IUT Villetaneuse
Université Sorbonne Paris Nord

BUT Informatique - Semestre 3
Probabilités (R3.08)

Année 2024-2025

Iut de Villetaneuse

# Table des matières


**1 Lois de probabilité** **4**
1.1 Univers d'une expérience aléatoire . . . 5
1.2 Évènements . . . 5
1.2.1 Cas d'un univers $\mathbf{\Omega}$ discret . . . 5
1.2.2 Cas d'un univers $\mathbf{\Omega}$ continu . . . 6
1.2.3 Opérations sur les évènements . . . 6
1.3 Lois de probabilité . . . 7
1.3.1 Premières conséquences des axiomes . . . 7
1.3.2 Fonction de répartition . . . 8
1.4 Lois de probabilité définies par une densité . . . 8
1.4.1 Lien entre densité et fonction de répartition . . . 9
1.5 Quelques lois de probabilité classiques . . . 10
1.5.1 Lois de probabilité discrètes . . . 10
1.5.2 Lois de probabilité continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ . . . 12
1.6 Espérance et variance d'une loi de probabilité sur $\Omega \subset \mathbb{R}$ . . . 12
1.6.1 Espérance . . . 12
1.6.2 Interprétations de l'espérance . . . 13
1.6.3 Variance et écart-type . . . 14
1.6.4 Espérances et variances des lois classiques . . . 15
1.7 Exercices . . . 15

**2 Probabilités conditionnelles et indépendance** **20**
2.1 Probabilité conditionnelle . . . 21
2.2 Indépendance . . . 21
2.2.1 Indépendance de deux évènements . . . 21
2.2.2 Indépendance de $n$ évènements ($n \geq 2$) . . . 21
2.2.3 Indépendance d'une infinité dénombrable d'évènements . . . 22
2.3 Formule des probabilités totales . . . 22
2.4 Formule de Bayes . . . 22
2.5 Exercices . . . 22

**3 Variables aléatoires réelles** **26**
3.1 Généralités . . . 27
3.2 V.a.r. discrètes et v.a.r continues . . . 28
3.3 Loi de probabilité d'une v.a.r. . . . 28
3.4 Vocabulaire et notations . . . 28
3.5 V.a.r. indépendantes . . . 28




lut de Mutaneuse

3.6 Propriétés de l'espérance des variables v.a.r. . . . . 29
3.7 Propriétés de la variance des v.a.r. . . . . 29
3.8 Exercices . . . . . 29

Contact : M. Bonino : bonino@sorbonne-paris-nord.fr



Iut de Villetaneuse

# Chapitre 1

# Lois de probabilité

## Sommaire


**1.1 Univers d'une expérience aléatoire** . . . . . **5**
**1.2 Évènements** . . . . . **5**
1.2.1 Cas d'un univers $\mathbf{\Omega}$ discret . . . . . 5
1.2.2 Cas d'un univers $\mathbf{\Omega}$ continu . . . . . 6
1.2.3 Opérations sur les évènements . . . . . 6
**1.3 Lois de probabilité** . . . . . **7**
1.3.1 Premières conséquences des axiomes . . . . . 7
1.3.2 Fonction de répartition . . . . . 8
**1.4 Lois de probabilité définies par une densité** . . . . . **8**
1.4.1 Lien entre densité et fonction de répartition . . . . . 9
**1.5 Quelques lois de probabilité classiques** . . . . . **10**
1.5.1 Lois de probabilité discrètes . . . . . 10
1.5.2 Lois de probabilité continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ . . . . . 12
**1.6 Espérance et variance d'une loi de probabilité sur $\Omega \subset \mathbb{R}$** . . . . . **12**
1.6.1 Espérance . . . . . 12
1.6.2 Interprétations de l'espérance . . . . . 13
1.6.3 Variance et écart-type . . . . . 14
1.6.4 Espérances et variances des lois classiques . . . . . 15
**1.7 Exercices** . . . . . **15**




lut de Mulhouse

## 1.1 Univers d'une expérience aléatoire

On considère en probabilités des expériences dont l'issue ne peut pas être connue à l'avance, mais pour lesquelles on connait cependant tous les résultats possibles. Cet ensemble de tous les résultats possibles doit être décrit de façon mathématique et on parle d'**univers** ou d'**ensemble fondamental** de l'expérience. Il est souvent noté $\Omega$.

**Exemple 1.1** *L'expérience consiste à observer le résultat du lancer d'une pièce :* $\Omega = \{P, F\}$.

**Exemple 1.2** *L'expérience consiste à observer le résultat du lancer d'un dé vert et d'un dé rouge :* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.

**Exemple 1.3** *Trois individus, numérotés de 1 à 3, font une course ; l'expérience consiste en les classer suivant leur ordre d'arrivée ;* $\Omega$ *est l'ensemble des permutations de* $\{1, 2, 3\}$*, c'est à dire*

$$\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}.$$

**Exemple 1.4** *On décide de lancer une pièce et de recommencer jusqu'à obtenir « pile ». L'expérience consiste à compter le nombre de lancers nécessaires pour cela. On peut prendre* $\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$*, où* $\infty$ *est un symbole correspondant à la situation où l'on n'obtient jamais « pile ».*

**Exemple 1.5** *L'expérience consiste à mesurer la durée de vie d'un composant électronique. On peut prendre* $\Omega = \mathbb{R}^+$.

**Exemple 1.6** *L'expérience consiste à observer le point d'impact d'une fléchette lancée sur une cible murale. On peut prendre* $\Omega = \mathbb{R}^2$.

## 1.2 Évènements

### 1.2.1 Cas d'un univers $\Omega$ discret

On dit que $\Omega$ est **discret** lorsque c'est un ensemble fini ou bien dénombrable, ce dernier mot signifiant que $\Omega$ est infini mais que l'on peut cependant numéroter tous ses éléments (plus précisément, un ensemble $\Omega$ est dénombrable s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\Omega$). C'est le cas des Exemples 1.1 à 1.4.

**Définition 1.1**

*Soit* $\Omega$ *un univers discret. On appelle* ***évènement*** *tout sous-ensemble de* $\Omega$*. Lorsqu'un évènement ne contient qu'un seul élément (c'est à dire lorsque c'est un singleton) on parle d'un* ***évènement élémentaire****. L'ensemble vide* $\emptyset$ *est souvent appelé* ***l'évènement impossible****, l'univers* $\Omega$ ***l'évènement certain****.*

Il est essentiel de savoir traduire un évènement donné en langage courant en un évènement au sens mathématique de la définition précédente, et inversement.

**Exemple 1.7** *En reprenant l'Exemple 1.2, décrire la situation « le dé vert donne un résultat pair » comme un évènement* $E \subset \Omega$.

**Exemple 1.8** *En reprenant l'Exemple 1.3, décrire la situation « l'individu 3 est arrivé avant l'individu 1 » comme un évènement* $E \subset \Omega$.

**Exemple 1.9** *Dans le cadre de l'Exemple 1.4, donner l'évènement* $E \subset \Omega$ *correspondant à la situation où l'on obtient le premier « pile » après un nombre pair de lancers.*



lut de Villetaneuse

### 1.2.2 Cas d'un univers $\Omega$ continu

Par opposition au cas discret, on dit que $\Omega$ est un univers **continu** lorsqu'il est infini et non dénombrable ; cela signifie qu'il y a trop d'éléments dans $\Omega$ pour que l'on puisse tous les numéroter (Exemples 1.5 et 1.6). Dans ce cadre :

- On se limitera par la suite au cas où $\Omega$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ;
- Par analogie avec le cas discret, on peut vouloir appeler « évènement » tout sous-ensemble de $\Omega$ ; il faut en fait réserver ce mot à certains sous-ensembles de $\Omega$ (dits mesurables) que nous ne chercherons pas à définir précisément dans ce cours. *Cependant, tous les ensembles $E \subset \Omega$ que l'on rencontre en pratique constituent des évènements. En particulier tout autre intervalle $I \subset \Omega$ est un évènement.*

**Exemple 1.10** *En reprenant l'Exemple 1.5, donner l'évènement $E \subset \Omega$ correspondant à la situation où le composant électronique fonctionne au moins 100 unités de temps.*

### 1.2.3 Opérations sur les évènements

Aussi bien dans le cas d'un univers discret que d'un univers continu, les évènements sont des sous-ensembles de $\Omega$ auxquels on peut appliquer naturellement trois opérations :

- la réunion $E \cup F$ de deux évènements $E, F$ est un évènement ;
- l'intersection $E \cap F$ de deux évènements $E, F$ est un évènement ;
- le complémentaire $\overline{E} = \Omega \setminus E$ d'un évènement $E$ est un évènement.

