IUT de Villetaneuse - Département Informatique

Probabilités (semestre 3)

Année 2020-2021

Table des matières

Chapitre 1

Lois de probabilité

1.1 Univers d'une expérience aléatoire

On considère en probabilités des expériences dont l'issue ne peut pas être connue à l'avance, mais pour lesquelles on connait cependant tous les résultats possibles. Cet ensemble de tous les résultats possibles doit être décrit de façon mathématique et on parle d'**univers** ou d'**ensemble fondamental** de l'expérience. Il est souvent noté Ω.

Exemple 1.1 *L'expérience consiste à observer le résultat du lancer d'une pièce :* $\Omega = \{P, F\}$.

Exemple 1.2 *L'expérience consiste à observer le résultat du lancer d'un dé vert et d'un dé rouge :* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.

Exemple 1.3 *Trois individus, numérotés de 1 à 3, font une course ; l'expérience consiste en les classer suivant leur ordre d'arrivée ;* Ω *est l'ensemble des permutations de* $\{1, 2, 3\}$, *c'est à dire*

$$\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}.$$

Exemple 1.4 *On décide de lancer une pièce et de recommencer jusqu'à obtenir « pile ». L'expérience consiste à compter le nombre de lancers nécessaires pour cela. On peut prendre* $\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, *où* ∞ *est un symbole correspondant à la situation où l'on n'obtient jamais « pile ».*

Exemple 1.5 *L'expérience consiste à mesurer la durée de vie d'un composant électronique. On peut prendre* $\Omega = \mathbb{R}^+$.

Exemple 1.6 *L'expérience consiste à observer le point d'impact d'une fléchette lancée sur une cible murale. On peut prendre* $\Omega = \mathbb{R}^2$.

1.2 Évènements

1.2.1 Cas d'un univers Ω discret

On dit que Ω est **discret** lorsque c'est un ensemble fini ou bien dénombrable, ce dernier mot signifiant que Ω est infini mais que l'on peut cependant numéroter tous ses éléments (plus précisément, un ensemble Ω est dénombrable s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et Ω). C'est le cas des Exemples 1.1 à 1.4.

Définition 1.1

Soit Ω un univers discret. On appelle ***évènement*** *tout sous-ensemble de Ω. Lorsqu'un évènement ne contient qu'un seul élément (c'est à dire lorsque c'est un singleton) on parle d'un* ***évènement élémentaire****. L'ensemble vide $\emptyset$ est souvent appelé* ***l'évènement impossible****, l'univers Ω* ***l'évènement certain****.*

Il est essentiel de savoir traduire un évènement donné en langage courant en un évènement au sens mathématique de la définition précédente, et inversement.

Exemple 1.7 *En reprenant l'Exemple 1.2, décrire la situation « le dé vert donne un résultat pair » comme un évènement $E \subset \Omega$.*

Exemple 1.8 *En reprenant l'Exemple 1.3, décrire la situation « l'individu 3 est arrivé avant l'individu 1 » comme un évènement $E \subset \Omega$.*

Exemple 1.9 *Dans le cadre de l'Exemple 1.4, donner l'évènement $E \subset \Omega$ correspondant à la situation où l'on obtient le premier « pile » après un nombre pair de lancers.*

1.2.2 Cas d'un univers Ω continu

Par opposition au cas discret, on dit que Ω est un univers **continu** lorsqu'il est infini et non dénombrable ; cela signifie qu'il y a trop d'éléments dans Ω pour que l'on puisse tous les numéroter (Exemples 1.5 et 1.6). Dans ce cadre :

- On se limitera le plus souvent au cas où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Par analogie avec le cas discret, on peut vouloir appeler « évènement » tout sous-ensemble de Ω ; il faut en fait réserver ce mot à certains sous-ensembles de Ω (dits mesurables) que nous ne chercherons pas à définir précisément dans ce cours. *Cependant, tous les ensembles $E \subset \Omega$ que l'on rencontre en pratique constituent des évènements. En particulier, lorsque Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, tout autre intervalle $I \subset \Omega$ est un évènement.*

Exemple 1.10 *En reprenant l'Exemple 1.5, donner l'évènement $E \subset \Omega$ correspondant à la situation où le composant électronique fonctionne au moins 100 unités de temps.*

1.2.3 Opérations sur les évènements

Aussi bien dans le cas d'un univers discret que d'un univers continu, les évènements sont des sous-ensembles de Ω auxquels on peut appliquer naturellement trois opérations :

- la réunion $E \cup F$ de deux évènements E, F est un évènement ;
- l'intersection $E \cap F$ de deux évènements E, F est un évènement ;
- le complémentaire $\overline{E} = \Omega \setminus E$ d'un évènement E est un évènement.

