoires possèdent telle ou telle caractéristique".

Voici un exemple de cette démarche. Lorsque μ est nul, toutes les trajectoires du système sont périodiques. Poincaré montre alors que, lorsque μ s'écarte de 0, certaines trajectoires demeurent périodiques tant que μ ne devient pas trop grand. Il obtient donc :

Théorème (Poincaré). *Lorsque la masse μ est assez petite, le système à trois corps considéré possède des trajectoires périodiques ; de plus, le nombre de trajectoires périodiques tend vers l'infini lorsque μ tend vers 0.*

¹³Ce monde s'appelle la *théorie ergodique*. C'est un domaine des mathématiques qui consiste essentiellement à essayer de comprendre le comportement statistique de "presque toutes les trajectoires" de certains systèmes. Aujourd'hui, des centaines de mathématiciens travaillent dans ce domaine.

¹⁴L'énergie du point (x, y, x', y') est égale à $\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - V(x, y)$, mais peu importe.

¹⁵C'est également ceci qui autorise à parler de l'énergie d'une trajectoire, ce que nous avons déjà fait sans vergogne dans l'énoncé du théorème de Hill.

Fort de ce résultat, Poincaré cherche à comprendre comment se comportent les trajectoires voisines d’une trajectoire périodique. Fixons une trajectoire périodique T . Comment se comporte une trajectoire T' dont la position initiale est située très près de la trajectoire périodique T ? Bien sûr, on aimerait qu’une telle trajectoire T' reste proche de la trajectoire périodique T à tout jamais (la trajectoire T' serait alors “périodique à une petite erreur près”). Hélas, la situation n’est pas toujours aussi idyllique. Il arrive au contraire que l’on puisse trouver, arbitrairement près de la trajectoire périodique T , des points d’où partent des trajectoires qui s’éloignent ensuite exponentiellement vite de T ; dans ce cas, Poincaré dit que la trajectoire périodique T est *instable*¹⁶. Poincaré remarque que la moitié au moins des trajectoires périodiques dont il a prouvé l’existence sont instables ; on ne peut donc pas faire l’économie de l’étude de ces trajectoires.

Considérons donc une trajectoire périodique instable T . Poincaré définit deux types de trajectoires ayant un comportement particulièrement intéressant :

- les trajectoires dont le comportement consiste à s’approcher de plus en plus de la trajectoire périodique T ; ces trajectoires sont dites *asymptotes dans le futur* à T .
- les trajectoires qui ont le même comportement que ci-dessus lorsqu’on renverse le sens du temps ; autrement dit, les trajectoires qui, lorsqu’on remonte le temps vers le passé, s’approchent de plus en plus de la trajectoire périodique T ; ces trajectoires sont dites *asymptotes dans le passé* à T . Ce sont des trajectoires qui, dans le passé étaient très proches de la trajectoire périodique T , puis s’en sont éloignées petit à petit.

Nous noterons S_T^s l’ensemble des positions initiales de toutes les trajectoires asymptotes à T dans le futur, et S_T^u l’ensemble des positions initiales des trajectoires asymptotes à T dans le passé¹⁷. Poincaré prouve que S_T^s et S_T^u sont des surfaces (qu’il appelle *surfaces asymptotiques* associées à T). Puis, il énonce un second résultat de stabilité :

“Théorème de coïncidence des surfaces asymptotiques.” *Lorsque la masse μ est assez petite, la surface asymptotique S_T^s et la surface asymptotique S_T^u associées à une orbite périodique instable T coïncident entre elles.*

Même si cela ne saute pas immédiatement aux yeux, cet énoncé implique, qu’en un certain sens, le système est stable ; je vais essayer d’expliquer pourquoi.

Tout d’abord, rappelons que les points de la surface S_T^u sont les positions initiales de trajectoires qui étaient proches de la trajectoire périodiques T dans le passé, et qui s’en sont ensuite éloignées. Les points la surface S_T^s sont, quant à eux, les positions initiales de trajectoires qui, dans le futur, vont se rapprocher indéfiniment de la trajectoire périodique T . Affirmer que les surfaces S_T^s et S_T^u coïncident, c’est donc affirmer que les trajectoires qui étaient proches de la trajectoire périodique T dans le passé, et qui s’en sont ensuite éloignées, finiront par “rentrer au bercail” en s’approchant à nouveau de T . Autrement dit (quitte à caricaturer un peu) : le théorème de coïncidence des surfaces asymptotiques affirme que les trajectoires qui avaient un mouvement presque périodique dans le passé, mais dont le mouvement s’est ensuite dérèglé, finiront par “rentrer dans le droit chemin” et retrouveront leur mouvement presque périodique initial.

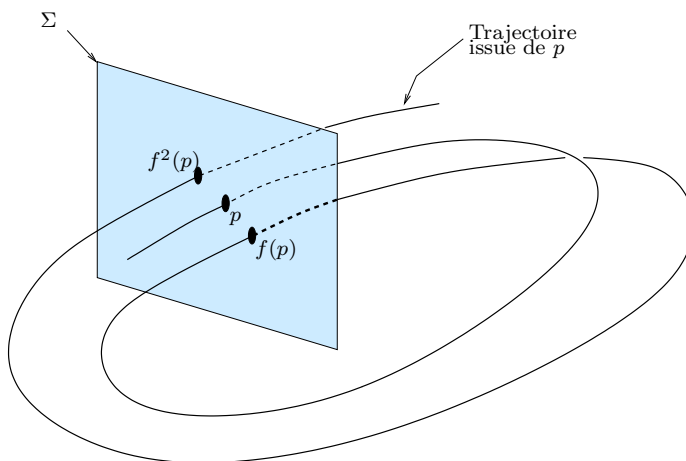
¹⁶Aujourd’hui, on dirait plutôt *hyperbolique*, mais *instable* est plus parlant.

¹⁷Les lettres “s” et “u” dans S_T^s et S_T^u sont les initiales des mots *stable* et *instable* dans le patois de nos amis d’outre-Manche et outre-Atlantique. De nos jours, on parle en effet des *surfaces stable* et *instable* d’une orbite périodique. À mon humble avis, on aurait mieux fait de garder la terminologie de Poincaré...

En fait, le “théorème de coïncidence des surfaces asymptotiques” nous apprend également quelque chose sur le comportement de *toutes* les autres trajectoires du système. Plaçons-nous dans une hypersurface d’énergie qu’on notera H (rappelons que c’est un espace de dimension 3). Considérons une trajectoire périodique instable T située dans H . En réfléchissant un peu, on peut voir que les surfaces asymptotiques S_T^s et S_T^u sont contenues dans H . Maintenant, le point crucial est le suivant : la coïncidence des surfaces asymptotiques S_T^s et S_T^u implique que $S_T^s = S_T^u$ est une surface fermée¹⁸ (je ne peux hélas pas expliquer pourquoi ici). Les trajectoires du système ne peuvent pas traverser cette surface fermée $S_T^s = S_T^u$, qui agit donc comme une “barrière à trajectoires”. Pour l’instant, nous n’avons considéré qu’une seule trajectoire périodique instable, mais, lorsque μ est petite, il y a beaucoup de telles trajectoires. Supposons qu’il y en ait beaucoup dans l’hypersurface d’énergie H . Chacune de ces trajectoires périodiques instables nous fournit alors une surface fermée dans H qui agit comme une barrière à trajectoires. Et chaque trajectoire se trouve confinée dans une mince région de H située entre deux surfaces qui constituent pour elle des barrières infranchissables. Ce que semble résumer parfaitement l’épigraphe choisie par Poincaré pour son mémoire : *Nunquam praescriptos transibunt sidera fines*¹⁹.

Avant de raconter la façon dont Poincaré se propose de démontrer le théorème de coïncidence des surfaces asymptotiques, il est important d’expliquer comment celui-ci ramène l’étude des surfaces asymptotiques S_T^s et S_T^u à l’étude de deux courbes tracées sur une surface.

Plaçons-nous dans une hypersurface d’énergie. À l’intérieur de cet espace de dimension 3, Poincaré trouve une surface Σ et un nombre k , tels que chaque trajectoire du système vient traverser cette surface Σ au moins une fois tous les k ans. Une telle surface s’appelle une *section*. Poincaré définit alors une application f de la surface Σ dans elle-même : pour chaque point p de Σ , l’image de p par f est le point de Σ où la trajectoire issue de p revient traverser Σ pour la première fois (voir la figure ci-dessous). On dit que f est l’*application de premier retour* des trajectoires sur la section Σ .



Pour tout point p de la section Σ , la trajectoire passant par p intersecte successivement Σ en p , puis en $f(p)$, puis en $f^2(p) = f(f(p))$, puis en $f^3(p) = f(f^2(p))$, etc. L’étude de la trajectoire passant par p revient alors essentiellement à l’étude de la suite de points

¹⁸Plus précisément, en langage technique, c’est un tore immergé (il y a un cercle de point doubles).

¹⁹C’est-à-dire : *Les astres ne franchissent jamais les limites qui leur ont été fixées*. Notons néanmoins que Poincaré n’évoque nulle part, à ma connaissance, les implications du théorème de coïncidence des surfaces asymptotiques en termes de confinement des trajectoires entre des barrières.