Lorsque $E \cap F = \emptyset$ on dit que $E$ et $F$ sont **incompatibles** ou **disjoints**.

| écriture ensembliste | interprétation |
|---|---|
| $E \cup F$ | $E$ ou $F$ est réalisé |
| $E \cap F$ | $E$ et $F$ sont réalisés |
| $\overline{E}$ ou $\Omega \setminus E$ ou $E^c$ | $E$ n'est pas réalisé |

Les opérations de réunion et d'intersection se généralisent à un nombre fini d'évènements et même à une infinité dénombrable d'évènements ; ainsi on pourra considérer les évènements $\bigcup_i E_i$ et $\bigcap_i E_i$ pour toute suite (finie ou non) d'évènements $E_1, E_2, \ldots$.



lut de Villetaneuse

## 1.3 Lois de probabilité

**Définition 1.2**

*Soient $\Omega$ un univers (discret ou continu) et $\mathcal{E}$ l'ensemble des évènements inclus dans $\Omega$. Une* ***loi de probabilité sur $\Omega$*** *est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois axiomes suivants :*
*Axiome 1 : pour tout évènement $E \in \mathcal{E}$ on a $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ ;*
*Axiome 2 : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ;*
*Axiome 3 : pour toute suite (finie ou infinie) d'évènements $E_1, E_2, \ldots$ deux à deux disjoints appartenant à $\mathcal{E}$ on a*

$$\mathbb{P}(\bigcup_i E_i) = \sum_i \mathbb{P}(E_i).$$

*Selon que $\Omega$ est discret ou continu, on dit que $\mathbb{P}$ est une* ***loi discrète*** *ou une* ***loi continue****.*
*Le triplet $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ est appelé un* ***espace probabilisé****.*

Intuitivement, le nombre $\mathbb{P}(E)$ mesure la vraisemblance que le résultat de l'expérience aléatoire se trouve dans $E$. Les axiomes 1 à 3 (appelés axiomes de Kolmogorov) permettent de développer toute la théorie des probabilités.

**Remarque 1.1** *Lorsque la suite $E_1, E_2, \ldots$ est infinie, la somme $\sum_i \mathbb{P}(E_i)$ est une somme avec une infinité de termes, autrement dit une série.*

**Remarque 1.2** *Une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers $\Omega$ discret est totalement déterminée dès que l'on connait la probabilité de chaque évènement élémentaire. En effet on peut alors calculer la probabilité de tout évènement $E \subset \Omega$ grâce à la formule suivante, qui est une conséquence du troisième axiome :*

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{w \in E} \mathbb{P}(\{w\}).$$

### 1.3.1 Premières conséquences des axiomes

**Théorème 1.1**

*On considère une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega$ et deux évènements $E, F$ inclus dans $\Omega$. On a*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$.
3. *Si $E \subset F$ alors $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$.*
4. $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$.



Iut Toulouse

### 1.3.2 Fonction de répartition

**Définition 1.3**

*Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité (discrete ou continue) sur un univers $\Omega \subset \mathbb{R}$. On appelle* ***fonction de répartition*** *de $\mathbb{P}$ la fonction*

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(]-\infty, x] \cap \Omega) \end{array}.$$

*En particulier si $\Omega = \mathbb{R}$ alors on a $F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x])$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

**Théorème 1.2**

*Une loi de probabilité sur $\Omega \subset \mathbb{R}$ est totalement déterminée par sa fonction de répartition. Autrement dit, si deux lois de probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sur $\Omega$ ont la même fonction de répartition alors ces deux lois sont égales, c'est à dire $\mathbb{P}(E) = \mathbb{Q}(E)$ pour tout évènement $E \subset \Omega$.*

**Propriété 1.1**

*Soit $F$ la fonction de répartition d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}$. Alors*

1. *$F$ est croissante ;*
2. $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$$
3. *$F$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.*

## 1.4 Lois de probabilité définies par une densité

Dans ce paragraphe 1.4, l'ensemble $\Omega$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un seul point. Il s'agit donc d'un univers continu.

**Définition 1.4**

*On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une* ***densité de probabilité*** *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0$ ;*
2. *$f$ est continue, sauf éventuellement en un nombre fini de points ;*
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Le résultat suivant dit que l'on détermine sans ambiguïté une loi de probabilité en se donnant une densité de probabilité.

**Théorème 1.3**

*Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité vérifiant $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$ alors il existe une unique loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega$ telle que, pour tout intervalle $I \subset \Omega$ d'extrémités $a$ et $b$ avec $a \leq b$ (éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) on ait*

$$\mathbb{P}(I) = \int_a^b f(x)dx.$$

*On dit alors que $f$ est une densité (de probabilité) de la loi $\mathbb{P}$.*

**Remarque 1.3** *Certaines lois de probabilité sur $\Omega$ n'admettent pas de densité. Nous ne rencontrerons pas cette situation dans ce cours.*

**Remarque 1.4** *Si une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega$ admet une densité $f$ alors, pour tout point $a \in \Omega$, on a $\mathbb{P}(\{a\}) = 0$. En effet, on a*

$$\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}([a, a]) = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

*On dit que la loi de probabilité $\mathbb{P}$ ne charge pas les points. En conséquence, des intervalles fermés, ouverts ou semi-ouverts avec les mêmes bornes ont la même probabilité.*

### 1.4.1 Lien entre densité et fonction de répartition

**Proposition 1.1**

*Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur $\Omega$ admettant une densité $f$. Alors sa fonction de répartition $F$ vérifie :*

1. *pour tout intervalle $[a, b] \subset \Omega$, $\mathbb{P}([a, b]) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*
2. *Si $f$ est continue en un point $a \in \mathbb{R}$ alors $F$ est dérivable en $a$ et $F'(a) = f(a)$.*

L'énoncé suivant explique que l'on peut, dans de nombreux cas, obtenir une densité d'une loi de probabilité sur $\Omega$ en dérivant sa fonction de répartition.

**Proposition 1.2**

*Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur $\Omega$. On suppose de plus que*

- *sa fonction de répartition $F$ est continue ;*
- *$F$ est dérivable et de dérivée $F'$ continue, sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

*Alors la loi $\mathbb{P}$ admet pour densité la fonction $f$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{si } F \text{ est dérivable en } x; \\ \text{une valeur positive arbitraire sinon.} \end{cases}$$



lut Volétaire

## 1.5 Quelques lois de probabilité classiques

### 1.5.1 Lois de probabilité discrètes

**Loi discrète uniforme**

**Définition 1.5**

*La loi de probabilité discrète uniforme sur un ensemble $\Omega$ non vide et fini est donnée par*

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\textit{nombre d'éléments dans } E}{\textit{nombre d'éléments dans } \Omega}$$

*pour tout évènement $E \subset \Omega$.*

Désignons par $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre déléments dans $\Omega$. La formule précédente donne en particulier $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$ pour tout $\omega \in \Omega$ et on dit alors qu'il y a **équiprobabilité des évènements élémentaires**. D'après la Remarque 1.2, ceci caractérise totalement la loi de probabilité uniforme sur $\Omega$.

Utilisation concrète : modélise le tirage « au hasard » d'un élément d'un ensemble fini $\Omega$, sans qu'aucun élément de $\Omega$ ne soit privilégié par rapport à d'autres (Exemples 1.1 et 1.2).

**Loi de Bernoulli**

**Définition 1.6**

*La loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ est la loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega = \{0,1\}$ caractérisée par*

$$\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{P}(\{1\}) = p.$$

Utilisation concrète : modélise l'observation du résultat d'une expérience aléatoire avec seulement deux issues, l'« échec » (0) et le « succès » (1) ayant respectivement pour probabilité $1-p$ et $p$.

**Loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$**

**Définition 1.7**

*La loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, notée $\mathcal{B}(n,p)$, est la loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega = \{0, 1, \cdots, n\}$ caractérisée par*

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\} \quad \mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Utilisation concrète : la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ se rencontre quand on compte le nombre de succès obtenus lors de $n$ répétitions indépendantes d'une même expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles, le succès (avec probabilité $p$) ou bien l'échec (avec probabilité $1-p$). La notion

d'indépendance peut être ici considérée intuitivement ; elle signifie que la connaissance des résultats de certaines de ces $n$ expériences n'apporte aucune information sur les résultats des autres. Ceci sera précisé au chapitre suivant.

**Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$**

**Définition 1.8**

*La loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1]$, notée $\mathcal{G}(p)$, est la loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}^*$ caractérisée par*

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(\{k\}) = (1-p)^{k-1}\, p.$$

Utilisation concrète : la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ se rencontre lorsque l'on considère des répétitions indépendantes d'une même expérience aléatoire qui n'a que deux issues, le succès (avec probabilité $p$) ou bien l'échec (avec probabilité $1-p$) et que l'on compte le nombre de répétitions nécessaires pour obtenir un premier succès.

**Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$**

**Définition 1.9**

*La loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, est la loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}$ caractérisée par*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(\{k\}) = e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Utilisation concrète : modélise le nombre de réalisations (dans un temps ou un lieu donné) de divers phénomènes aléatoires. Comme le montre la proposition suivante, la loi de Poisson est la limite de lois binomiales.

**Proposition 1.3 (*Approximation d'une binomiale par une Poisson*)**

*Pour $n$ assez grand et $p$ assez petit, on peut considérer que la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ est une bonne approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.*

En effet, pour un réel $\lambda > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on vérifie que

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} (\frac{\lambda}{n})^k\, (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} = e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Or le nombre $\binom{n}{k} (\frac{\lambda}{n})^k\, (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$ est la probabilité d'obtenir $k$ sous la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ et le nombre $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ est la probabilité d'obtenir $k$ sous la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. La limite ci-dessus montre donc que, pour $n$ assez grand, la loi $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ est bien approchée par la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. En notant $p = \frac{\lambda}{n}$ on obtient l'approximation donnée dans la Proposition 1.3.
En pratique, on considère par exemple que cette approximation est convenable dès que $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$.