Lorsque $E \cap F = \emptyset$ on dit que E et F sont **incompatibles** ou **disjoints**.

écriture ensembliste	interprétation
$E \cup F$	E ou F est réalisé
$E \cap F$	E et F sont réalisés
$\overline{E}$ ou $\Omega \setminus E$ ou E^c	E n'est pas réalisé

Les opérations de réunion et d'intersection se généralisent à un nombre fini d'évènements et même à une infinité dénombrable d'évènements ; ainsi on pourra considérer les évènements $\bigcup_i E_i$ et $\bigcap_i E_i$ pour toute suite (finie ou non) d'évènements $E_1, E_2, \ldots$.

1.3 Lois de probabilité

Définition 1.2

Soient Ω un univers (discret ou continu) et $\mathcal{E}$ l'ensemble des évènements inclus dans Ω. Une ***loi de probabilité sur Ω*** *est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois axiomes suivants :*
Axiome 1 : pour tout évènement $E \in \mathcal{E}$ on a $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$;
Axiome 2 : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
Axiome 3 : pour toute suite (finie ou infinie) d'évènements $E_1, E_2, \ldots$ deux à deux disjoints appartenant à $\mathcal{E}$ on a

$$\mathbb{P}(\bigcup_i E_i) = \sum_i \mathbb{P}(E_i).$$

Selon que Ω est discret ou continu, on dit que $\mathbb{P}$ est une ***loi discrète*** *ou une* ***loi continue****.*
Le triplet $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ est appelé un ***espace probabilisé****.*

Intuitivement, le nombre $\mathbb{P}(E)$ mesure la vraissemblance que le résultat de l'expérience aléatoire se trouve dans E. Les axiomes 1 à 3 (appelés axiomes de Kolmogorov) permettent de développer toute la théorie des probabilités.

Remarque 1.1 *Lorsque la suite $E_1, E_2, \ldots$ est infinie, la somme $\sum_i \mathbb{P}(E_i)$ est une somme avec une infinité de termes, autrement dit une série.*

Remarque 1.2 *Une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers Ω discret est totalement déterminée dès que l'on connait la probabilité de chaque évènement élémentaire. En effet on peut alors calculer la probabilité de tout évènement $E \subset \Omega$ grâce à la formule suivante, qui est une conséquence du troisième axiome :*

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{w \in E} \mathbb{P}(\{w\}).$$

1.3.1 Conséquences des axiomes

Théorème 1.1

On considère une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω et deux évènements E, F inclus dans Ω. On a

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$.
3. *Si* $E \subset F$ alors $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$.
4. $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$.

Théorème 1.2

On considère une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω.

1. *Si $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$ est une suite infinie* croissante *d'évènements inclus dans Ω alors on a*
$$\mathbb{P}(\bigcup_{i\geq 1} E_i) = \lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}(E_i).$$
2. *Si $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$ est une suite infinie* décroissante *d'évènements inclus dans Ω alors on a*
$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\geq 1} E_i) = \lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}(E_i).$$

1.3.2 Fonction de répartition

Définition 1.3

Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité (discrete ou continue) sur un univers $\Omega \subset \mathbb{R}$. On appelle ***fonction de répartition*** *de $\mathbb{P}$ la fonction*

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(]-\infty, x] \cap \Omega) \end{array}.$$

En particulier si $\Omega = \mathbb{R}$ alors on a $F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x])$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.3

Une loi de probabilité sur $\Omega \subset \mathbb{R}$ est totalement déterminée par sa fonction de répartition. Autrement dit, si deux lois de probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sur Ω ont la même fonction de répartition alors ces deux lois sont égales, c'est à dire $\mathbb{P}(E) = \mathbb{Q}(E)$ pour tout évènement $E \subset \Omega$.

Propriété 1.1

Soit F la fonction de répartition d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}$. Alors

1. *F est croissante ;*
2. $$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1;$$
3. *F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.*

1.4 Lois de probabilité définies par une densité

On se limite dans ce paragraphe 1.4 au cas où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un seul point. Il s'agit donc d'un univers continu.

Définition 1.4

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une ***densité de probabilité*** *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0$;*
2. *f est continue, sauf éventuellement en un nombre fini de points ;*
3. *$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.*

Le résultat suivant dit que l'on détermine sans ambiguïté une loi de probabilité en se donnant une densité de probabilité.