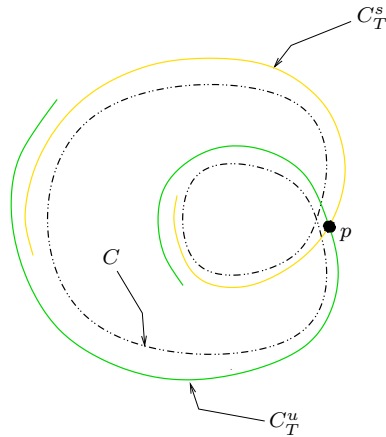
$p, f(p), f^2(p), f^3(p), \dots$. Par exemple, la trajectoire passant par p est périodique si et seulement si la suite de points $p, f(p), f^2(p), f^3(p), \dots$ est périodique.

La plupart des propriétés du système peuvent se lire sur l'application f . Ainsi, le fait que le système préserve le volume (dans l'espace des configurations de dimension 4) est équivalent au fait que *l'application f préserve l'aire*. Ceci signifie que, pour toute courbe fermée Γ tracée sur la section Σ , l'aire entourée par la courbe Γ est égale à l'aire entourée par la courbe $f(\Gamma)$.

De même, l'étude des surfaces asymptotiques se ramène à l'étude de courbes tracées sur la section Σ . En effet, considérons une trajectoire périodique instable T , et notons p l'un des points d'intersection de la trajectoire T avec la section S . Puisque la trajectoire T est périodique, la suite de points $p, f(p), f^2(p), \dots$ est également périodique ; autrement dit, il existe un entier i tel que $f^i(p) = p$. Quitte à remplacer l'application de premier retour f par l'application de i^{eme} retour f^i , on peut alors supposer que $f(p) = p$. Les surfaces asymptotiques S_T^s et S_T^u de la trajectoire T intersectent la section Σ selon deux courbes C_T^s et C_T^u qui passent par p . Pour montrer le théorème de coïncidence des surfaces asymptotiques, il suffit de montrer que les courbes C_T^s et C_T^u coïncident.

Venons-en maintenant à la preuve que donne Poincaré du théorème de coïncidence des surfaces asymptotiques. Cette preuve est loin d'être limpide ; je vais néanmoins essayer d'en expliquer le principe en la simplifiant²⁰.

Rappelons qu'il s'agit de montrer que les courbes C_T^s et C_T^u définies ci-dessus coïncident. Poincaré commence par montrer que, lorsque μ est petite, les courbes C_T^s et C_T^u passent très près l'une de l'autre²¹. Pour cela, il développe l'équation de la courbe C_T^s selon les puissances de $\sqrt{\mu}$, c'est-à-dire qu'il écrit l'équation de la courbe C_T^s comme la somme d'une infinité de termes : un terme d'ordre 0 qui ne dépend pas de $\sqrt{\mu}$, un terme d'ordre 1 proportionnel à $\sqrt{\mu}$, un terme d'ordre 2 proportionnel au carré de $\sqrt{\mu}$, etc. Il fait de même pour l'équation de la courbe C_T^u . La somme du terme d'ordre 0 et du terme d'ordre 1 dans l'équation de C_T^s correspond à l'équation d'une courbe C qui dessine une double boucle passant près de p ; la somme du terme d'ordre 0 et du terme d'ordre 1 dans l'équation de C_T^u correspond à l'équation de la même courbe C , mais parcourue dans le sens inverse. Par ailleurs, les termes d'ordres plus grands que 2 dans les équations sont tous négligeables lorsque la masse μ est petite. On en déduit que, lorsque μ est petite, les courbes C_T^s et C_T^u restent toutes deux très proches de la courbe C . Ceci implique que la courbe C_T^s passe nécessairement très près de la courbe C_T^u (voir la figure ci-dessus).



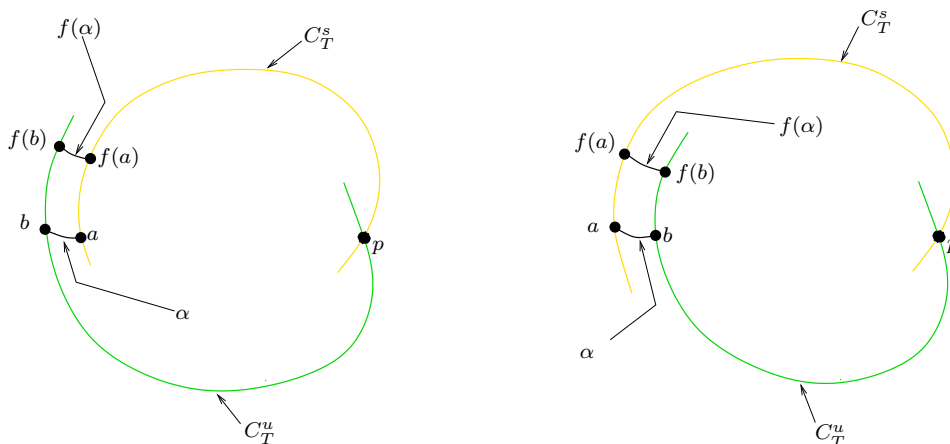
Poincaré propose alors deux méthodes différentes pour terminer la preuve. La première méthode est analytique. Elle consiste simplement à prouver que chaque terme dans l'équation de C_T^s coïncide avec le terme de même ordre dans l'équation de C_T^u . Poincaré explique comment calculer l'un après l'autre les différents termes, mais ne pousse pas as-

²⁰Je ne prétends pas restituer ici exactement les arguments de Poincaré (ce serait beaucoup trop long, et beaucoup trop technique) ; j'espère néanmoins ne pas avoir trahi l'esprit de ces arguments.

²¹Précision technique : cette phrase sous-entend que l'on peut "suivre l'orbite périodique T lorsque μ varie". Plus précisément, on a une famille continue $(T_\mu)_{\mu \in [0, \epsilon]}$ d'orbites périodiques paramétrée par μ , et, à chaque fois que j'écris T, p, C_T^s , etc., il faut lire $T_\mu, p_\mu, C_{T_\mu}^s$, etc.

sez loin ses investigations pour décider si cela permet de conclure la démonstration. Il ne s'attarde guère ; il préfère sans aucun doute la seconde méthode.

Cette seconde méthode est géométrique. Puisque les courbes C_T^s et C_T^u passent près l'une de l'autre, on peut trouver un point a sur C_T^s et un point b sur C_T^u proches l'un de l'autre. Puisque les courbes C_T^s et C_T^u sont invariantes par l'application f , les points $f(a)$ et $f(b)$ sont situés respectivement sur les courbes C_T^s et C_T^u . On choisit alors un petit arc α qui joint le point a au point b . On note $[a, f(a)]^s$ l'arc de la courbe C_T^s joignant a à $f(a)$, et $[f(b), b]^u$ l'arc de la courbe C_T^u joignant $f(b)$ à b . Poincaré montre qu'on peut se débrouiller pour que l'arc α soit disjoint de son image $f(\alpha)$, et pour que les arcs α et $f(\alpha)$ soient disjoints des arcs $[a, f(a)]^s$ et $[f(b), b]^u$. Il affirme que ceci exclut toutes les situations géométriques sauf trois : la situation où les courbes C_T^s et C_T^u coïncident, et les deux situations représentées sur la figure ci-dessous. Il reste donc à exclure ces deux dernières situations. Pour ce faire, Poincaré considère la courbe fermée Γ obtenue en suivant la courbe C_T^s de p à a , puis l'arc α de a à b , puis la courbe C_T^u de b à p . L'image $f(\Gamma)$ de cette courbe est obtenue en suivant la courbe C_T^s de p à $f(a)$, puis l'image de l'arc $f(\alpha)$ de $f(a)$ à $f(b)$, puis la courbe C_T^u de $f(b)$ à p . Puisque l'application f préserve l'aire, l'aire entourée par la courbe Γ doit être égale à l'aire entourée par la courbe $f(\Gamma)$. Dans la situation représentée à gauche sur la figure ci-dessous, l'aire entourée par la courbe Γ est strictement plus petite que l'aire entourée par la courbe $f(\Gamma)$ (la différence entre les deux est l'aire du quadrilatère $(a, f(a), f(b), b)$) ; cette situation est donc impossible. Dans la situation représentée à droite, l'aire entourée par la courbe Γ est strictement plus grande que l'aire entourée par la courbe $f(\Gamma)$; cette situation est donc également impossible. On a donc exclu toutes les situations sauf celle où les courbes C_T^s et C_T^u coïncident, ce qui conclut la preuve.



3 La découverte des intersections homoclines

Une dizaine de mémoires concourent pour le prix du roi Oscar. Cependant, dès que Mittag Leffler, Weierstrass et Hermite commencent à étudier les manuscrits qu'ils ont reçus, il leur apparaît bien vite que l'un des mémoires, intitulé *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, est nettement supérieur aux autres. Ce mémoire les impressionne autant par les résultats qu'il contient, que par l'éclairage totalement nouveau qu'il jette sur le vieux problème auquel il est consacré : la stabilité du Système Solaire. C'est, écrivent-ils, "l'œuvre profonde et originale d'un génie mathématique dont la place est marquée parmi les grands géomètres du siècle". Et, même si l'anonymat des candidats sera respecté jusqu'au bout, il ne fait aucun doute que Mittag Leffler, Hermite et Weierstrass

ont dès le début deviné le nom de ce “génie mathématique”.