IUT de Toulouse

### 1.5.2 Lois de probabilité continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$

**Loi de probabilité uniforme $\mathcal{U}([a,b])$ sur un intervalle $[a,b]$ (où $a < b$)**

**Définition 1.10**

*La loi de probabilité uniforme $\mathcal{U}([a,b])$ est la loi de probabilité sur l'intervalle $[a,b]$ admettant pour densité la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{si } x < a \ \text{ ou } \ x > b. \end{cases}$$

Utilisation concrète : modélise le tirage « au hasard » d'un nombre réel entre $a$ et $b$, sans qu'aucune partie de l'intervalle $[a,b]$ ne soit privilégiée par rapport à d'autres.

**Loi normale (ou loi de Gauss) $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$**

**Définition 1.11**

*La loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, est la loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ admettant pour densité la fonction $f$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}.$$

Utilisation concrète : modélise de nombreuses expériences aléatoires où l'on observe une valeur numérique qui résulte de la conjonction inextricable de multiples causes (par exemple la taille d'un individu pris dans une population donnée, une erreur de mesure,...). Elle joue aussi un rôle important en statistiques car, sous certaines conditions, elle décrit la loi de la moyenne d'un caractère numérique observé sur un échantillon.

**Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$**

**Définition 1.12**

*La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$ est la loi de probabilité sur $\mathbb{R}^+$ admettant pour densité la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Utilisation concrète : modélise notamment le temps d'attente pour la réalisation d'un phénomène sans mémoire.

## 1.6 Espérance et variance d'une loi de probabilité sur $\Omega \subset \mathbb{R}$

### 1.6.1 Espérance



lut de l'analyse

**Définition 1.13**

1. *Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un ensemble $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ fini ou dénombrable. On définit son* ***espérance (ou moyenne)*** *$\mathbb{E}(\mathbb{P})$ par*

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \sum_i x_i \, \mathbb{P}(\{x_i\})$$

*à la condition que la somme $\sum_i |x_i| \, \mathbb{P}(\{x_i\})$ converge. Si cette dernière condition n'est pas satisfaite, on dit que $\mathbb{P}$ n'admet pas d'espérance.*

2. *Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un intervalle $\Omega \subset \mathbb{R}$ admettant une densité $f$. On définit son* ***espérance (ou moyenne)*** *$\mathbb{E}(\mathbb{P})$ par*

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

*à la condition que cette intégrale converge. Si cette dernière condition n'est pas satisfaite, on dit que $P$ n'admet pas d'espérance.*

**Remarque 1.5** *Si $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots\}$ est un ensemble fini, la somme $\sum_i |x_i| \, \mathbb{P}(\{x_i\})$ comporte seulement un nombre fini de termes et l'espérance $\mathbb{E}(\mathbb{P})$ existe donc toujours dans ce cas. Si $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots\}$ est dénombrable, on peut démontrer que la convergence de la série $\sum_i |x_i| \, \mathbb{P}(\{x_i\})$ implique celle de $\sum_i x_i \, \mathbb{P}(\{x_i\})$ et aussi que la valeur de $\sum_i x_i \, \mathbb{P}(\{x_i\})$ ne dépend pas de la façon dont on a numéroté les éléments de $\Omega$.*

### 1.6.2 Interprétations de l'espérance

#### Interprétation comme « centre de gravité »

Supposons pour simplifier que $\mathbb{P}$ est une loi de probabilité sur un univers fini $\Omega = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}$. En posant $p_i = \mathbb{P}(\{x_i\})$ on a $\mathbb{E}(\mathbb{P}) = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$ ce qui (comme $p_1 + \cdots + p_n = 1$) est aussi la définition du centre de gravité du système constitué des $n$ points $x_1, \cdots, x_n$ où chaque $x_i$ est muni du « poids » $p_i$. Ceci s'étend au cas où $\Omega$ est un univers infini, dénombrable ou non.

#### Interprétation statistique

L'espérance $\mathbb{E}(\mathbb{P})$ est aussi, approximativement, la moyenne des résultats obtenus si l'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire modélisée par un univers $\Omega \subset \mathbb{R}$ et la loi de probabilité $\mathbb{P}$. Ceci résulte d'un théorème important en probabilités, appelé loi des grands nombres. En simplifiant un peu, on peut l'énoncer de la façon suivante.

**Théorème 1.4 (*loi des grands nombres (énoncé simplifié)*)**

*Quand on tire au hasard $n$ nombres $x_1, \cdots, x_n$ en suivant une loi de probabilité $\mathbb{P}$ alors, si les tirages sont indépendants et si $n$ est assez grand, on a $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \simeq \mathbb{E}(\mathbb{P})$.*

### 1.6.3 Variance et écart-type

**Définition 1.14**

1. *Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un ensemble $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ fini ou dénombrable. On suppose que $P$ admet une espérance $\mathbb{E}(\mathbb{P})$. On définit alors sa* **variance** *$Var(\mathbb{P})$ par*
$$Var(\mathbb{P}) = \sum_i \big(x_i - \mathbb{E}(\mathbb{P})\big)^2 \mathbb{P}(\{x_i\})$$
*à la condition que cette somme converge. Si elle ne converge pas, on dit que $\mathbb{P}$ n'admet pas de variance.*
2. *Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un intervalle $\Omega \subset \mathbb{R}$ avec une densité $f$. On suppose que $\mathbb{P}$ admet une espérance $\mathbb{E}(\mathbb{P})$. On définit alors sa* **variance** *$Var(\mathbb{P})$ par*
$$Var(\mathbb{P}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - \mathbb{E}(\mathbb{P})\big)^2 f(x)dx$$
*à la condition que cette intégrale converge. Si elle ne converge pas, on dit que $\mathbb{P}$ n'admet pas de variance.*

**Définition 1.15**

*L'écart-type $\sigma_{\mathbb{P}}$ d'une loi de de probabilité $\mathbb{P}$ est la racine carrée de sa variance, lorsque celle-ci existe : $\sigma_{\mathbb{P}} = \sqrt{Var(\mathbb{P})}$.*

**Remarque 1.6** *Si les élements de $\Omega$ sont exprimés dans une certaine unité (mètres, grammes, minutes, ...) alors l'espérance et l'écart-type s'expriment dans la même unité.*

**Interprétation.** La variance est un indicateur de dispersion autour de l'espérance : une grande valeur de $Var(\mathbb{P})$ indique une tendance à « tomber loin de $\mathbb{E}(\mathbb{P})$ » lorsque l'on tire un nombre au hasard en suivant la loi $\mathbb{P}$. Il est en de même pour l'écart-type.

On utilise souvent la formule suivante pour calculer la variance.

**Proposition 1.4 (*Formule de Koenig-Huygens*)**

1. *Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un ensemble $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ fini ou dénombrable. Alors $\mathbb{P}$ admet une variance si et seulement si la somme $\sum_i x_i^2 \mathbb{P}(\{x_i\})$ converge, et dans ce cas on a*
$$Var(\mathbb{P}) = \sum_i x_i^2 \mathbb{P}(\{x_i\}) \; - \; \big(\mathbb{E}(\mathbb{P})\big)^2.$$
2. *Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un intervalle $\Omega \subset \mathbb{R}$ avec une densité $f$. Alors $\mathbb{P}$ admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge, et dans ce cas on a*
$$Var(\mathbb{P}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \; - \; \big(\mathbb{E}(\mathbb{P})\big)^2.$$

### 1.6.4 Espérances et variances des lois classiques

| Loi de probabilité $\mathbb{P}$ | Espérance | Variance |
|---|---|---|
| Loi de Bernoulli de paramètre $p$ | $\mathbb{E}(\mathbb{P}) = p$ | $Var(\mathbb{P}) = p(1-p)$ |
| Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ | $\mathbb{E}(\mathbb{P}) = np$ | $Var(\mathbb{P}) = np(1-p)$ |
| Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ | $\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \frac{1}{p}$ | $Var(\mathbb{P}) = \frac{1-p}{p^2}$ |
| Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ | $\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \lambda$ | $Var(\mathbb{P}) = \lambda$ |
| Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$ | $\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \frac{a+b}{2}$ | $Var(\mathbb{P}) = \frac{(b-a)^2}{12}$ |
| Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ | $\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \mu$ | $Var(\mathbb{P}) = \sigma^2$ |
| Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ | $\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \frac{1}{\lambda}$ | $Var(\mathbb{P}) = \frac{1}{\lambda^2}$ |

## 1.7 Exercices

**Exercice 1.** 1) Dans un jeu de hasard, il y a une chance sur deux de perdre 1 euro et une chance sur deux de gagner 1 euro. Quel univers et quelle loi de probabilité décrivent les gains à ce jeu ? Calculer l'espérance et la variance de cette loi de probabilité.
2) Même question avec des gains et des pertes de 100 euros.

**Exercice 2.** Dans un jeu de hasard, on peut perdre un euro ou bien gagner un ou deux euros. On sait que la probabilité de gagner deux euros, notée $p$, est trois fois plus petite que celle de perdre un euro.
1) Quel univers et quelle loi de probabilité décrivent les gains à ce jeu ?
2) Calculer (en fonction de $p$) l'espérance et la variance de cette loi de probabilité.
3) Si un individu joue souvent à ce jeu, pour quelles valeurs de $p$ sera-t-il globalement bénéficiaire ?