Théorème 1.4

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité vérifiant $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$ alors il existe une unique loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que, pour tout intervalle $I \subset \Omega$ d'extrémités a et b avec $a \leq b$ (éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) on ait

$$\mathbb{P}(I) = \int_a^b f(x)dx.$$

On dit alors que f est une densité (de probabilité) de la loi $\mathbb{P}$.

Remarque 1.3 *Certaines lois de probabilité sur Ω n'admettent pas de densité. Nous ne rencontrerons pas cette situation dans ce cours.*

Remarque 1.4 *Si une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω admet une densité f alors, pour tout point $a \in \Omega$, on a $\mathbb{P}(\{a\}) = 0$. En effet, on a*

$$\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}([a, a]) = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

On dit que la loi de probabilité $\mathbb{P}$ ne charge pas les points. En conséquence, des intervalles fermés, ouverts ou semi-ouverts avec les mêmes bornes ont la même probabilité.

1.4.1 Lien entre densité et fonction de répartition

Proposition 1.1

Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω admettant une densité f. Alors sa fonction de répartition F vérifie :

1. *pour tout intervalle $[a, b] \subset \Omega$, $\mathbb{P}([a, b]) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*
2. *Si f est continue en un point $a \in \mathbb{R}$ alors F est dérivable en a et $F'(a) = f(a)$.*

L'énoncé suivant explique que l'on peut, dans de nombreux cas, obtenir une densité d'une loi de probabilité sur Ω en dérivant sa fonction de répartition.

Proposition 1.2

Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω. On suppose de plus que
- *sa fonction de répartition F est continue ;*
- *F est dérivable et de dérivée F' continue, sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

Alors la loi $\mathbb{P}$ admet pour densité la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{si } F \text{ est dérivable en } x; \\ \text{une valeur positive arbitraire sinon.} \end{cases}$$

1.5 Quelques lois de probabilité classiques

1.5.1 Lois de probabilité discrètes

Loi discrète uniforme

Définition 1.5

La loi de probabilité discrète uniforme sur un ensemble Ω non vide et fini est donnée par

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{nombre d'éléments dans } E}{\text{nombre d'éléments dans } \Omega}$$

pour tout évènement $E \subset \Omega$.

Désignons par $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre déléments dans Ω. La formule précédente donne en particulier $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$ pour tout $\omega \in \Omega$ et on dit alors qu'il y a **équiprobabilité des évènements élémentaires**. D'après la Remarque 1.2, ceci caractérise totalement la loi de probabilité uniforme sur Ω.

Utilisation concrète : modélise le tirage « au hasard » d'un élément d'un ensemble fini Ω, sans qu'aucun élément de Ω ne soit privilégié par rapport à d'autres (Exemples 1.1 et 1.2).

Loi de Bernoulli

Définition 1.6

La loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ est la loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega = \{0,1\}$ caractérisée par

$$\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\{1\}) = p.$$

Utilisation concrète : modélise l'observation du résultat d'une expérience aléatoire avec seulement deux issues, l'« échec » (0) et le « succès » (1) ayant respectivement pour probabilité $1 - p$ et p.

Loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

Définition 1.7

La loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, notée $\mathcal{B}(n,p)$, est la loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega = \{0,1,\cdots,n\}$ caractérisée par

$$\forall k \in \{0,1,\cdots,n\} \quad \mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Utilisation concrète : la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ se rencontre quand on compte le nombre de succès obtenus lors de n répétitions indépendantes d'une même expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles, le succès (avec probabilité p) ou bien l'échec (avec probabilité $1-p$). La notion d'indépendance peut être ici considérée intuitivement et sera précisée au Chapitre 2.

Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

Définition 1.8

La loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$, notée $\mathcal{G}(p)$, est la loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}^*$ caractérisée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(\{k\}) = (1-p)^{k-1}\, p.$$

Utilisation concrète : la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ se rencontre lorsque l'on considère des répétitions indépendantes d'une même expérience aléatoire qui n'a que deux issues, le succès (avec probabilité p) ou bien l'échec (avec probabilité $1-p$) et que l'on compte le nombre de répétitions nécessaires pour obtenir un premier succès.

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Définition 1.9

La loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, est la loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}$ caractérisée par

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Utilisation concrète : modélise le nombre de réalisations (dans un temps ou un lieu donné) de divers phénomènes aléatoires. Comme le montre la proposition suivante, la loi de Poisson est la limite de lois binomiales.