Le 21 janvier 1889, Mittag Leffler écrit à Poincaré pour lui annoncer que le prix lui a été attribué, et confie sans plus attendre le manuscrit de Poincaré à un jeune mathématicien de Stockholm, Lars Edvard Phragmén, afin que celui-ci le prépare pour l’imprimeur.

En juillet, Phragmén a terminé son travail. Il signale néanmoins à Mittag Leffler cinq “*points obscurs*” dans le mémoire de Poincaré, qui lui semblent mériter d’être éclaircis. Mittag-Leffler transmet à Poincaré la liste de ces “points obscurs”, tout en indiquant qu’à son avis, seul le cinquième et dernier point réclame une réelle attention. Ce dernier point concerne certaines quantités que Poincaré développe selon les puissances de $\sqrt{\mu}$ (par exemple, les équations des courbes C_T^s et C_T^u dans la preuve du théorème de coïncidence des courbes asymptotiques). On peut toujours effectuer un tel développement, mais pour en tirer certaines informations, il faut que le développement soit *convergent*. Dans son mémoire, Poincaré sous-entend que les développements qu’il utilise sont convergents, mais il ne prend souvent pas la peine de le justifier. Et Phragmén pense que quelques explications supplémentaires à ce sujet seraient bien utiles aux lecteurs.

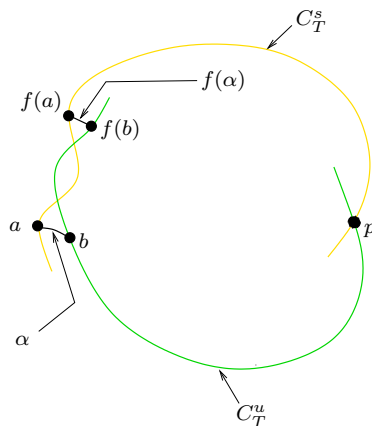
Poincaré va rapidement se rendre compte que Phragmén a mis le doigt sur un problème important. Souvenons-nous que, dans son mémoire, Poincaré envisageait deux preuves possibles pour le théorème de coïncidence des surfaces asymptotiques : une preuve analytique (qu’il ne menait pas à terme), et une preuve géométrique. La remarque de Phragmén implique qu’il y a un “trou” dans les “preuves” imaginées par Poincaré : pour que celles-ci fonctionnent, il faut démontrer que les développements selon les puissances de $\sqrt{\mu}$ considéré sont convergents. Reprenant ses calculs, Poincaré s’aperçoit qu’on ne peut pas espérer “boucher ce trou” : en général, les développements selon les puissances de $\sqrt{\mu}$ des équations des courbes C_T^s et C_T^u *ne sont pas convergents* ([17, 1]). Heureusement, il pense pouvoir contourner ce problème dans la preuve géométrique... jusqu’à ce qu’il découvre une autre erreur importante dans cette preuve !

Reprenons la “preuve” géométrique du théorème de coïncidence des surfaces asymptotiques, et essayons d’y débusquer l’erreur. Rappelons que l’on considère une trajectoire périodique instable T , les surfaces asymptotiques S_T^s et S_T^u associées à T , et les courbes C_T^s et C_T^u obtenues comme intersections des surfaces S_T^s et S_T^u avec la section Σ . On doit prouver que ces courbes coïncident. Rappelons que la première étape consiste à montrer que les courbes C_T^s et C_T^u passent très près l’une de l’autre. Cette première étape utilise *a priori* un développement selon les puissances de $\sqrt{\mu}$, mais le problème créé par la divergence de ce développement n’est pas insurmontable ; ce n’est pas là que se situe la véritable erreur. On considère alors un point a sur la courbe C_T^s et un point b sur la courbe C_T^u proches l’un de l’autre, ainsi qu’un arc α joignant ces deux points. L’argument principal de la preuve consiste alors à remarquer qu’aucune des deux situations géométriques représentées sur la figure page 13 n’est compatible avec le fait que l’application de premier retour f préserve l’aire (l’aire entourée par la courbe $\Gamma = [p, a]^s \cup \alpha \cup [b, p]^u$ doit être égale à l’aire entourée par la courbe image $f(\Gamma) = [p, f(a)]^s \cup f(\alpha) \cup [f(b), f(p)]^u$). Cet argument est incontestable.

En fait, l’erreur est la suivante : Poincaré a supposé tacitement que les courbes C_T^s et C_T^u ne peuvent se croiser. Ce faisant, il a oublié sans y prendre garde la situation, représentée sur la figure ci-dessous, où les arcs $[a, f(a)]_{C_T^s}$ et $[b, f(b)]_{C_T^u}$ se coupent. Or, aucun argument ne permet d’écarter cette situation (et, en tout cas, pas l’argument de préservation de l’aire invoqué ci-dessus : sur la figure ci-contre, l’aire entourée par la courbe $\Gamma = [p, a]^s \cup \alpha \cup [b, p]^u$ est égale à l’aire entourée par la courbe $f(\Gamma) = [p, f(a)]^s \cup f(\alpha) \cup [f(b), p]^u$). Poincaré doit rapidement se rendre à l’évidence : il n’y a aucune raison pour

que les surfaces asymptotiques S_T^s et S_T^u coïncident.

L'origine de l'erreur de Poincaré est assez claire. Dans un précédent mémoire ([15]), Poincaré avait étudié en détail le comportement des trajectoires de systèmes dont l'espace des configurations est de dimension 2. Il avait alors introduit certaines notions (*point fixe instable*, *courbe asymptotique*, etc.) dont les généralisations en dimensions supérieures ont donné lieu, dans le mémoire pour le prix du roi Oscar, aux notions de *trajectoire périodique instable*, de *surface asymptotique*, etc. Or, lorsque l'espace des configurations est de dimension 2, il est évident que les courbes asymptotiques d'un point fixe instable ne peuvent se couper, sauf à coïncider. Poincaré a tout simplement oublié que ce fait est spécifique aux espaces des configurations de dimension 2, et ne se généralise nullement en dimension supérieure.



Ainsi s'effondre le "théorème" de coïncidence des surfaces asymptotiques. Il n'est pas vrai que les surfaces asymptotiques S_T^s et S_T^u d'une trajectoire périodique instable T coïncident toujours. En utilisant les intersections des surfaces asymptotiques, Poincaré va certes prouver (voir la partie 4) que, quelle que soit la trajectoire périodique instable T , il existe une infinité de trajectoires qui, après s'être éloignées de T , vont finir par se rapprocher à nouveau de cette même trajectoire. Mais c'est un résultat de stabilité bien faible par rapport au théorème initialement annoncé. Rappelons qu'un des intérêts de ce théorème était qu'il fournissait des surfaces fermées qui agissaient comme des barrières entre lesquelles les trajectoires étaient confinées. Puisque plus rien n'indique l'existence de telles barrières, rien n'interdit *a priori* à certaines trajectoires d'aller se promener un peu partout dans l'espace des configurations. Et, l'épigraphe originale du mémoire, *Nunquam praescriptos transibunt sidera fines*, ne semble plus tellement refléter le contenu de celui-ci.

Dans la lettre qu'il adresse à Mittag-Leffler pour lui révéler l'existence d'une erreur dans son mémoire, Poincaré ne cache d'ailleurs pas sa déception ([18]) :

"Il n'est pas vrai que les surfaces asymptotiques soient fermées, au moins dans le sens où je l'entendais d'abord. Ce qui est vrai, c'est que si je considère les deux parties de cette surface (que je croyais hier encore raccordées l'une l'autre), elles se coupent suivant une infinité de courbes trajectoires asymptotiques.[...] Je ne vous dissimulerai pas le chagrin que me cause cette découverte. Je ne sais d'abord si vous jugerez que les résultats qui subsistent, à savoir l'existence de solutions périodiques, celle de solutions asymptotiques, la théorie des exposants caractéristiques, la non-existence des intégrales uniformes et la divergence des séries de M. Linstedt²², méritent encore la haute récompense que vous avez bien voulu m'accorder."

Il n'y a pas l'ombre d'un doute que, même entaché de cette erreur, le mémoire de Poincaré mérite encore largement le prix. Mais le mémoire doit être remanié... Et il y a un problème pratique : le mémoire a déjà été imprimé ! Les premiers exemplaires viennent même d'être envoyés²³ ! S'en suit donc un épisode assez cocasse où Mittag Leffler,

²²Poincaré oublie sa théorie des invariants intégraux et son théorème de stabilité à la Poisson.

²³Il est vrai que Poincaré a tardé à répondre à Mittag-Leffler : la lettre de Mittag Leffler à Poincaré lui indiquant les points obscurs relevés par Phragmén est datée du 16 Juillet ; la réponse de Poincaré est datée du 1er décembre.

qui craint que l'existence d'une erreur dans le mémoire lauréat nuise à sa réputation, ou provoque la colère du Roi, cherche à récupérer les différents exemplaires du mémoire le plus discrètement possible. Dans une lettre, il explique à Poincaré comment il compte s'y prendre, devant ici la distribution du courrier, invoquant là tel ou tel prétexte pour que le destinataire lui renvoie le mémoire avant même d'y avoir jeté un œil, se réjouissant que certains mathématiciens avec lesquels il est en délicatesse, comme Kronecker, n'aient pas encore reçu d'exemplaire, etc. Il ira jusqu'à cacher l'existence de l'erreur à Weierstrass, ce que celui-ci prendra fort mal...