**Exercice 3.** Un sac contient sept jetons : l'un d'eux porte la lettre $A$, un autre la lettre $B$, deux sont marqués $C$ et trois autres $D$. On pioche un jeton au hasard et on s'intéresse à la lettre qu'il porte.
1) Donner un univers et une loi de probabilité décrivant cette expérience aléatoire.
2) Calculer la probabilité d'obtenir l'une des deux lettres $A$ ou $C$.

**Exercice 4.** Un porte-monnaie contient dix pièces de monnaie : deux pièces de 1 centime, cinq pièces de 5 centimes et trois pièces de 10 centimes. On prend une pièce au hasard dans ce porte-monnaie et l'on s'intéresse à la valeur (en centimes) de celle-ci.
1) Donner un univers $\Omega$ et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega$ décrivant cette expérience aléatoire.
2) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(\mathbb{P})$.
3) Calculer la fonction de répartition de $\mathbb{P}$.

**Exercice 5.** Trouver un univers et une loi de probabilité modélisant chacune des deux expériences aléatoires suivantes.
1) On lance un dé et on observe le nombre obtenu.



lut de Montbéliard

2) On observe le nombre sur un jeton pioché au hasard dans une urne qui contient cinq jetons numérotés de 1 à 5 et deux autres portant le numéro 6.
3) Calculer l'espérance, la variance et la fonction de répartition des lois de probabilité obtenues dans les questions précédentes.

**Exercice 6.** Une famille comporte trois enfants dont on ignore le sexe. On s'intéresse, pour chacun d'eux, au fait d'être un garçon ou une fille. On admet d'autre part que la population est constituée d'autant de femmes que d'hommes.
1) Donner un univers $\Omega$ et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega$ modélisant cette situation.
2) On considère les évènements $A, B, C, D$ suivants :
$A$ : il y a au moins une fille parmi les enfants de cette famille ;
$B$ : il y a au moins deux filles parmi les enfants de cette famille ;
$C$ : il y a au moins un garçon parmi les enfants de cette famille.
$D$ : tous les enfants de cette famille sont du même sexe ;
a) Écrire en langage courant l'évènement $A \cap \overline{B}$.
b) Écrire l'évènement $D$ en utilisant seulement les lettres $A, B, C$ et les opérations ensemblistes $\cap$, $\cup$ et $\bar{\cdot}$.
c) Écrire $D$ et $A \cap \overline{B}$ en extension, c'est à dire en faisant la liste de leurs éléments.
d) Calculer $\mathbb{P}(D)$ et $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.
3) Retrouver les résultats obtenus au 2)d) en raisonnant à partir d'une loi binomiale convenable.

**Exercice 7.** On lance un dé vert et un dé rouge et on observe les résultats obtenus.
1) Donner un univers $\Omega$ et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ modélisant cette expérience aléatoire.
2) a) Donner les évènements $E \subset \Omega$ et $F \subset \Omega$ correspondant respectivement aux situations « le dé vert donne un résultat pair » et « le dé rouge donne un résultat pair ».
b) Exprimer l'évènement « les deux dés donnent des résultats de même parité » en utilisant les lettres $E, F$ et les symboles $\cap, \cup, \bar{\cdot}$.
c) Donner en langage courant l'évènement $E \cap \bar{F}$.
3) a) Écrire comme sous-ensemble de $\Omega$ l'évènement « la somme des résultats des deux dés vaut 7 » puis calculer sa probabilité.
b) Écrire comme sous-ensemble de $\Omega$ l'évènement du 2)b) puis calculer sa probabilité.
4) Écrire comme sous-ensemble de $\Omega$ l'évènement « le résultat du dé vert est strictement plus grand que celui du dé rouge » puis calculer sa probabilité.

**Exercice 8.** Donner un univers $\Omega$ et une loi de probabilité « classique » $\mathbb{P}$ modélisant chacune des expériences aléatoires suivantes, en précisant $\mathbb{E}(\mathbb{P})$ et $Var(\mathbb{P})$, puis répondre aux questions posées.
1) Pour une certaine élection, la participation a été de 67%. On choisit une personne au hasard dans le corps électoral et l'on s'intéresse au fait qu'elle ait voté ou non.
2) On lance dix pièces de monnaie et l'on compte le nombre d'entre elles qui montrent le coté « face ». Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux « faces » ?
3) On lance un dé jusqu'à obtenir 6 et l'on compte le nombre de lancers nécessaires pour cela. Quelle est la probabilité de lancer le dé exactement quatre fois ?
4) On lance six fois deux dés, un vert et un rouge, et l'on compte le nombre de fois où le dé vert donne un résultat strictement plus grand que le rouge. Quelle est la probabilité que, au moins une fois, le résultat du dé vert soit strictement supérieur à celui du rouge ?
5) On lance deux dés, un vert et un rouge, jusqu'à ce que le dé vert donne un résultat strictement plus grand que le rouge et l'on compte le nombre de lancers nécessaires pour cela. Quelle est la probabilité de procéder à au moins trois lancers ?



IUT de Montpellier

6) Une urne opaque contient quarante neuf boules vertes et une autre rouge, toutes indiscernables au toucher. On procède à cent tirages *avec remise* dans cette urne et l'on compte le nombre de fois où l'on obtient la boule rouge. Donner, en plus de la loi exacte $\mathbb{P}$, une loi approchée $\mathbb{P}'$. Comparer $\mathbb{P}(\{n\})$ et $\mathbb{P}'(\{n\})$ pour quelques valeurs de $n \in \Omega$. Quelle est la probabilité de tirer au moins une fois la boule rouge ?

**Exercice 9.** On considère trois évènements $E, F, G$ d'un univers $\Omega$. Ecrire sous forme ensembliste les évènements correspondant aux phrases suivantes :

a) parmi les évènements $E, F, G$, seul $E$ est réalisé.

b) $E$ et $G$ sont réalisés mais pas $F$.

c) Au moins deux des évènements $E, F, G$ sont réalisés.

d) Au plus l'un des trois évènements $E, F, G$ est réalisé.

e) Exactement deux des évènements $E, F, G$ sont réalisés.

**Exercice 10.** Un étudiant possède dix livres de mathématiques et cinq livres d'informatique, qu'il range sur une étagère en faisant seulement attention à ce que les ouvrages traitant d'un même sujet restent groupés. Quelle est la probabilité que les deux livres de mathématiques qu'il préfère se trouvent côte à côte ? Quelle est la probabilité que son livre de mathématiques favori et son livre d'informatique favori soient voisins ?

**Exercice 11.** L'instant (exprimé en heures) auquel un bus passe chaque jour à l'un de ses arrêts peut être considéré comme le résultat d'une expérience aléatoire sur l'univers $\Omega_1 = [8; 8,5]$ avec la loi de probabilité uniforme sur $\Omega_1$, qui sera notée $\mathbb{P}_1$.

1) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(\mathbb{P}_1)$.

2) Calculer la fonction de répartition de $\mathbb{P}_1$.

3) Calculer la probabilité que le bus passe entre 8 heures et 8 heures 10 minutes.

4) Cette semaine, du lundi au vendredi, une personne se présente à l'arrêt à huit heures exactement. On suppose que les instants de passage du bus sont indépendants d'un jour à l'autre. On s'intéresse dans cette question au nombre de fois où la personne devra attendre le bus plus de dix minutes cette semaine.

a) Quelle loi de probabilité $\mathbb{P}_2$ sur quel univers $\Omega_2$ décrit cette situation ?

b) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une journée où l'individu attende le bus plus de dix minutes.

**Exercice 12.** Trois joueurs A,B,C jettent, à tour de rôle et dans cet ordre, une pièce de monnaie ; le premier qui obtient « pile » gagne la partie. L'expérience consiste à compter le nombre de lancers nécessaires pour que ce jeu finisse.

1) Donner un univers $\Omega$ et une loi de probabilité modélisant cette expérience aléatoire, en tenant compte du fait que le jeu peut ne pas s'arrêter. Préciser l'espérance et la variance de cette loi de probabilité.

2) Écrire l'évènement « B gagne » comme sous-ensemble de $\Omega$ puis calculer sa probabilité.

**Exercice 13.** Une urne contient 3 boules vertes, 4 boules jaunes, 5 rouges.

**I** On tire au hasard 3 boules de cette urne.

a) Donner un univers et une loi de probabilité correspondant à cette expérience.

b) Écrire l'évènement « Toutes les boules obtenues sont de la même couleur »comme sous-ensemble de $\Omega$ puis calculer sa probabilité. Même question pour l'évènement « On obtient exactement deux boules rouges ».

**II** Reprendre les questions ci-dessus en supposant cette fois que l'on fait un tirage avec remise,



lut de Valenciennes

ce qui signifie que l'on sort les boules de l'urne l'une après l'autre et que chaque boule tirée est remise dans l'urne après avoir noté sa couleur et avant de sortir la suivante.

**Exercice 14.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1) a) Justifier que $f$ est la densité d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur l'intervalle $\Omega = [1; +\infty[$.
b) Calculer $\mathbb{P}([2; 5])$.
2) Cette loi $\mathbb{P}$ admet-elle une espérance ?

