IUT de Villetaneuse - Département informatique **Année 2015-2016**
Apprentissage 2eme année

Probabilités - TD N^o 3
Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. On lance deux dés.
1) Donner un univers Ω décrivant cette expérience aléatoire.
2) On note X la variable aléatoire égale à la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres obtenus.
a) Quel est l'ensemble $\mathcal{E}_X$ des valeurs possibles de X ?
b) Ecrire comme sous-ensembles de Ω les évènements $\{X = 1\}$ et $\{X \in \{1, 4\}\}$.
c) Déterminer la loi de probabilité de X puis son espérance $E(X)$.

Exercice 2. Une urne contient 4 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire simultanément 3 boules de cette urne.
1) Donner un univers décrivant cette expérience.
2) On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues obtenues sur les trois tirées.
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance de X.

Exercice 3. On jette trois dés et on observe les nombres obtenus.
1) Donner un univers Ω décrivant cette expérience aléatoire.
2) On considère le jeu suivant. Si le 6 apparait k fois, avec $k \in \{1, 2, 3\}$, alors le joueur reçoit k euros ; si le 6 n'apparait pas, alors le joueur perd 1 euro. On note X la variable aléatoire égale au gain (éventuellement négatif) du joueur.
a) Écrire les évènements $\{X = -1\}$ et $\{X = 3\}$ comme sous-ensembles de Ω.
b) Déterminer la loi de probabilité de X ainsi que son espérance.

Exercice 4. On lance simultanément trois dés, un vert, un bleu et un rouge. On met de côté ceux ayant donné 6 et on relance les autres, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les dés aient été retirés. On note V, B, R les variables aléatoires comptant respectivement le nombre de fois où le dé vert,bleu,rouge a été lancé et X le nombre de lancers nécessaires à l'arrêt du jeu.
1) Quelle est la loi de probabilité de, repectivement, V, B, R ?
2) a) Exprimer X en fonction de V, B, R.
b) En déduire $P(X \leq k)$ puis $P(X = k)$ pour tout entier $k \geq 1$.

Exercice 5. Alain et Bernard jouent au jeu suivant. Ils commencent par lancer chacun un dé. S'ils obtiennent le même résultat, le jeu est terminé ; sinon ils recommencent tant qu'ils n'obtiennent pas le même résultat.
1) Donner un univers Ω décrivant cette expérience. On tiendra compte du fait que ce jeu peut ne pas s'arrêter.
2) On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tours nécessaires pour que le jeu s'arrête, en convenant de poser $X = \infty$ si le jeu ne se termine pas.
a) Donner un élément w de l'évènement $\{X = 2\}$ puis un élément w' de l'évènement $\{X = 3\}$.
b) Déterminer la loi de probabilité de X puis son espérance.

Exercice 6. Un examen scolaire se présente sous la forme d'un questionnaire à choix multiple (QCM) de dix questions. Pour chacune d'elles, l'élève doit choisir une réponse parmi trois proposées, une seule de ces propositions étant correcte. On considère un élève qui répond totalement au hasard à chacune des dix questions. On note X le nombre de bonnes réponses obtenues.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Quelle est la probabilité que cet élève obtienne au moins huit bonnes réponses ?

IUT de Villetaneuse

3) Le professeur attribue une note N (pouvant être négative) en donnant un point pour chaque bonne réponse et en enlevant un point pour chaque mauvaise réponse. Montrer que $N = 2X - 10$ et en déduire l'espérance de N.

Exercice 7. Un individu achète trois tickets d'un jeu de hasard, chacun de ces tickets étant ou bien « perdant » ou bien « gagnant ». On sait que 10% des tickets mis en jeu sont des tickets gagnants. On note X la variable aléatoire égale au nombre des tickets gagnants achetés par cet individu.
1) a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer la probabilité q que cet individu achète au moins un ticket gagnant.
2) Un ticket coûte 2 Euros et un ticket gagnant rapporte 5 Euros. On note Y le gain (éventuellement négatif!) de cette personne suite à l'achat des trois tickets. Exprimer Y en fonction de X puis en déduire l'espérance et la variance de Y.
3) Cet individu décide de renouveler son achat de trois tickets chaque semaine. On suppose cependant que si, une certaine semaine, il n'obtient aucun ticket gagnant alors il se découragera et cessera aussitôt de jouer à ce jeu. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de semaines durant lesquelles ce joueur achetera des tickets.
a) Déterminer la loi de probabilité de Z.
b) Calculer la probabilité que cet individu joue au moins deux semaines.
c) On rappelle que, pour tout réel x vérifiant $-1 < x < 1$, on a

$$\sum_{i \geq 0} x^i = \frac{1}{1-x}.$$

Utiliser cette formule pour montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$P(Z \geq k) = q^{k-1}.$$