De son côté Poincaré amende son mémoire, y supprimant bien sûr le théorème faux, et en modifiant légèrement l'introduction afin de mettre l'accent sur les autres résultats ([17],[1]). Et il prend à sa charge les frais d'impression du nouveau mémoire, qui s'élèveront à 3585 couronnes... environ 1000 couronnes de plus que le prix qu'il avait reçu en tant que lauréat du concours !

Revenons-en à des considérations plus mathématiques. Les arguments géométriques qu'avait élaborés Poincaré pour démontrer le théorème de coïncidence des surfaces asymptotiques, même s'ils ne forment pas une preuve complète, nous apprennent néanmoins quelque chose : pour toute trajectoire périodique instable T , soit les courbes C_T^s et C_T^u coïncident, soit elles se coupent. De manière équivalente, soit les surfaces asymptotiques S_T^s et S_T^u coïncident, soit elles se coupent. Dans le second cas, on dit que le système possède une *intersection homocline*. Et puisque tout indique que les système qui admettent des intersections homoclines existent, il faut bien les étudier...

4 “Une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées”

Aussi paradoxal que cela puisse paraître, l'erreur de Poincaré sera extrêmement féconde. En effet, en explorant les conséquences de l'existence d'intersections homoclines, Poincaré va faire une découverte d'une importance mathématique, physique, et même philosophique, considérable : les systèmes déterministes les plus simples peuvent présenter un comportement à long terme effroyablement complexe.

Débutant son exploration, Poincaré s'aperçoit tout d'abord qu'une intersection homocline n'arrive jamais seule ([19]) :

Proposition. *Considérons une trajectoire périodique instable T , et un point d'intersection p de cette trajectoire avec la section Σ . Notons C_T^s et C_T^u les courbes passant par p , obtenues comme intersections des surfaces asymptotiques S_T^s et S_T^u avec la section Σ .*

Supposons que les courbes C_T^s et C_T^u se coupent ailleurs qu'en p . Alors, les courbes C_T^s et C_T^u se coupent une infinité de fois. De plus, si q et q' sont deux points d'intersections quelconques de C_T^s avec C_T^u , alors C_T^u coupe une infinité de fois l'arc de C_T^s qui joint q à q' , et C_T^s coupe une infinité de fois l'arc de C_T^u qui joint q à q' . Enfin, les points d'intersection des courbes C_T^s et C_T^u appartiennent à une infinité de trajectoires différentes.

Cette proposition est essentiellement une conséquence du théorème de récurrence. En voici une rapide preuve (dont on peut tout-à-fait omettre la lecture) :

Preuve quasi-complète de la proposition ci-dessus. On note f l'application de retour sur la section Σ . Quitte à remplacer f par un de ses itérés, on peut supposer que $f(p) = p$.

Si les courbes C_T^s et C_T^u se coupent en un point $q \neq p$, alors l'invariance des courbes C_T^s et C_T^u par f implique que le retours successifs $f(q)$, $f^2(q)$, $f^3(q)$, *etc.* de q sur la section Σ sont tous des points d'intersections des courbes C_T^s et C_T^u . Ainsi, les courbes C_T^s et C_T^u se coupent en une infinité de points.

Considérons maintenant deux points d'intersections q et q' des courbes C_T^s et C_T^u . Notons I^s l'arc de la courbe C_T^s qui joint q à q' , et I^u l'arc de la courbe C_T^u qui joint q à q' . L'union des arcs I^s et I^u borde une région R de la section Σ . L'argument clef est alors le suivant : le théorème de récurrence nous dit qu'il existe des trajectoires dont la position initiale est dans R et qui viennent repasse dans R une infinité de fois. On en déduit qu'il existe une infinité d'entiers n (les temps de retours des trajectoires évoquées ci-dessus) tel que la région $f^n(R)$ rencontre la région R . La conservation de l'aire implique que la région $f^n(R)$ ne peut pas être entièrement contenue dans la région R , ni l'inverse. Lorsque la région $f^n(R)$ rencontre la région R , le bord de $f^n(R)$ doit donc rencontrer le bord de R . On note alors que, quel que soit n , le bord de la région $f^n(R)$ est contenu dans la réunion des courbes C_T^s et C_T^u (puisque le bord de la région R est contenu dans l'union de ces deux courbes et puisque ces courbes sont invariantes par f). Pour chaque entier n tel que le bord de la région R coupe le bord de la région $f^n(R)$, il y a donc deux possibilités : soit que la courbe C_T^s coupe l'arc I^u de la courbe C_T^u qui joint q à q' , soit la courbe C_T^u coupe l'arc I^s de la courbe C_T^s qui joint q à q' . Il en résulte que la courbe C_T^s doit couper l'arc de C_T^u qui joint q à q' une infinité de fois, ou que la courbe C_T^u doit couper l'arc de C_T^s qui joint q à q' une infinité de fois. En travaillant un peu plus, on peut remplacer le "ou" de la phrase précédente par un "et", puis montrer que les points d'intersections qu'on a trouvés appartiennent à une infinité d'orbites différentes. \square

Dans un premier temps, la proposition ci-dessus apparaîtra à Poincaré comme un résultat de stabilité. En effet, elle implique que, pour toute trajectoire périodique instable T , les surfaces asymptotiques S_T^s et S_T^u se coupent le long d'une infinité de trajectoires. Autrement dit, il existe une infinité de trajectoires qui sont à la fois asymptotes dans le passé et asymptotes dans le futur à la trajectoire T . Autrement dit, parmi les trajectoires qui étaient proches de la trajectoire périodique T dans le passé, puis s'en sont éloignées, il y en a une infinité qui finiront par revenir vers T dans le futur.

Mais Poincaré essaie alors d'imaginer les conséquences de cette proposition sur l'allure des courbes C_T^s et C_T^u . À chaque fois que la courbe C_T^u vient couper la courbe C_T^s en deux points q et q' , elle devra ensuite revenir couper cette courbe *une infinité de fois* entre q et q' . De même en échangeant les rôles des courbes C_T^s et C_T^u . Et tout ceci sans qu'aucune des deux courbes C_T^s et C_T^u ne se recoupe jamais elle-même. Essayez de dessiner deux telles courbes ; vous comprendrez mieux l'effroi de Poincaré ([19]) :

“Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini [...], ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées ; chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé par la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de la dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme.”

Il apparaît maintenant clairement à Poincaré que la proposition énoncée ci-dessus est tout le contraire d'un résultat de stabilité. Les courbes C_T^s et C_T^u ne sont certes que des

objets mathématiques annexes introduits pour étudier le système auquel on s'intéresse²⁴. Mais il est facile de comprendre que, dès lors que les courbes C_T^s et C_T^u se replient sur elles-mêmes d'une manière très complexes, certaines trajectoires du système ne peuvent avoir une allure simple. Rappelons en effet que, si r est un point de la courbe C_T^s , alors les points d'intersections successifs $r, f(r), f^2(r), \dots$ de la trajectoire issues de r avec la section Σ sont situés sur la courbe C_T^s , de plus en plus près²⁵ du point p . Ainsi, si la courbe C_T^s fait des détours compliqués pour aller du point r au point p , alors la suite des points $r, f(r), f^2(r), \dots$ devra suivre ces détours compliqués. Et la trajectoire passant par r sera elle aussi forcée à suivre un chemin très complexe pour passer successivement par les points $r, f(r), f^2(r), \dots$. Sans parler de la façon dont les différentes trajectoires s'enchevêtreront...

Résumons. En découvrant l'erreur dans son mémoire, Poincaré avait compris qu'un système déterministe *a toutes les chances de présenter des intersections homoclines*. Il vient maintenant de se rendre compte que n'importe quel système qui présente une intersection homocline possède automatiquement des trajectoires extrêmement complexes.

Poincaré ne s'arrête pas là, et continue à réfléchir aux implications de l'existence d'intersections homoclines. Il réalise alors qu'un système qui possède une intersection homocline est *sensible aux conditions initiales* : un minuscule changement dans la position initiale d'une trajectoire du système peut modifier totalement le comportement à long terme de cette trajectoire.

Afin d'expliquer cela, rappelons qu'une trajectoire a des comportements radicalement différents selon qu'elle coupe la section Σ en des points situés sur la courbe C_T^s , sur la courbe C_T^u , à l'intersection de ces deux courbes, ou en dehors de ces deux courbes²⁶. Le fait que les courbes C_T^s et C_T^u forment *un réseau à maille infiniment serrées*, signifie donc qu'on a un mélange inextricable de trajectoires ayant des comportements radicalement différents. Plus précisément : arbitrairement près d'un point situé sur la courbe C_T^s , il existe en général des points situés sur la courbe C_T^u , des points situés à l'intersection des courbes C_T^s et C_T^u , et des points qui ne sont ni sur l'une ni sur l'autre de ces deux courbes ; il suffit donc d'un changement minuscule dans la position initiale d'une trajectoire pour que cette trajectoire, au lieu de couper la section S en un point de la courbe C_T^s , la coupe par exemple en un point de la courbe C_T^u ... ce qui changera entièrement le comportement à long terme de cette trajectoire.

L'existence de systèmes sensibles aux conditions initiales oblige à repenser entièrement les liens entre le déterminisme d'un système et la possibilité de prédire l'évolution de ce système. Poincaré a parfaitement compris cela, et l'explique avec une clarté admirable, quelques années plus tard, dans *La science et l'hypothèse* ([20]) :

“Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il

²⁴Rappelons que C_T^s et C_T^u ne sont pas des trajectoires.