**Exercice 15.** Étant donné un nombre réel $a > 0$, on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} a(1 - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur de $a$ pour que $f$ soit une densité de probabilité.
2) On note $\mathbb{P}$ la loi de probabilité sur $[0; 1]$ ayant pour densité la fonction $f$.
a) Calculer $\mathbb{E}(\mathbb{P})$ et $Var(\mathbb{P})$.
b) Déterminer la fonction de répartition de $\mathbb{P}$.
c) Représenter sur un dessin la courbe de $f$ puis une aire sous cette courbe égale à $\mathbb{P}([\frac{1}{4}, \frac{3}{4}])$. Calculer cette dernière probabilité.

**Exercice 16.** Étant donné un nombre réel $a > 0$, on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2a(x - 1) & \text{si } 1 \leq x \leq 2; \\ a(4 - x) & \text{si } 2 \leq x \leq 4; \\ 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } x > 4. \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur de $a$ pour que $f$ soit une densité de probabilité.
2) On note $\mathbb{P}$ la loi de probabilité sur l'intervalle $\Omega = [1; 4]$ ayant pour densité la fonction $f$.
a) Calculer $\mathbb{E}(\mathbb{P})$ et $Var(\mathbb{P})$.
b) Calculer la fonction de répartition de $\mathbb{P}$.
c) Représenter sur un dessin la courbe de $f$ puis une aire sous cette courbe valant $\mathbb{P}([3; 4])$.
d) Calculer $\mathbb{P}([3; 4])$.

**Exercice 17.** On note $\mathbb{P}$ la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ (loi normale centrée réduite) et $F$ sa fonction de répartition.
1) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F(-x) = 1 - F(x)$.
2) Calculer $\mathbb{P}(]-\infty, \frac{1}{2}])$, $\mathbb{P}(]-2, +\infty[)$ et $\mathbb{P}([-1, \frac{3}{2}])$.
3) Pour quels réels $a, b, c$ a-t-on $\mathbb{P}(]-\infty, a]) = 0,9515$, $\mathbb{P}([b, +\infty[) = 0,6293$, $\mathbb{P}([-c, c]) = 0,762$ ?

**Exercice 18.** La durée de vie d'un atome d'un corps radioactif donné est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, qui sera notée $\mathbb{P}$ dans cet exercice. Étant donné un échantillon (contenant un grand nombre d'atomes) de ce corps, on admet que la proportion d'atomes se désintégrant entre les instants $t$ et $t+h$ (où $0 \leq t \leq t+h$) est égale à $\mathbb{P}([0, h])$. On appelle *période* (ou *demi-vie*) du corps radioactif considéré la durée au bout de laquelle la moitié des atomes se sont désintégrés.
1) La période du plutonium 239 est de 24100 ans. Déterminer le paramètre $\lambda$ correspondant, en



lut de Villetaneuse

prenant l'année comme unité de temps.

2) On considère un stock de 500 kg de plutonium 239.

a) Combien de kilogrammes en restera-t-il dans 1000 ans ?

b) Au bout de combien de temps les deux tiers de ce stock se seront-ils désintégrés ?

Iut de Villetaneuse

# Chapitre 2

# Probabilités conditionnelles et indépendance

## Sommaire


**2.1 Probabilité conditionnelle** . . . . . **21**
**2.2 Indépendance** . . . . . **21**
2.2.1 Indépendance de deux évènements . . . . . 21
2.2.2 Indépendance de $n$ évènements ($n \geq 2$) . . . . . 21
2.2.3 Indépendance d'une infinité dénombrable d'évènements . . . . . 22
**2.3 Formule des probabilités totales** . . . . . **22**
**2.4 Formule de Bayes** . . . . . **22**
**2.5 Exercices** . . . . . **22**




lut de Villetaneuse

On se donne pour tout ce chapitre une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers $\Omega$ (discret ou continu).

## 2.1 Probabilité conditionnelle

**Définition 2.1**

*Etant donnés deux évènements $E$ et $F$ avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on appelle* ***probabilité conditionnelle de E sachant F*** *le nombre $\frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)}$. On le note $\mathbb{P}(E/F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$.*

Le nombre $\mathbb{P}(E/F)$ s'interprète comme la probabilité attribuée à $E$ lorsque l'on dispose de l'information supplémentaire selon laquelle $F$ s'est réalisé.

**Remarque 2.1** *On vérifie que la donnée de $\mathbb{P}(E/F)$ pour tout évènement $E \subset \Omega$ définit une loi de probabilité sur $\Omega$ au sens de la Définition 1.2 du Chapitre 1.*

## 2.2 Indépendance

Intuitivement, des évènements sont indépendants si le fait de savoir que certains d'entre eux sont réalisés n'apporte pas d'information sur la réalisation des autres. Les définitions suivantes formalisent cette idée.

### 2.2.1 Indépendance de deux évènements

**Définition 2.2**

*Deux évènements $E$ et $F$ sont dits* ***indépendants*** *si $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)$.*

**Propriété 2.1**

*Soient $E, F$ deux évènements.*

1. *Lorsque $\mathbb{P}(F) > 0$ on a : $E$ et $F$ sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(E/F) = \mathbb{P}(E)$.*
2. *($E$ et $F$ indépendants) $\iff$ ($E$ et $\overline{F}$ indépendants) $\iff$ ($\overline{E}$ et $F$ indépendants) $\iff$ ($\overline{E}$ et $\overline{F}$ indépendants).*

### 2.2.2 Indépendance de $n$ évènements ($n \geq 2$)

**Définition 2.3**

*Des évènements $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sont dits* ***(mutuellement) indépendants*** *si pour tout entier $k \in \{2, \cdots, n\}$ et pour toute sous-famille $E_{i_1}, E_{i_2}, \cdots, E_{i_k}$ de $E_1, \ldots, E_n$ on a*

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = \mathbb{P}(E_{i_1}) \times \mathbb{P}(E_{i_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_{i_k}).$$



Institut Mutualiste

### 2.2.3 Indépendance d'une infinité dénombrable d'évènements

**Définition 2.4**

*Des évènements $E_1, E_2, \cdots$, en nombre infini, sont dits* ***(mutuellement) indépendants*** *si pour toute sous-famille finie $E_{i_1}, E_{i_2}, \cdots, E_{i_k}$ de $E_1, E_2, \cdots$ ($k$ entier $\geq 2$ quelconque) on a :*

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = \mathbb{P}(E_{i_1}) \times \mathbb{P}(E_{i_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_{i_k}).$$

## 2.3 Formule des probabilités totales

**Théorème 2.1**

*Soit $F_1, F_2, \ldots$ une suite (finie ou non) d'évènements vérifiant les propriétés suivantes :*

*P1* $\forall i \in \{1, 2, \ldots\}\ \mathbb{P}(F_i) > 0$ ;

*P2* *Les $F_i$ sont deux à deux disjoints ;*

*P3* $\bigcup_i F_i = \Omega$.

*Alors on a pour tout évènement $E \subset \Omega$ :*

$$\mathbb{P}(E) = \sum_i \mathbb{P}(E/F_i) \times \mathbb{P}(F_i).$$

## 2.4 Formule de Bayes

**Théorème 2.2**

*Soit $F_1, F_2, \ldots$ une suite d'évènements comme dans le théorème précédant. Alors, pour tout $F_j$ dans cette suite et pour tout évènement $E$ tel que $P(E) > 0$, on a :*

$$\mathbb{P}(F_j/E) = \frac{\mathbb{P}(E/F_j) \times \mathbb{P}(F_j)}{\sum_i \mathbb{P}(E/F_i) \times \mathbb{P}(F_i)}.$$

## 2.5 Exercices

**Exercice 1.** Le résultat du lancer d'un dé équilibré est modélisé par l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avec la loi discrète uniforme que l'on note $\mathbb{P}$.
1) Trouver deux évènements $A$ et $B$ dans $\Omega$, différents de $\emptyset$ et de $\Omega$, qui sont indépendants.
2) Trouver des évènements $A, B, C$ dans $\Omega$ qui vérifient $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$ mais qui ne sont pas indépendants.

**Exercice 2.** On observe les résultats du lancer d'un dé vert et d'un dé rouge.
1) Donner un univers $\Omega$ et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ modélisant cette expérience aléatoire.
2) On considère les trois évènements $A$, $B$, $C$ suivants :

$A$ : « le dé vert donne 3 » ;
$B$ : « le dé rouge donne 4 » ;
$C$ : « la somme des résultats des deux dés vaut 7 ».

a) Écrire $A, B$ et $C$ comme sous-ensembles de $\Omega$.
b) $A$, $B$, $C$ sont-ils deux à deux indépendants ?
c) $A, B, C$ sont-ils indépendants ?

**Exercice 3.** Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un ensemble $\Omega$. Vérifier que si deux évènements $E \subset \Omega$ et $F \subset \Omega$ sont à la fois incompatibles et indépendants alors $\mathbb{P}(E) = 0$ ou $\mathbb{P}(F) = 0$.

**Exercice 4.** On dispose d'un lot de dix dés parmi lesquels trois sont truqués ; lorsqu'on lance un dé truqué, la probabilité d'obtenir 6 vaut $\frac{1}{2}$. On choisit un dé au hasard dans ce lot et on le lance.
1) Calculer la probabilité d'obtenir 6 à l'aide la la formule des probabilités totales.
2) On constate que l'on a obtenu 6. Quelle est la probabilité que le dé choisi soit truqué ?

