Probabilités conditionnelles et indépendance

On se donne pour tout ce chapitre une loi probabilité P sur un univers Ω fini ou dénombrable.

1 Un exemple

2 Probabilité conditionnelle

Définition 2.1 *Etant donnés deux évènements A et B avec $P(B) > 0$, on appelle* ***probabilité conditionnelle de A sachant B*** *le nombre $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. On le note $P(A/B)$ ou $P_B(A)$.*

Remarque 2.2 *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & P(A/B) \end{array}$$

est une loi de probabilité sur Ω.

3 Indépendance

3.1 Indépendance de deux évènements

Définition 3.1 *Deux évènements A et B sont* ***indépendants*** *si l'on a*

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

Propriété 3.2 *Soient A, B deux évènements.*

1. *Lorsque $P(B) > 0$ on a: A et B sont indépendants si et seulement si $P(A/B) = P(A)$.*
2. *(A et B indépendants) $\Longleftrightarrow$ (A et $\overline{B}$ indépendants) $\Longleftrightarrow$ ($\overline{A}$ et B indépendants) $\Longleftrightarrow$ ($\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants).*

3.2 Indépendance de n évènements ($n \geq 2$)

Définition 3.3 *Des évènements $E_1, \dots E_n$ sont dits* ***indépendants*** *si pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$ et pour toute sous-famille $E_{i_1}, \dots, E_{i_k}$ de $E_1, \dots, E_n$ on a :*

$$P(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}) \;=\; P(E_{i_1}) \dots P(E_{i_k}).$$

3.3 Indépendance d'une infinité d'évènements

Définition 3.4 *Des évènements $E_1, E_2, \dots$, en nombre infini, sont dits* ***indépendants*** *si les évènements de toute sous-famille finie $E_1, \dots, E_n$ ($n \geq 2$) sont indépendants.*

Iut de Villetaneuse

4 Formule des probabilités totales

Théorème 4.1 *Soit $B_1, B_2, \ldots$ une suite (finie ou non) d'évènements vérifiant les propriétés suivantes:*

P1 $\forall i \in \{1, 2, \ldots\}\ P(B_i) > 0$,

P2 *Les B_i sont deux à deux disjoints (i.e. $B_i \cap B_j = \emptyset$ pour $i \neq j$),*

P3 $\bigcup_i B_i = \Omega$.

Alors on a pour tout évènement A:

$$P(A) = \sum_i P(A/B_i)\, P(B_i).$$

5 Formule de Bayes

Théorème 5.1 *Soit $B_1, B_2, \ldots$ une suite d'évènements comme dans le théorème précédant. Alors, pour tout B_j dans cette suite et pour tout évènement A tel que $P(A) > 0$, on a:*

$$P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j)\, P(B_j)}{\sum_i P(A/B_i)\, P(B_i)}.$$

Iut de Villetaneuse