²⁵Il ne s'agit pas ici d'une proximité “à vol d'oiseau”, mais d'une proximité *en suivant la courbe* C_T^s .

²⁶Dans le premier cas, on sait que la trajectoire va se rapprocher de plus en plus de la trajectoire périodique T dans le futur, mais on sait qu'elle ne s'approche pas de plus en plus de T lorsqu'on “remonte vers le passé”. Dans le deuxième cas, on sait que la trajectoire était proche de la trajectoire périodique T dans le passé, mais qu'elle ne va pas s'approcher de plus en plus de T dans le futur. Dans le troisième cas, on sait que la trajectoire était très proche de la trajectoire périodique T dans le passé, s'en est éloignée, mais va, dans le futur, se rapprocher à nouveau de cette trajectoire périodique. Enfin, dans le dernier cas, on sait que la trajectoire ne s'approche de plus en plus de T ni dans le passé, ni dans le futur.

nous faut, [...] ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de très petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produit une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible [...]"

Ainsi, cherchant au départ à démontrer des résultats de stabilité du Système Solaire, Poincaré en est arrivé à découvrir qu'au contraire, les systèmes déterministes, même les plus simples, ont en général un comportement effroyablement complexe, et extrêmement sensible à la moindre perturbation des conditions initiales. Bref, un comportement que nul n'irait qualifier de "stable" !

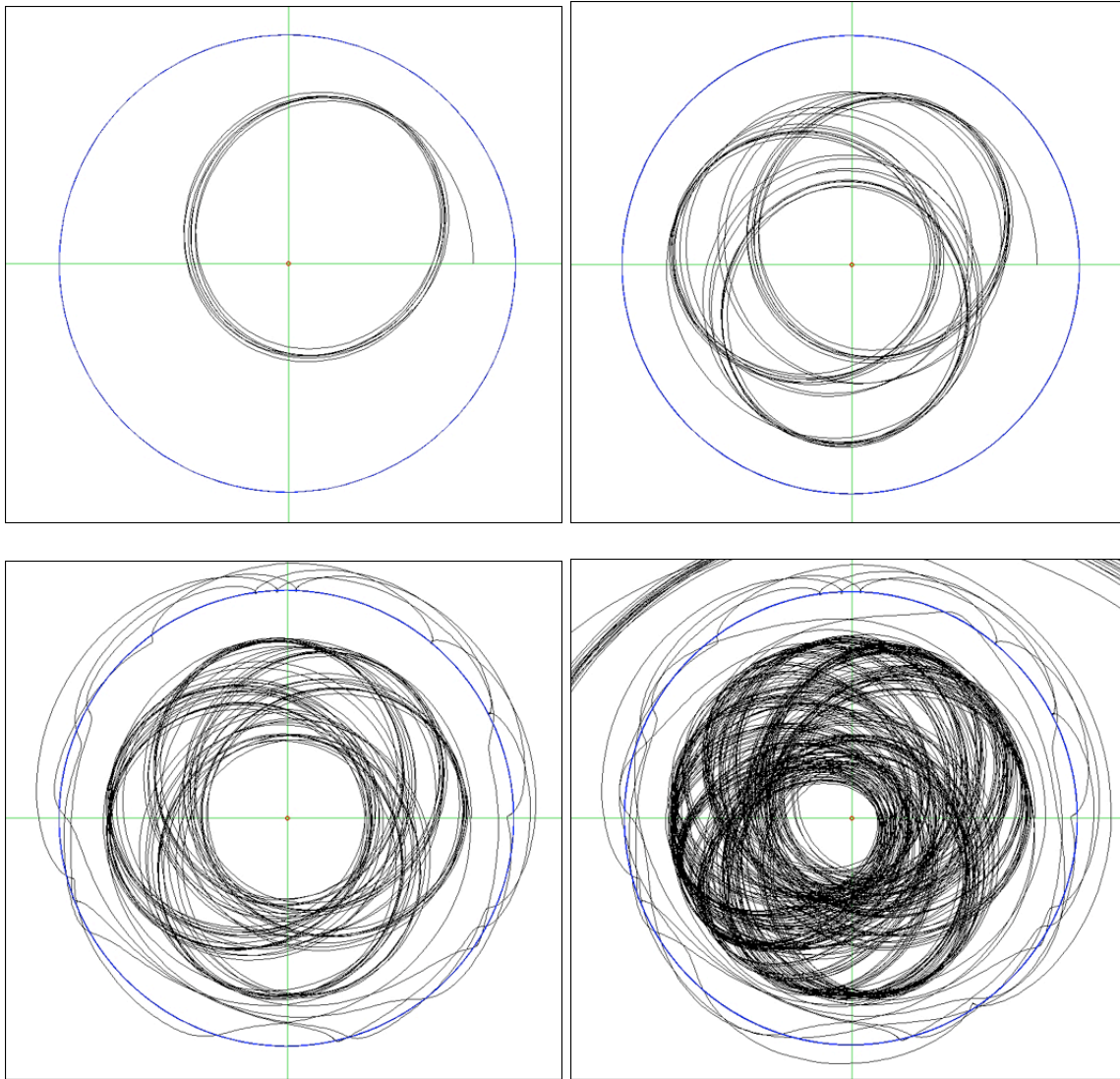
Aujourd'hui, il est facile de demander à un ordinateur de calculer des trajectoires du système à trois corps considéré par Poincaré. Le résultat d'un tel calcul est fiable tant qu'on ne s'intéresse au comportement des trajectoires que sur une durée relativement courte. Les figures ci-dessous montrent un exemple de trajectoire des corps A , B et C calculées ainsi²⁷. Dans cet exemple, la masse de B est 100 fois inférieure à celle de A . Le corps A décrit le minuscule cercle au centre de la figure, et le corps B décrit un cercle de rayon 99 fois plus grand. Au début du calcul (figure en haut à gauche), on voit que la trajectoire du corps C est très proche d'une ellipse képlérienne. Mais l'attraction que B exerce sur C perturbe légèrement cette trajectoire képlérienne, et l'ellipse ne se referme pas. Lorsqu'on observe la trajectoire de C pendant plus longtemps (figure en haut à droite), on voit que celle-ci est loin d'être périodique : à tout moment, la trajectoire du corps C est proche d'une ellipse képlérienne, mais peu à peu, le grand axe cette ellipse tourne autour de A , si bien que la trajectoire de C commence à "gribouiller" tout un anneau autour de A . Si on continue à observer la trajectoire de C (figure en bas à gauche), on aperçoit le genre de catastrophes qui peuvent arriver : à un moment donné, C est passé trop près de B , et est devenu un satellite de B . Et si on attend encore un peu (figure en bas à droite), on voit une autre catastrophe possible : sous l'action de l'attraction exercée par B , le corps C a subi une forte accélération qui l'a éjecté sur une trajectoire (presque elliptique) de grand diamètre qui sort de la figure²⁸.

Une autre expérience intéressante consiste à calculer les trajectoires des corps A , B et C pour une configuration initiale très proche de celle ayant servi pour les figures ci-dessus. Par exemple, il suffit de rapprocher les positions initiales de C et de A de moins de un pour cent (sans modifier la position initiale de B , ni les vitesses initiales des trois corps) pour que le corps C ne se fasse pas "éjecter" sur une trajectoire qui sort de l'écran. C'est une superbe illustration de la sensibilité aux conditions initiales !

Notons que le comportement des trajectoires calculées ci-dessus ne prouve évidemment rien quant à la stabilité du Système Solaire, ou même du système constitué du Soleil, de Jupiter et de la Terre. En effet, la force d'attraction qu'exerce Jupiter sur la Terre est environ 4000 fois inférieure à celle qu'exerce la planète B sur la planète C dans les figures ci-dessus ; c'est pourquoi la trajectoire de la Terre ne saurait "se dérégler" aussi vite que la trajectoire du corps C . Mais on aura compris que les découvertes de Poincaré débordent largement le cadre du seul Système Solaire.

²⁷Les figures ont été réalisées grâce à l'applet java *Kepler3C* disponible sur le web à l'adresse suivante : <http://www.physique.usherbrooke.ca/dsenech/mec/simul/Kepler3C.htm>

²⁸À ce stade, il est difficile d'assurer que les erreurs numériques sont toujours négligeables. Mais l'éjection d'un corps de très petite masse (ici le corps C) sur une trajectoire de grand diamètre lors du passage près d'un corps de masse beaucoup plus grande (ici, le corps B) est tout à fait possible. C'est même une technique utilisée pour emmener les sondes spatiales là où on le souhaite.



5 A-t-on démêlé le treillis des intersections homoclines ?

Avec les intersections homoclines, Poincaré découvre que des systèmes déterministes très naturels, régis par des équations différentielles simples, peuvent avoir un comportement très complexe et sensible aux conditions initiales. Mais il ne sait à peu près rien dire du comportement de ces systèmes (si ce n'est qu'il est d'une complexité qui semble inextricable, ce qui est bien maigre...). Je vais essayer de vous raconter très brièvement comment des mathématiciens du XXème siècle ont, au moins dans certain cas, "démêlé le treillis des intersections homoclines".