**Exercice 5.** Un individu a dans sa poche quatre pièces : trois sont des pièces normales, avec un côté « pile » et un côté « face », et une autre est une pièce truquée possédant deux côtés « pile ». Cet individu prend une pièce au hasard dans sa poche et la lance deux fois. On considère les deux évènements $G$ et $H$ suivants :
$G$ : on obtient « pile » au premier lancer ;
$H$ : on obtient « pile » au deuxième lancer.

1) a) Calculer la probabilité de $G$ à l'aide de la formule des probabilités totales.
b) On constate que $G$ s'est réalisé, c'est à dire que l'on a obtenu « pile » au premier lancer. Quelle est alors la probabilité que la pièce choisie soit truquée ?
2) a) On constate que $G$ et $H$ se sont réalisés. Quelle est alors la probabilité que la pièce choisie soit truquée ?
b) Les évènements $G$ et $H$ sont-ils indépendants ?
c) Calculer $\mathbb{P}(H/G)$.

**Exercice 6.** Un individu a devant lui trois urnes. Il sait seulement que toutes les urnes contiennent quatre boules et que, parmi ces urnes, une contient exactement une boule rouge, une autre exactement deux boules rouges et une autre exactement trois boules rouges. Il désigne au hasard l'une des urnes.
1) L'individu prend une boule dans l'urne choisie.
a) Calculer la probabilité qu'elle soit rouge à l'aide de la formule des probabilités totales.
b) On constate que la boule est rouge. Quelle est la probabilité que l'urne choisie soit celle contenant une seule boule rouge ?
2) Dans cette question, l'individu prend une boule dans l'urne choisie, observe sa couleur, la redépose dans la même urne et (après l'avoir secouée) en retire à nouveau une boule.
a) On constate qu'il obtient ainsi deux fois une boule rouge. Quelle est la probabilité que l'urne choisie soit celle avec une seule boule rouge ?
b) On considère les deux évènements suivants :
$A$ : la boule obtenue au premier tirage est rouge ;
$B$ : la boule obtenue au deuxième tirage est rouge.
$A$ et $B$ sont-ils indépendants ?

**Exercice 7.** Alice et Bernard aiment jouer aux fléchettes. Alice atteint la cible dans 80% de



lut de Villetaneuse

ses tentatives tandis que le taux de réussite de Bernard est de 40%. L'un d'eux vient de lancer cinq fléchettes dont trois seulement sont dans la cible. Diriez-vous qu'il s'agissait d'Alice ou de Bernard ?

**Exercice 8.** Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un ensemble $\Omega$. Combien d'égalités faut-il vérifier pour montrer que $n$ évènements $E_1, E_2, \cdots, E_n$ dans $\Omega$ sont indépendants ?

**Exercice 9.** Une urne contient 5 boules rouges, 4 boules jaunes et 3 boules bleues, indiscernables au toucher. On s'intéresse aux couleurs de 5 boules extraites de l'urne au hasard et sans remise.
1) Donner un univers $\Omega$ et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ décrivant cette expérience.
2) On considère les évènements $A$ et $B$ suivants :

$A$ : « On a obtenu au moins 2 boules bleues. »

$B$ : « On a obtenu exactement deux boules rouges et au moins une jaune. »

Calculer la probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$. Les évènements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?

**Exercice 10.** On considère une famille avec $n$ enfants ($n \geq 1$) et les évènements A et B suivants :

$A$ : « il y a dans cette famille au moins un garçon et au moins une fille » ;

$B$ : « il y a dans cette famille au plus un garçon ».

Calculer les probabilités de $A$ et de $B$. Ces évènements sont-ils indépendants ?

**Exercice 11.** Lorsque l'on se présente sans rendez-vous au cabinet du docteur Dupond, le temps passé dans la salle d'attente (exprimé en minutes) peut être considéré comme le résultat d'une expérience aléatoire ayant pour univers l'intervalle $\Omega = [0; 60]$ et pour loi de probabilité $\mathbb{P}$ la loi uniforme sur $\Omega$.
Pour un individu qui vient consulter dans ces conditions, on considère les évènements $A$ et $B$ suivants :

$A$ : « son attente dure au moins 45 minutes » ;

$B$ : « son attente dure entre 30 minutes et 50 minutes ».

Préciser les sous-ensembles de $\Omega$ correspondant à $A$ et $B$ puis calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A/B)$. Les évènements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?

**Exercice 12.** Dans cet exercice, on note $\mathbb{P}$ la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}\big(\{n, n+1, n+2, \cdots\}\big) = (1-p)^{n-1}$.
2) Déduire du 1) que $\mathbb{P}$ est une loi « sans mémoire » , c'est à dire que, pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\big(\{m+n+1, m+n+2, m+n+3, \cdots\}/\{m+1, m+2, m+3, \cdots\}\big) = \mathbb{P}\big(\{n+1, n+2, n+3, \cdots\}\big).$$

**Exercice 13.** Dans cet exercice on note $\mathbb{P}$ la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
1) Calculer $\mathbb{P}([t, +\infty[)$ pour $t \geq 0$.
2) Déduire du 1) que $\mathbb{P}$ est une loi « sans mémoire » , c'est à dire que

$$\forall s \in \mathbb{R}^+,\ \forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{P}\big([s+t, +\infty[/[s, +\infty[\big) = \mathbb{P}\big([t, +\infty[\big).$$

La loi exponentielle vous semble-t-elle adaptée pour modéliser sur le long terme la durée de vie d'un être vivant ?

**Exercice 14.** Dans un atelier, la fabrication d'une pièce est assurée par quatre machines



Iut de Toulouse

$M_1, \ldots, M_4$ qui produisent respectivement 15 %, 20 %, 30%, 35% des pièces fabriquées. Dans la production de chaque machine, il y a respectivement 5%, 4%, 3%, 2% de pièces défectueuses. On prend au hasard une pièce sortant de cet atelier.
1) Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
2) On constate en effet que la pièce choisie est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine $M_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ ?

**Exercice 15.** 1) Soient $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un ensemble $\Omega$ et $n$ évènements $E_1, E_2, \cdots, E_n$ $(n \geq 2)$ tels que $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1}) \neq 0$. Justifier que

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2/E_1) \times \mathbb{P}(E_3/E_1 \cap E_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_n/E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}).$$

2) Quatre joueurs se partagent au hasard les 52 cartes d'un jeu classique (4 couleurs et 13 valeurs de l'as au roi) en quatre mains de 13 cartes. Calculer la probabilité que chaque joueur reçoive un as. *Indication :* on pourra utiliser 1) avec les évènements $E_i$ « le i$^{\text{eme}}$ joueur a exactement un as dans sa main ».



lut de Villetaneuse

# Chapitre 3

# Variables aléatoires réelles

## Sommaire


**3.1 Généralités** . . . . . **27**
**3.2 V.a.r. discrètes et v.a.r continues** . . . . . **28**
**3.3 Loi de probabilité d'une v.a.r.** . . . . . **28**
**3.4 Vocabulaire et notations** . . . . . **28**
**3.5 V.a.r. indépendantes** . . . . . **28**
**3.6 Propriétés de l'espérance des variables v.a.r.** . . . . . **29**
**3.7 Propriétés de la variance des v.a.r.** . . . . . **29**
**3.8 Exercices** . . . . . **29**


lut de Villetaneuse

On se donne pour tout ce chapitre une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers $\Omega$ (discret ou continu).

## 3.1 Généralités

Il arrive fréquemment que l'on s'intéresse à une ou plusieurs fonctions des résultats d'une expérience aléatoire, et pas seulement aux résultats eux-mêmes. Cela conduit à la notion suivante.

**Définition 3.1**

*On appelle* ***variable aléatoire réelle (v.a.r.)*** *toute fonction* $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

En fait, cette définition n'est pas tout à fait correcte car il faudrait imposer (quand $\Omega$ est un univers continu) certaines restrictions à $X$. Nous ne nous préoccuperons pas de ces conditions, qui sont toujours satisfaites par les fonctions $X : \Omega \to \mathbb{R}$ rencontrées en pratique.