Exercice 8. Dans une population animale, une proportion $p \in]0,1[$ des individus sont atteints d'une maladie pouvant se détecter par un test sanguin. On doit examiner cent de ces animaux pour savoir s'ils sont malades. On suppose que leurs états de santé sont indépendants les uns des autres. Plutôt que de faire cent tests, on utilise le protocole suivant : on forme dix groupes de dix animaux et on mélange les échantillons de sang prélevés sur les individus d'un même groupe ; si le test est négatif sur un mélange alors on peut en déduire qu'aucun animal du groupe correspondant n'est malade ; dans le cas contraire, on teste individuellement chaque animal du groupe.
1) On note M_i la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades dans le i^{eme} groupe. Déterminer la loi de probabilité de M_i et calculer $P(M_i \geq 1)$.
2) On définit une variable aléatoire X_i par $X_i = 0$ si le test collectif sur le i^{eme} groupe est négatif et $X_i = 1$ dans le cas contraire. Quelle est la loi de probabilité de X_i ?
3) On note T la variable aléatoire égale au nombre <u>total</u> de tests effectués. Exprimer T en fonction des X_i puis en déduire son espérance et sa variance. Pour quelles valeurs de p peut-on s'attendre à une économie d'au moins 30 tests par rapport à la méthode consistant à tester chacun des cent animaux ?

Exercice 9. Un ordinateur A envoie des données à un autre ordinateur B par blocs de 1024 bits (0 ou 1) consécutifs, organisés de la façon suivante :
- les 1023 premiers bits contiennent l'information à transmettre ;
- le dernier est un « bit de parité », ce qui signifie qu'il est choisi de façon qu'il y ait un nombre pair de 1 dans le bloc de 1024 bits. Il a pour rôle de permettre à B de détecter certaines erreurs survenues pendant la transmission, comme on le verra plus loin.

Pour chacun des 1024 bits d'un bloc, on estime que la probabilité qu'il soit altéré pendant la transmission (c'est à dire qu'il passe de 0 à 1 ou inversement) vaut 10^{-4} ; de plus les erreurs sur les différents bits sont supposées indépendantes les unes des autres. On note X la variable aléatoire

Interne Militaire

égale au nombre d'erreurs survenues pendant la transmission d'un bloc.
1) Expliquer pourquoi on peut considérer que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre λ.
2) L'ordinateur B est programmé pour rejeter un bloc qu'il reçoit si celui-ci contient un nombre impair de 1 et pour l'accepter s'il contient un nombre pair de 1. Est-on certain qu'un bloc accepté n'a subi aucune erreur de transmission ?
3) On admet dans cette question que $P(X \text{ est pair}) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda}\right)$ (cette égalité sera démontrée au 4)).

a) Montrer que

$$P(X = 0/X \text{ est pair}) = \frac{2e^{-\lambda}}{1 + e^{-2\lambda}}$$

.

b) Interprétez la probabilité conditionnelle du a) dans le contexte du 2) et comparer la à $P(X = 0)$. Quelle est votre conclusion ?
4) a) Pour $i \in \mathbb{N}$, simplifiez l'expression $\lambda^i + (-\lambda)^i$ en distinguant le cas où i est pair et le cas où i est impair.

b) En utilisant a) et le fait que $e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} = \sum_{j \geq 0} \frac{\lambda^{2j}}{(2j)!}.$$

c) En déduire que $P(X \text{ est pair}) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda}\right)$.

Exercice 10. Une compagnie d'assurance assure 500 navires de pêche valant chacun deux millions d'euros. Le risque assuré est la perte totale du navire, qui est un évènement de probabilité 0,001 sur une année. Les naufrages éventuels des différents navires sont considérés comme des évènements indépendants. On note X le nombre de navires perdus en une année civile parmi les 500 assurés.
1) Déterminer la loi exacte de X puis une loi approchée.
2) Évaluer $P(X = 5)$.
3) La compagnie rembourse le 31 décembre la valeur des bateaux perdus au cours de l'année. A combien doivent s'élever ses réserves financieres pour qu'elle puisse effectuer la totalité des remboursements avec une probabilité supérieure à 0,999 ?

Iut de Villeneuse