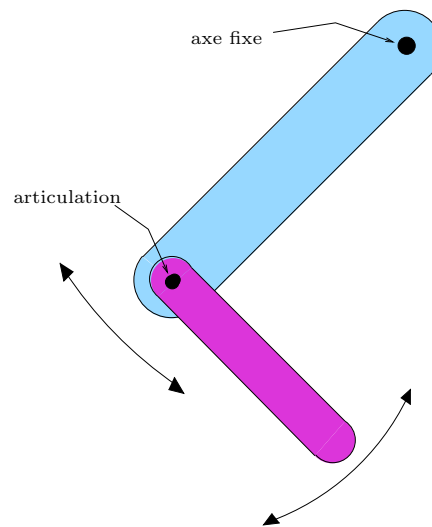
Comportement des orbites en présence d'une intersection homocline.

Après la mort de Poincaré en 1912, la découverte des intersections homoclines va tomber dans un oubli quasi-général. En fait, durant la première moitié du XXème siècle, seuls quelques mathématiciens poursuivront la voie ouverte par Poincaré, et étudieront géométriquement les propriétés qualitatives des solutions des systèmes déterministes ; le plus célèbre est l'américain Georges D. Birkhoff.

Poincaré avait montré “qu’une intersection homocline ne vient jamais seule” : l’existence d’une seule intersection entre les courbes C_T^s et C_T^u associées à une trajectoire périodique instable T implique l’existence d’un “réseau à mailles infiniment serrées” d’intersections. Birkhoff va plus loin, et montre qu’un système qui présente une intersection homocline possède une infinité de trajectoires périodiques de périodes arbitrairement grandes ([2]). De plus, Birkhoff ne s’intéresse pas qu’aux trajectoires périodiques ; il montre aussi, par exemple, l’existence de trajectoires qui suivent de très près une trajectoire périodique pendant un temps très long, puis s’en éloigne petit à petit, se rapprochent ensuite d’une autre trajectoire périodique et suivent de très cette deuxième trajectoire périodique pendant un temps très long, puis s’éloignent petit à petit de cette deuxième trajectoire périodique, pour se rapprocher d’une troisième trajectoire périodique, etc.

Pour résumer en quelques mots les travaux de Birkhoff sur les intersections homoclines, on peut dire que ceux-ci donnent un sens précis à la phrase “la présence d’intersections homoclines force l’existence de toutes sortes de trajectoires extrêmement compliquées”.

On peut illustrer de manière amusante les découvertes de Birkhoff en considérant des systèmes physiques très simples. Considérons tout d’abord un pendule simple : une barre qui peut se balancer dans un plan vertical, autour d’un axe situé à l’une de ses extrémités. En l’absence de frottements, le comportement d’un tel système est parmi les plus simples qu’on puisse imaginer : quelles que soient sa position et sa vitesse initiale, la barre a un mouvement périodique (si sa vitesse initiale est faible, elle se balance ; si sa vitesse est plus grande, elle effectue des tours complets autour de l’axe). Considérons maintenant un pendule double : à l’extrémité libre de notre première barre, on attache une seconde barre (en général plus légère que la première) à l’aide d’une articulation (figure ci-contre). Intuitivement, on s’attend à ce que les mouvements d’un tel système ne soient guère compliqués : on imagine une superposition de deux mouvements périodiques (semblable au mouvement de la Lune qui, en première approximation, tourne autour de la Terre qui tourne elle-même autour du Soleil).



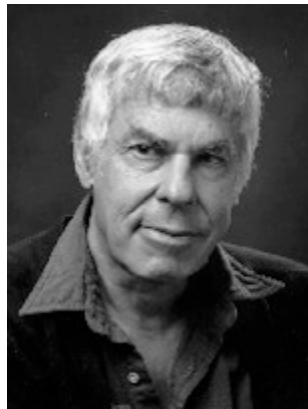
Quelle surprise quand on lance le pendule double : les barres articulées décrivent un mouvement complètement désordonné ; le pendule secondaire se met à tourner dans un sens, puis dans l’autre, les changements de sens de rotation semblant parfaitement aléatoires ! De plus, si on lance deux fois le pendule double avec des positions et des vitesses initiales très légèrement différentes, les mouvements décrits dans les deux cas n’ont rien à voir entre eux. En fait, si on trace, à l’aide d’un ordinateur, les surfaces asymptotiques de certaines trajectoires périodiques du pendule double, on voit apparaître des intersections homoclines (pourvu que certaines conditions sur les rapport des masses et des longueurs des barres soient satisfaites). Si ces intersections homoclines existent réellement (*i.e.* si elles ne sont pas des artefacts des approximations numériques) alors, en utilisant les techniques développées par Birkhoff, on obtiendra le résultat amusant suivant :

quelle que soit la suite d’entiers a_1, a_2, a_3, \dots , il existe une façon de lancer le pendule double telle que la seconde barre effectuera au moins a_1 tours dans le sens des aiguilles d’une montre, puis fera demi-tour, effectuera au moins a_2 tours dans le sens inverse des aiguilles

*d'une montre, puis fera demi-tour, effectuera au moins a_3 tours dans le sens des aiguilles d'une montre, etc.*²⁹

Le fer à cheval de Smale

Les intersections homoclines réapparaîtront sur le devant de la scène mathématique au tout début des années 60. L'artisan de cette redécouverte sera le mathématicien américain Stephen Smale (photo ci-dessous)³⁰.



À cette époque, Smale espérait généraliser les récents travaux de Mauricio Peixoto portant sur les systèmes dont l'espace des configurations est de dimension 2 ([13, 14]) ; il avait conjecturé qu'un système régi par des équations différentielles peut toujours être perturbé en un système dont les trajectoires ont un comportement très simple (en particulier, ne possédant qu'un nombre fini de trajectoires périodiques, voir [22]). Bien sûr, les travaux de Poincaré et de Birkhoff montrent que cette conjecture est grossièrement fausse... mais il semble que Smale ne connaissait rien de ces travaux... et au bout d'un certain temps, il a construit lui-même un contre-exemple à sa conjecture³¹.

Le contre-exemple de Smale ([23, 24]) est remarquablement simple. Il s'agit d'une application³² f du plan \mathbb{R}^2 , dont l'action sur un certain carré C consiste à étirer C et à le plier en forme de fer à cheval, de manière à ce que $f(C)$ traverse C verticalement une première fois de bas en haut, puis une seconde fois de haut en bas, comme représenté sur la figure ci-dessous, à gauche. On demande de plus qu'en restriction au carré C , l'application f contracte les segments horizontaux, et dilate les segments verticaux³³.

Grâce à un procédé classique, on peut construire un système gouverné par des équations différentielles, tel que l'application de retour des trajectoires de ce système sur une certaine section soit exactement l'application f construite par Smale.

Il est facile de montrer que l'application f implique qu'il existe un point p , situé en bas à gauche du carré C , tel que $f(p) = p$. L'immense intérêt de l'exemple de Smale est qu'on peut facilement représenter les courbes asymptotiques C^s et C^u associées à ce point p . En effet, l'image du carré C par f est obtenue par une procédure géométrique très simple : on étire verticalement, et on plie en forme de fer à cheval. Pour obtenir les images successives $f(C), f^2(C), f^3(C), \dots$ du carré C par les itérés de f , il suffit d'appliquer cette procédure plusieurs fois de suite : on étire, on plie, on étire, on plie, etc. (voir figure ci-dessus). Lorsque n croît, l'ensemble $f^n(C)$ est un rectangle de plus en plus fin, de plus en plus long,

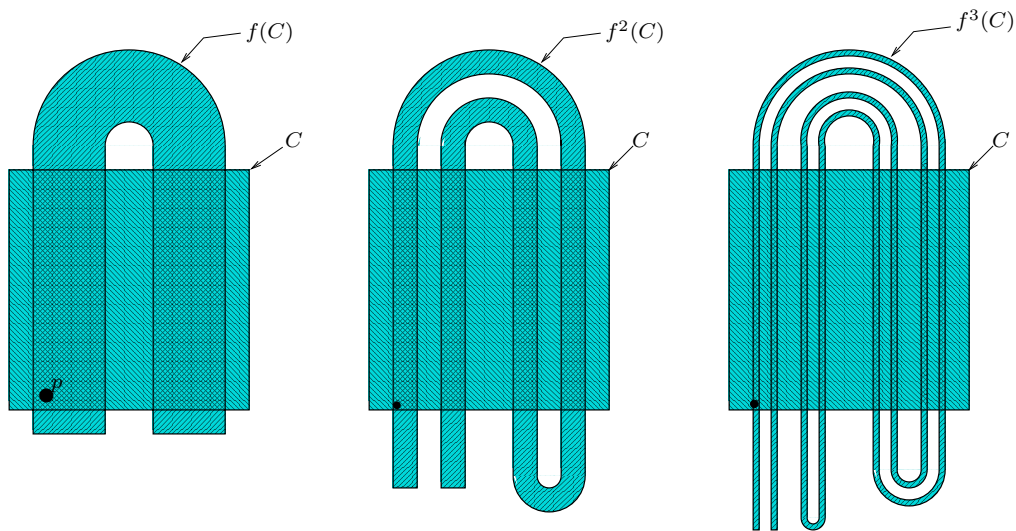
²⁹Cet énoncé m'a été inspiré par la lecture d'un très joli article ([8]) où John Hubbard prouve un résultat similaire pour un système physique légèrement différent : le pendule forcé.