**Exemple 3.1** *On lance un dé vert et un dé rouge et on observe les deux nombres obtenus. On décrit cette expérience aléatoire avec l'univers* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ *et la loi de probabilité discrète uniforme* $\mathbb{P}$ *sur* $\Omega$*, en convenant par exemple que, pour* $(a, b) \in \Omega$*, le nombre* $a$ *correspond au résultat du dé vert et* $b$ *à celui du dé rouge.*

*- Supposons que l'on s'intéresse en particulier au résultat du dé vert. On fait alors intervenir la v.a.r.*

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & a \end{array}.$$

*- Si l'on s'occupe du résultat du dé rouge, on considère la v.a.r.*

$$Y : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & b \end{array}.$$

*- Si l'on s'intéresse au nombre obtenu en sommant les résultats des deux dés, on définit la v.a.r.*

$$Z : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & a + b \end{array}.$$

**Exemple 3.2** *On mesure la longueur du coté d'une pièce métallique carrée découpée par une machine. En supposant que cette mesure puisse être considérée comme une expérience aléatoire, quelle v.a.r. faut-il considérer si l'on s'intéresse à la surface de cet objet ?*

**Notation 3.1** *Étant donnée une v.a.r.* $X : \Omega \to \mathbb{R}$*, on peut considérer pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *l'ensemble des antécédents de* $x$ *par* $X$*, c'est à dire l'ensemble* $\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\}$*. En probabilités, ce sous-ensemble de* $\Omega$ *est noté* $\{X = x\}$*. Pour les fonctions* $X$ *que l'on manipule habituellement, il constitue un évènement et on peut donc lui attribuer une probabilité, qui sera notée* $\mathbb{P}(X = x)$ *au lieu de* $\mathbb{P}(\{X = x\})$*.*
*De façon générale, un évènement de la forme* $\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A\}$ *(où* $A \subset \mathbb{R}$*) est noté plus simplement* $\{X \in A\}$ *et on écrit* $\mathbb{P}(X \in A)$ *au lieu de* $\mathbb{P}(\{X \in A\})$*.*

**Exemple 3.3** *En considérant les v.a.r.* $X$ *et* $Z$ *de l'Exemple 1.1, écrire les évènements* $\{X = 3\}$*,* $\{Z = 7\}$ *et* $\{Z \in \{2, 3\}\}$ *comme sous-ensembles de* $\Omega$*.*



lut de Villetaneuse

## 3.2 V.a.r. discrètes et v.a.r continues

Pour une v.a.r. $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on désigne par $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de toutes les valeurs que peut prendre $X$ ; autrement dit $X(\Omega)$ est l'ensemble des nombres réels ayant au moins un antécédent par $X$.

**Définition 3.2**

1. *On dit qu'une v.a.r. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est* ***discrète*** *lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable ; on peut alors écrire $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots\}$ (numérotation qui se termine ou non).*
2. *On dit qu'une v.a.r. $X$ est* ***continue*** *quand $X(\Omega)$ est infini et non dénombrable.*

**Remarque 3.1** *Le mot « continue » dans la définition précédente n'a pas le sens qu'on lui donne habituellement en analyse.*

**Remarque 3.2** *Pour une v.a.r. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ continue, on se limitera dans ce cours à la situation où $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

## 3.3 Loi de probabilité d'une v.a.r.

**Définition 3.3**

*Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r (discrète ou continue).* ***La loi de probabilité de X****, notée $\mathbb{P}_X$, est la loi de probabilité sur l'ensemble $X(\Omega)$ définie par $\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(X \in E)$ pour tout évènement $E \subset X(\Omega)$.*

**Remarque 3.3** *Lorsque $X$ est discrète, la loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ est totalement déterminée dès que l'on connait la valeur de $\mathbb{P}_X(\{x\})$ pour tous les $x \in X(\Omega)$.*

**Remarque 3.4** *Dans les exercices de probabilités, on donne souvent directement la loi $\mathbb{P}_X$ de la v.a.r. $X$, sans que l'on ait à s'occuper de $\Omega$ ni de la loi $\mathbb{P}$.*

**Exemple 3.4** *Préciser $Z(\Omega)$ pour la v.a.r. $Z$ de l'Exemple 3.1 puis déterminer la loi de probabilité $\mathbb{P}_Z$.*

## 3.4 Vocabulaire et notations

Par la suite, tout le vocabulaire relatif à la loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ sera aussi utilisé pour $X$. Ainsi nous parlerons de la fonction de répartition de $X$ au lieu de la fonction de répartition de $\mathbb{P}_X$. De même pour la densité de probabilité, l'espérance et la variance (lorsqu'elles existent). On écrira donc $\mathbb{E}(X)$ au lieu de $\mathbb{E}(\mathbb{P}_X)$ et $Var(X)$ au lieu de $Var(\mathbb{P}_X)$.

## 3.5 V.a.r. indépendantes

**Définition 3.4**

*Des v.a.r. $X_1, X_2, \cdots$ toutes définies sur $\Omega$ sont dites* ***indépendantes*** *si les évènements $\{X_1 \in A_1\}$, $\{X_2 \in A_2\}, \cdots$ sont indépendants, quel que soit le choix des $A_i \subset \mathbb{R}$*



IUT de Montauban

## 3.6 Propriétés de l'espérance des variables v.a.r.

**Propriété 3.1**

*Soient $X, Y$ deux v.a.r. définies sur $\Omega$ admettant chacune une espérance et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors*

1. *La v.a.r. $X + Y$ admet pour espérance $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,*
2. *La v.a.r. $\alpha X$ admet pour espérance $\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha \mathbb{E}(X)$,*
3. *la v.a.r. $X + \alpha$ admet pour espérance $\mathbb{E}(X + \alpha) = \mathbb{E}(X) + \alpha$,*
4. *Si $X$ et $Y$ sont indépendantes et si $XY$ admet une espérance, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.*

## 3.7 Propriétés de la variance des v.a.r.

**Propriété 3.2**

*Soient $X$ une v.a.r. définie sur $\Omega$ admettant une variance et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors*

1. *La v.a.r. $\alpha X$ admet pour variance $Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$,*
2. *La v.a.r. $X + \alpha$ admet pour variance $Var(X + \alpha) = Var(X)$.*

**Propriété 3.3**

*Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des v.a.r. indépendantes admettant toutes une variance alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet pour variance*

$$Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n).$$

## 3.8 Exercices

**Exercice 1.** On observe le résultat du lancer de deux dés, l'un rouge et l'autre vert.
1) Donner un univers $\Omega$ et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ décrivant cette expérience aléatoire.
2) On considère par la suite les trois variables aléatoires $R, V, X$ suivantes :
$R$ est le résultat du dé rouge ;
$V$ est le résultat du dé vert ;
$X$ la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres obtenus.
a) Exprimer $X$ en fonction de $R$ et de $V$.
b) Quel est l'ensemble $X(\Omega)$, c'est à dire l'ensemble des valeurs que peut prendre $X$ ?
c) Écrire les évènements $\{X = 0\}$ et $\{X = 1\}$ comme sous-ensembles de $\Omega$.
d) Déterminer la loi de probabilité $\mathbb{P}_X$.
e) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$.
f) Les variables aléatoires $V$ et $X$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 2.** Une machine à sous de casino fonctionne selon le principe suivant : après que le joueur ait introduit une pièce de monnaie, trois roues se mettent à tourner indépendament les unes des autres puis chacune s'arrête au hasard en montrant un chiffre entre 0 et 9.
1) Donner un univers $\Omega$ et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega$ décrivant les résultats de la machine.
2) La machine ne donne pas d'argent si les trois chiffres affichés sont différents, elle distribue 4 euros s'il y a exactement deux chiffres identiques et $k$ euros si les trois chiffres sont identiques,



lut de villetaneuse

où $k$ est un entier $\geq 5$ choisi par le gérant du casino. On note $X$ la variable aléatoire réelle égale à la somme distribuée par la machine.

a) Écrire l'évènement $\{X = k\}$ comme sous-ensemble de $\Omega$.

b) Donner un exemple d'évènement élémentaire contenu dans l'évènement $\{X = 4\}$.

c) Déterminer la loi de probabilité de $X$.

d) Calculer l'espérance de $X$.

e) On suppose que la mise pour jouer avec cette machine est de 2 euros. Quelle est la valeur maximale de $k$ pour laquelle le casino peut s'attendre à faire des bénéfices avec ce jeu ?

**Exercice 3.** L'expérience consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant 4 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes.

1) Donner un univers et une loi de probabilité décrivant cette expérience.

2) On note $X$ la v.a.r. égale au nombre de boules bleues obtenues sur les trois tirées.

a) Donner la loi de probabilité de $X$.

b) Calculer l'espérance de $X$.

**Exercice 4.** Un individu achète trois tickets d'un jeu de hasard, chacun de ces tickets étant ou bien « perdant » ou bien « gagnant ». On sait que 10% des tickets mis en jeu sont des tickets gagnants. On note $X$ la v.a.r. égale au nombre des tickets gagnants achetés par cet individu.

1) a) Déterminer la loi de probabilité de $X$.

b) Calculer la probabilité $q$ que cet individu achète au moins un ticket gagnant.

2) Un ticket coûte 2 Euros et un ticket gagnant rapporte 5 Euros. On note $Y$ le gain (éventuellement négatif !) de cette personne suite à l'achat des trois tickets. Exprimer $Y$ en fonction de $X$ puis en déduire l'espérance et la variance de $Y$.

3) Cet individu décide de renouveler son achat de trois tickets chaque semaine. On suppose cependant que si, une certaine semaine, il n'obtient aucun ticket gagnant alors il se découragera et cessera aussitôt de jouer à ce jeu. On note $Z$ la v.a.r. égale au nombre de semaines durant lesquelles ce joueur achetera des tickets.

a) Déterminer la loi de probabilité de $Z$.

b) Calculer la probabilité que cet individu joue au moins deux semaines.

c) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}(Z \geq k) = q^{k-1}$.

**Exercice 5.** Dans une population animale, une proportion $p \in ]0, 1[$ des individus sont atteints d'une maladie pouvant se détecter par un test sanguin. On doit examiner cent de ces animaux pour savoir s'ils sont malades. On suppose que leurs états de santé sont indépendants les uns des autres. Plutôt que de faire cent tests, on utilise le protocole suivant : on forme dix groupes de dix animaux et on mélange les échantillons de sang prélevés sur les individus d'un même groupe ; si le test est négatif sur un mélange alors on peut en déduire qu'aucun animal du groupe correspondant n'est malade ; dans le cas contraire, on teste individuellement chaque animal du groupe.