³⁰Ça n'était pas la première fois que Smale explorait un monde dont la porte avait été entrouverte par Poincaré : quelques années auparavant, il avait reçu la médaille Fields pour sa preuve de la conjecture de Poincaré pour $n \geq 5$: toute variété compacte de dimension $n \geq 5$ homotopiquement équivalente à la sphère S^n est homéomorphe à S^n .

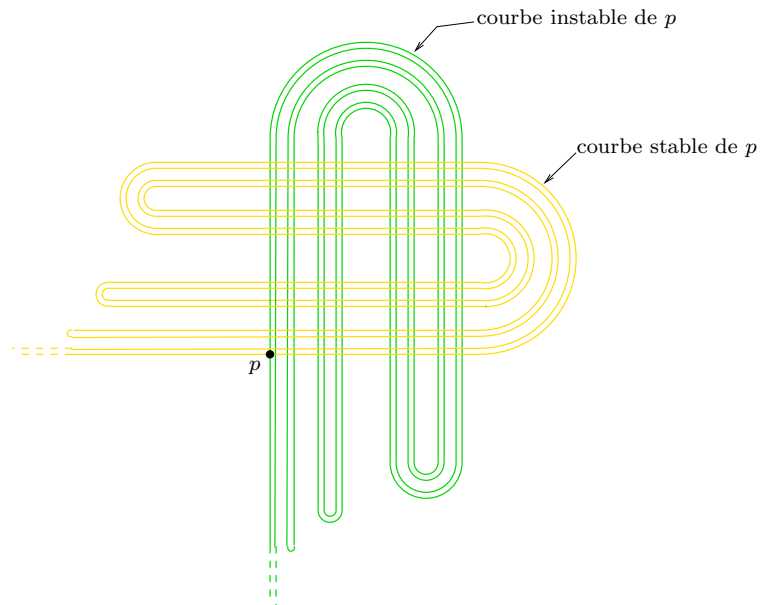
³¹Pour la petite histoire, Smale raconte avoir eu l'idée de ce contre-exemple, non pas en restant terré dans un bureau pendant de longue journée, mais en réfléchissant au comportement des systèmes déterministes sur la plage de Copacabana, à Rio (lire [23]).

³²Plus précisément, en termes techniques : un difféomorphisme de classe C^∞ .

³³Plus précisément, si p est un point du carré C tel que $f(p)$ est encore dans C , alors l'image par f du segment horizontal centré en p de longueur d est un segment horizontal centré en $f(p)$ de longueur inférieure à $d/2$, et l'image par f du segment vertical centré en p de longueur d est un segment vertical centré en $f(p)$ de longueur supérieure à $2d$.



et de plus en plus replié sur lui-même (il traverse le carré C de part en part exactement 2^n fois). Et il n'est pas difficile de montrer que, lorsque n tend vers l'infini, l'ensemble $f^n(C)$ tend vers (l'adhérence de) la courbe asymptotique C^u du point p . De même, la courbe asymptotique C^s du point p s'obtient comme la limite de la suite des images successives du carré C par les itérées négatives de f . Ainsi, il est facile de dessiner des arcs finis (mais aussi longs que l'on veut) des courbes asymptotiques C^s et C^u du point p . Comme on le voit sur la figure ci-dessous, ces deux courbes s'intersectent : le point p possède une intersection homocline.



Il n'est pas d'ailleurs pas difficile de voir que la *classe homocline* du point p , c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des points d'intersection des courbes asymptotiques de p , est égal à l'ensemble des points du carré C dont l'orbite ne sort jamais du carré C .

Avec cet exemple, Smale réalise un pas immense vers la compréhension des intersections homoclines. Souvenons-nous en effet que Poincaré avouait ne pas pouvoir se représenter les courbes asymptotiques d'un point qui possède une intersection homocline. Il savait seule-

ment, grâce à l'utilisation d'un résultat extrêmement abstrait (son théorème de récurrence), que ces deux courbes doivent se replier indéfiniment sur elles-mêmes et s'intersecter selon un *réseau à mailles infiniment serrées*. Avec l'application en fer à cheval f , on comprend enfin comment, en présence d'une intersection homocline, les courbes asymptotiques C^s et C^u se replient sur elle-mêmes, s'intersectent,...

Pour le plaisir, j'ai inclus à la fin de cet article deux figures (voir page 30) représentant des courbes asymptotiques d'une autre application célèbre : l'application de Hénon. Cette application est définie par une formule simplissime :

$$(x, y) \mapsto (x^2 - y, x).$$

Quel contraste entre la simplicité de cette formule et la complexité des courbes de la page 30 ! Quelle belle illustration de la découverte de Poincaré : même les systèmes les plus simples peuvent avoir un comportement extrêmement complexe !

La notion d'hyperbolicité

Une autre contribution fondamentale de Smale à la compréhension des intersections homoclines est l'introduction de la notion d'*hyperbolicité*.

Étant donné une application f d'une surface S , on dit qu'un sous-ensemble K de S est *hyperbolique* si, en restriction à K , l'application f préserve deux directions, contracte l'une de ces directions et dilate l'autre³⁴. Typiquement, si f est l'application en fer à cheval de Smale, l'ensemble K des points dont l'orbite ne sort jamais du carré C est un ensemble hyperbolique³⁵ (voir [25]).

Le comportement d'une application en restriction à une classe homocline hyperbolique peut être extrêmement complexe (comme le montre l'exemple de Smale). Néanmoins, Rufus Bowen a montré à la fin des années 60 (voir [5]) que le comportement de n'importe quelle application en restriction à une classe homocline hyperbolique peut être caractérisée par un objet très simple : un graphe fini (ou, de manière équivalente, une grille finie dont on a coché certaines cases)³⁶.

En un certain sens, la boucle est donc bouclée : Poincaré a découvert un phénomène géométrique très simple (l'existence d'intersections homoclines) qui implique un comportement incroyablement riche et complexe ; réciproquement, Bowen montre que, dans le cas où la classe homocline est hyperbolique, le comportement du système, bien qu'incroyablement complexe, peut être entièrement décrit à l'aide d'un objet très simple.

³⁴Plus précisément et plus généralement, en termes techniques : si f est un difféomorphisme d'une variété compacte S , un compact K globalement invariant par f est *hyperbolique* si on peut écrire le fibré tangent à S au dessus de K comme somme de deux sous-fibrés continus supplémentaires $T_K S = E^s \oplus E^u$, tel que la différentielle de f laisse invariant chacun de ces deux sous-fibrés, contracte uniformément la norme des vecteurs de E^s et dilate uniformément la norme des vecteurs de E^u .

³⁵Rappelons que cet ensemble K n'est autre que la classe homocline du point fixe p , c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des points d'intersection des courbes asymptotiques de p .

³⁶Plus précisément, en termes techniques : si G est un graphe fini, on note Σ_G l'ensemble des chemins bi-infinis dans le graphe G , c'est-à-dire l'ensemble des suites $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de sommets de G telles qu'il existe une arête dans G qui va du sommet a_i vers le sommet a_{i+1} pour tout i . On peut munir Σ_G d'une topologie métrique : la boule de rayon $\frac{1}{2^n}$ autour d'un chemin $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est l'ensemble des chemins $(b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tels que $b_i = a_i$ pour $-n \leq i \leq n$. On note alors σ_G le décalage sur Σ_G , c'est-à-dire l'homéomorphisme de Σ_G qui à un chemin $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ associe le même chemin décalé d'un cran vers la gauche : $\sigma_G((a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ où $b_i = a_{i+1}$ pour tout i . Bowen montre que, pour tout difféomorphisme f d'une variété compacte et toute classe homocline K de f , si K est hyperbolique, alors il existe un graphe fini G tel que la restriction de f à K est (topologiquement) conjuguée au décalage σ_G sur Σ_G . Pour une preuve de ce résultat, voir, par exemple, [6] ou [21].

Les systèmes non-hyperboliques

Hélas, il existe des systèmes qui présentent des intersections homoclines, mais dont les classes homoclines ne sont pas hyperboliques. De nombreux travaux récents fournissent des descriptions partielles du comportement de certains de ces systèmes (typiquement, ces travaux montrent que, pour certains systèmes, on arrive à calculer la proportion de temps que passe statistiquement une trajectoire dans une région donnée), mais on ne sait à peu près rien dire de vraiment général sur le comportement de ces systèmes³⁷...

6 En guise de conclusion

En guise de conclusion, je voudrais citer deux résultats récents qui montrent l'importance des découvertes faites par Poincaré il y a un peu plus d'un siècle, alors qu'il cherchait à corriger l'erreur dans son mémoire : un résultat de Jacques Laskar sur la stabilité du Système Solaire, et un résultat de Sylvain Crovisier qui établit un lien entre la complexité du comportement d'un système et l'existence d'intersections homoclines.

Stabilité ou instabilité du Système Solaire

Commençons par le résultat de Laskar. Souvenons-nous qu'en découvrant l'erreur dans son mémoire, Poincaré s'est aperçu qu'un système constitué d'un astre et au moins deux planètes qui gravitent autour de cet astre *a toutes les chances de posséder des intersections homoclines*. Pour certaines configurations initiales, le comportement d'un tel système sera alors *instable* : les trajectoires des planètes seront si complexes qu'elles sembleront n'obéir à aucune règle³⁸, et une minuscule perturbation du système (le passage d'une comète, par exemple) pourra changer radicalement l'allure des trajectoires des planètes.

Cependant, ceci ne prouve pas que le Système Solaire est instable. En effet, même pour un système qui possède des intersections homoclines, toutes les configurations initiales ne donnent pas lieu à des trajectoires compliquées ou sensibles aux perturbations. En 1954, Andreï N. Kolmogorov, Vladimir Arnol'd et Jürgen Möser ont d'ailleurs démontré un théorème qui affirme que, pour un système constitué de n planètes de masses assez petites qui gravitent autour d'un astre, il y a beaucoup de configurations initiales qui donnent lieu à des mouvements quasi-périodiques.

En simplifiant un peu, on peut résumer tout cela comme suit : Poincaré a montré qu'il y a un risque que le Système Solaire soit instable, et Kolmogorov, Arnol'd et Moser ont montré qu'il y a de bonnes chances pour qu'il soit stable.

En 1989, Laskar a pu calculer numériquement (en contrôlant les erreurs numériques) l'évolution des positions des différentes planètes du Système Solaire pendant 200 millions d'années. La conclusion de ses travaux est la suivante ([10]) :

Le mouvement des planètes intérieures du Système Solaire (Mercure, Vénus, la Terre, Mars) est sensible aux conditions initiales.

³⁷On sait que la dynamique d'un système qui présente une intersection homocline "est au moins aussi compliquée que celle du difféomorphisme en fer à cheval de Smale"... et c'est à peu près tout ce que l'on sait dire de parfaitement général !

³⁸Attention, il s'agit ici du comportement du système *à très long terme*. Ainsi, les trajectoires paraîtront presque périodiques lorsqu'on les observe seulement pendant quelques centaines de milliers d'années. Ce n'est qu'en les observant pendant très longtemps qu'on verra clairement que leur mouvement n'est nullement périodique.

Plus précisément, une incertitude sur la position d'une planète à un moment donné induit une incertitude 10 milliards de fois plus grande sur les positions des planètes 100 millions d'années plus tard. Ainsi, pour connaître la position d'une planète du Système Solaire dans 100 millions d'années avec une précision d'un million de kilomètres, il nous faudrait connaître les positions actuelles de toutes les planètes avec une précision de 10 centimètres (ce qui est bien sûr impossible). Il est alors tentant de calculer les trajectoires des planètes résultant de plusieurs configurations initiales presque identiques. C'est ce que Laskar a fait ([11]) ; il a alors observé les comportements suivants : Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune ne s'éloignent jamais beaucoup de leurs trajectoires actuelles ; la Terre, Mars et Vénus peuvent s'éloigner largement de leur trajectoires actuelles, mais restent suffisamment éloignées les unes des autres pour ne pas risquer d'entrer en collision ; par contre, Mercure peut s'éloigner tellement de sa trajectoire actuelle qu'elle risque d'entrer en collision avec Vénus (ou, lors d'un passage près de Vénus, de subir une accélération telle qu'elle se ferait éjecter au loin) ; enfin, la trajectoire de Pluton est encore plus instable !³⁹.

Je crois que ceci montre bien que les phénomènes mathématiques abstraits découverts par Poincaré il y a un peu plus d'un siècle (l'existence d'intersections entre deux courbes C_T^s et C_T^u qui n'ont aucune existence physique) ont des implications fort concrètes !

“Bien que l'idée d'un Système Solaire chaotique puisse surprendre, et même déranger notre conception du monde bâtie sur plusieurs siècles de stabilité, commente Laskar, c'est pourtant le contraire qui eût été extraordinaire, dans la mesure où depuis Poincaré nous savons que la plupart des systèmes dynamiques ne sont pas intégrables et sont donc soumis à ce type de comportement.”

Intersections homoclines versus comportement simple

Voici maintenant un résultat beaucoup plus abstrait, qui a été conjecturé par Jacob Palis il y a dizaine d'années, et dont la preuve complète vient d'être annoncée par Crovisier⁴⁰. Le voici :

Théorème (Crovisier). *Considérons un système gouverné par des équations différentielles, qui admet une section fermée. Alors :*

- soit le système a un comportement très simple (en particulier, il ne possède qu'un nombre fini de trajectoires périodiques, et chaque trajectoire non périodique est asymptote dans le passé et dans le futur à une trajectoire périodique),
- soit le système est proche d'un système qui possède des intersections homoclines⁴¹.

³⁹Voici une autre observation, aussi intéressante qu'étonnante, de Laskar, Joutel et Robutel ([12]) : si la Lune n'existait pas, alors l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan de l'écliptique pourrait passer de 60 à 0 degrés très rapidement (ce qui offrirait aux pingouins des vacances gratuites sous les tropiques... à condition que cela n'empêche pas l'existence de toute forme de vie sur Terre) !

⁴⁰Le résultat avait auparavant été démontré en dimension 2 par Enrique Pujals et Martin Sambarino, et en dimension 3 par Christian Bonatti, Shaobo Gan et Lan Wen

⁴¹Voici un énoncé plus précis en termes techniques :

Soit f un C^1 -difféomorphisme d'une variété compacte. Alors :

- soit f ne possède qu'un nombre fini de trajectoires périodiques, et chaque trajectoire non périodique est asymptote dans le passé et dans le futur à une trajectoire périodique,
- soit il existe une suite de difféomorphismes qui approchent f en topologie C^1 et possèdent des intersections homoclines.

Il y a plus d'un siècle, Poincaré a découvert les intersections homoclines, et montré des énoncés du type "la présence d'une intersection homocline force le système considéré a avoir un comportement très complexe". Le résultat de Crovisier ci-dessus constitue un sorte de réciproque à ces énoncés, puisqu'il affirme que "si un système a un comportement complexe, c'est qu'il y a des intersections homoclines dans les parages". C'est une preuve supplémentaire, s'il en était besoin, de l'importance de la découverte de Poincaré...

References

- [1] J. Barrow-Green. *Poincaré and the three-body problem*. Amer. Math. Soc., 1997.
- [2] G. D. Birkhoff. Dynamical systems with two degrees of freedom. *Trans. Am. Math. Soc.* **18** (1917), p. 199-300.
- [3] K. Bohlin. Über die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme. *Acta Mathematica* **10** (1887), p. 109-130.
- [4] U. Bottazzini. Henri Poincaré, philosophe et mathématicien. *Les génies de la Science* **4** (2000), Pour la Science.
- [5] R. Bowen. Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms. *American Journal of Mathematics* **92** (1970), p. 725–747.
- [6] R. Bowen. On axiom A diffeomorphisms. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics* **35**, Amer. Math. Soc. 1978.
- [7] S. Crovisier. Exposé oral, International Congress on Dynamical Systems, Angra dos Reis, août 2005.
- [8] J. H. Hubbard, The Forced Damped Pendulum: Chaos, Complication and Control. *American Mathematical Monthly*, **8** (1999), p 741–758
- [9] J. Laskar. La stabilité du Système Solaire. *Chaos et déterminisme*, sous la direction de A. Dahan-Dalmenico, J.-L. Chabert et K. Chemla, Seuil, 1992.
- [10] J. Laskar. A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System. *Nature* **338** (1989), p. 237–238.
- [11] J. Laskar. The chaotic motion of the Solar System. A numerical estimate of the size of chaotic zones. *Icarus* **88** (1990), p. 266–291.
- [12] J. Laskar, F. Joutel et P. Robutel. Stabilization of the Earth’s obliquity by the Moon. *Nature* **361** (1993), p. 615–617.
- [13] M. M. Peixoto. Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology* **1** (1962), p. 101-120.
- [14] M. M. Peixoto. On classification of flows on 2-manifolds. *Proc. Symp. Dynam. Sys.*, Salvador (1973) p 389–419.
- [15] H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par des équations différentielles. *Œuvres d’Henri Poincaré, Tome 1. Équations différentielles.* : fac-similé éditions Jacques Gabay, 2004.
- [16] H. Poincaré. *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.* (version non corrigée). Non publié. Les différences entre cette version et la version publiée sont décrites dans [1].
- [17] H. Poincaré. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, Mémoire couronné du Prix de S. M. le roi Oscar II de Suède. *Acta Math.*, **13** (1890), p. 1–270. *Œuvres d’Henri Poincaré, Tome 7. Masses fluides en rotation. Principes de Mécanique analytique. Problème des trois corps.* : fac-similé éditions Jacques Gabay, 2005.
- [18] H. Poincaré. Correspondance. Disponible sur le site web des *Archives H. Poincaré*, à l’Université de Nancy : <http://www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/hpcochron.html>.
- [19] H. Poincaré. *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Tome 3.* Rééditions Librairie A. Blanchard, 1987.

- [20] H; Poincaré. *La Science et l'Hypothèse*. Flammarion, 1902.
- [21] M. Shub. Stabilité globale des systèmes dynamiques. *Astérisque* **56** (1978).
- [22] S. Smale. On dynamical systems. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* (1960), p. 195–198.
- [23] S. Smale. *Chaos: Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio*. Disponible à <http://math.berkeley.edu/~smale/biblio/biblio.html>.
- [24] S. Smale. A structurally stable differentiable homeomorphism with an infinite number of periodic points. *Report on the Symposium on Non Linear Oscillations*, Kiev Mathematics Institute (1963), p. 365–366.
- [25] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), p. 747–817.