1) On note $M_i$ la v.a.r. égale au nombre d'animaux malades dans le $i^{eme}$ groupe. Déterminer la loi de probabilité de $M_i$ et calculer $\mathbb{P}(M_i \geq 1)$.

2) On définit une v.a.r. $X_i$ par $X_i = 0$ si le test collectif sur le $i^{eme}$ groupe est négatif et $X_i = 1$ dans le cas contraire. Quelle est la loi de probabilité de $X_i$ ?

3) On note $T$ la v.a.r. égale au nombre <u>total</u> de tests effectués. Exprimer $T$ en fonction des $X_i$ puis en déduire son espérance et sa variance. Pour quelles valeurs de $p$ peut-on s'attendre à une économie d'au moins 30 tests par rapport à la méthode consistant à tester chacun des cent animaux ?



lut de Mirebeau

**Exercice 6.** On considère trois urnes opaques numérotées de 1 à 3. L'urne 1 contient une seule boule numérotée 1 ; l'urne 2 contient deux boules numérotées 1 et 2 ; enfin l'urne 3 contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un individu lance un dé et prend une boule dans l'une des urnes selon les règles suivantes :

- si le résultat du dé est 1 alors la boule est tirée au hasard dans l'urne 1 ;
- si le résultat du dé est 2 ou 3 alors la boule est tirée au hasard dans l'urne 2 ;
- si le résultat du dé est supérieur ou égal à 4 alors la boule est tirée au hasard dans l'urne 3.

On désigne par $N$ le numéro sur la boule choisie de cette façon. Ainsi $N$ est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. On ne cherchera pas à décrire l'univers $\Omega$ sur lequel est définie $N$ ni la loi de probabilité $\mathbb{P}$ convenable sur $\Omega$.

1) a) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $\mathbb{P}_N(\{1\})$, c'est à dire $\mathbb{P}(N = 1)$.
b) Calculer de même $\mathbb{P}_N(\{2\})$ et $\mathbb{P}_N(\{3\})$.

2) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(N)$ et la variance $Var(N)$.

3) On constate que la boule obtenue porte le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la première urne ?

**Exercice 7.** Une compagnie d'assurance assure 500 navires de pêche valant chacun deux millions d'euros. Le risque assuré est la perte totale du navire, qui est un évènement de probabilité 0,001 sur une année. Les naufrages éventuels des différents navires sont considérés comme des évènements indépendants. On note $X$ le nombre de navires perdus en une année civile parmi les 500 assurés.

1) Déterminer la loi exacte de $X$ puis une loi approchée.

2) Évaluer $\mathbb{P}(X = 5)$.

3) La compagnie rembourse le 31 décembre la valeur des bateaux perdus au cours de l'année. À combien doivent s'élever ses réserves financières pour qu'elle puisse effectuer la totalité des remboursements avec une probabilité supérieure à 0,99 ?

**Exercice 8.** On admet que si une v.a.r. $X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ alors la v.a.r. $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

1) Calculer $\mathbb{P}(|X - 4| < 3)$ et $\mathbb{P}(X \geq 6 \,/\, X > 3)$ lorsque $X$ suit la loi $\mathcal{N}(6; 4)$.

4) Calculer l'espérance $\mu$ et l'écart type $\sigma$ d'une v.a.r. $Y$ dont on sait qu'elle suit une loi normale et que $\mathbb{P}_Y(]-\infty, 5]) = 0,1587$ et $\mathbb{P}_Y(]-\infty, 20]) = 0,9773$.

**Exercice 9.** Dans une station service, la demande hebdomadaire en un certain carburant (exprimée en dizaines de milliers de litres) est modélisée par une variable aléatoire $X$ suivant la loi normale $\mathcal{N}(50; 4)$.

En début de semaine, combien le gérant doit-il avoir de ce carburant dans ses cuves pour que

1) avec une probabilité d'au moins 0,9, toute la clientèle de la semaine puisse être servie ?

2) avec une probabilité d'au moins 0,8, les deux tiers du stock soient vendus au cours de la semaine ?

**Exercice 10.** 1) On considère $n$ v.a.r. $X_1, \cdots, X_n$ indépendantes et suivant toutes une même loi de probabilité $\mathbb{P}_*$ (c'est à dire $\mathbb{P}_{X_i} = \mathbb{P}_*$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$) dont la fonction de répartition est notée $F$. On définit aussi les v.a.r.

$$U = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \qquad \text{et} \qquad V = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

et on désigne par $F_U$ et $F_V$ leurs fonctions de répartition respectives.

a) Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer l'évènement $\{V \leq t\}$ en fonction des évènements $\{X_1 \leq t\}, \{X_2 \leq t\}, \cdots, \{X_n \leq t\}$.



lut de Toulouse

b) Déduire du a) une expression de $F_V$ en fonction de $F$.

c) Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer l'évènement $\{U > t\}$ en fonction des évènements $\{X_1 > t\}, \{X_2 > t\}, \cdots, \{X_n > t\}$.

d) Déduire du c) une expression de $F_U$ en fonction de $F$.

2) Un bus passe régulièrement, toutes les vingt minutes, à l'un des ses arrêts. Un individu se présente cinq fois au hasard à cet arrêt et on considère ses différents temps d'attente $X_1, X_2, \cdots, X_5$ (exprimés en minutes) avant le passage du bus. On admet que les $X_i$ peuvent être vus comme des v.a.r. indépendantes et suivant toutes la loi de probabilité uniforme $\mathcal{U}([0;20])$. On note $U$ le plus petit de ces cinq temps d'attente et $V$ le plus grand.

a) En utilisant le 1), donner explicitement les fonctions de répartition de $U$ et de $V$.

b) En déduire une densité de $U$ et une densité de $V$.

c) Calculer $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(V), Var(U)$ et $Var(V)$.

d) Calculer la probabilité des évènements $A$ et $B$ suivants :

$A$ : « l'individu n'attend jamais plus de cinq minutes » ;

$B$ : « l'individu attend toujours au moins dix minutes ».

**Exercice 11.** Un appareil contient deux composants électroniques $E_1$ et $E_2$. Les durées de vie respectives de ces composants, exprimées en semaines, sont des variables aléatoires notées $X_1$ et $X_2$. On suppose que $X_1$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 0,002$ que $X_2$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_2$ inconnu et que $X_1, X_2$ sont indépendantes.
Pour que l'appareil fonctionne à un instant donné, il faut et il suffit que ses deux composants $E_1$ et $E_2$ fonctionnent à cet instant. On note $Y$ la durée de vie de cet appareil.
1) Calculer la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
2) Calculer la probabilité $p_1$ que le composant $E_1$ fonctionne encore au bout de 25 semaines.
3) On sait que la probabilité que le composant $E_2$ soit toujours en état de marche au bout de 25 semaines vaut $p_2 = 0,9$. Calculer $\lambda_2$.
3) a) Exprimer $Y$ en fonction de $X_1$ et de $X_2$ puis en déduire sa fonction de répartition.

b) Justifier que $Y$ suit aussi une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c) Calculer la probabilité que l'appareil fonctionne encore au bout de 25 semaines.

**Exercice 12.** Une urne contient initialement 2 boules rouges et 3 boules vertes. On tire successivement des boules de l'urne jusqu'à obtenir une rouge avec la règle suivante : si à un tirage la boule obtenue est verte alors on la remplace dans l'urne par une boule rouge avant d'effectuer le tirage d'après. On note $X$ la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de tirages nécessaires pour avoir une première boule rouge. Pour tout entier $k \geq 1$, on considère l'évènement $R_k$ suivant :

$R_k$ : « on obtient une boule rouge au $k^{eme}$ tirage. »

1) Étant donnée une loi de probabilité $\mathbb{P}$ et $n$ évènements $E_1, E_2, \cdots, E_n$ $(n \geq 2)$ tels que $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1}) \neq 0$, justifier que

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2/E_1) \times \mathbb{P}(E_3/E_1 \cap E_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_n/E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}).$$

2) Exprimer les évènements $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$, $\{X = 3\}$ et $\{X = 4\}$ en utilisant seulement les évènements $R_k$ et les opérations ensemblistes $\cup$, $\cap$, $\bar{\cdot}$.
3) Déterminer la loi de probabilité de $X$ à l'aide des questions précédentes.
4) Calculer l'espérance de $X$.

**Exercice 13.** Une entreprise du bâtiment s'est engagée à livrer une maison à un client pour une date précise. Le retard (exprimé en semaines) pris par les travaux peut être considéré comme



IUT de Montpellier

une variable aléatoire réelle $X$ ayant pour densité la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} - \frac{x}{200} & \text{si } 0 \leq x \leq 20; \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 20. \end{cases}$$

Les indemnités, exprimées en centaines d'euros, que devra verser l'entreprise en cas de retard de livraison sont égales à $Y = X^2$.

1) a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle $Y$.
   b) Déduire du a) une densité de $Y$.
2) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$.
3) Calculer la probabilité que l'entreprise verse au maximum 2500 euros d'indemnités à ce client.



Iut de Villetaneuse