Proposition 1.3 (*Approximation d'une binomiale par une Poisson*)

Pour n assez grand et p assez petit, on peut considérer que la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ est une bonne approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

En effet, pour un réel $\lambda > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on vérifie que

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} (\frac{\lambda}{n})^k (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Or le nombre $\binom{n}{k} (\frac{\lambda}{n})^k (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$ est la probabilité d'obtenir k sous la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ et le nombre $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ est la probabilité d'obtenir k sous la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. La limite ci-dessus montre donc que, pour n assez grand, la loi $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ est bien approchée par la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. En notant $p = \frac{\lambda}{n}$ on obtient l'approximation donnée dans la Proposition 1.3.
En pratique, on considère par exemple que cette approximation est convenable dès que $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$.

1.5.2 Lois de probabilité continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Loi de probabilité uniforme $\mathcal{U}([a,b])$ sur un intervalle $[a,b]$ (où $a < b$)

Définition 1.10

La loi de probabilité uniforme $\mathcal{U}([a,b])$ est la loi de probabilité sur l'intervalle $[a,b]$ admettant pour densité la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{si } x < a \text{ ou } x > b. \end{cases}$$

Utilisation concrète : modélise le tirage « au hasard » d'un nombre réel entre a et b, sans qu'aucune partie de l'intervalle $[a,b]$ ne soit privilégiée par rapport à d'autres.

Loi normale (ou loi de Gauss) $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$

Définition 1.11

La loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, est la loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ admettant pour densité la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}.$$

Utilisation concrète : modélise de nombreux expériences aléatoires où l'on observe une valeur numérique qui résulte de la conjonction inextricable de multiples causes (par exemple la taille d'un individu pris dans une population donnée, une erreur de mesure,...). Elle joue aussi un rôle important en statistiques car, sous certaines conditions, elle décrit la loi de la moyenne d'un caractère numérique observé sur un échantillon.

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Définition 1.12

La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$ est la loi de probabilité sur $\mathbb{R}^+$ admettant pour densité la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Utilisation concrète : modélise notamment le temps d'attente pour la réalisation d'un phénomène sans mémoire.

1.6 Espérance et variance d'une loi de probabilité sur $\Omega \subset \mathbb{R}$

1.6.1 Espérance

Définition 1.13

1. *Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un ensemble $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ fini ou dénombrable. On définit son* ***espérance (ou moyenne)*** *$\mathbb{E}(\mathbb{P})$ par*

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \sum_i x_i \, \mathbb{P}(\{x_i\})$$

   à la condition que la somme $\sum_i |x_i| \, \mathbb{P}(\{x_i\})$ converge. Si cette dernière condition n'est pas satisfaite, on dit que $\mathbb{P}$ n'admet pas d'espérance.

2. *Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un intervalle $\Omega \subset \mathbb{R}$ admettant une densité f. On définit son* ***espérance (ou moyenne)*** *$\mathbb{E}(\mathbb{P})$ par*

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

   à la condition que cette intégrale converge. Si cette dernière condition n'est pas satisfaite, on dit que P n'admet pas d'espérance.

Remarque 1.5 *Si $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots\}$ est un ensemble fini, la somme $\sum_i |x_i| \, \mathbb{P}(\{x_i\})$ comporte seulement un nombre fini de termes et l'espérance $\mathbb{E}(\mathbb{P})$ existe donc toujours dans ce cas. Si $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots\}$ est dénombrable, on montre que la convergence de la série $\sum_i |x_i| \, \mathbb{P}(\{x_i\})$ implique celle de $\sum_i x_i \, \mathbb{P}(\{x_i\})$ et aussi que la valeur de $\sum_i x_i \, \mathbb{P}(\{x_i\})$ ne dépend pas de la façon dont on a numéroté les éléments de Ω.*

1.6.2 Variance et écart-type

Définition 1.14

1. *Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un ensemble $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ fini ou dénombrable. On suppose que $\mathbb{P}$ admet une espérance $\mathbb{E}(\mathbb{P})$. On définit alors sa* **variance** *$Var(\mathbb{P})$ par*
$$Var(\mathbb{P}) = \sum_i \big(x_i - \mathbb{E}(\mathbb{P})\big)^2 \, \mathbb{P}(\{x_i\})$$
à la condition que cette somme converge. Si elle ne converge pas, on dit que $\mathbb{P}$ n'admet pas de variance.
2. *Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un intervalle $\Omega \subset \mathbb{R}$ avec une densité f. On suppose que $\mathbb{P}$ admet une espérance $\mathbb{E}(\mathbb{P})$. On définit alors sa* **variance** *$Var(\mathbb{P})$ par*
$$Var(\mathbb{P}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - \mathbb{E}(\mathbb{P})\big)^2 f(x)dx$$
à la condition que cette intégrale converge. Si elle ne converge pas, on dit que $\mathbb{P}$ n'admet pas de variance.

Définition 1.15

L'écart-type $\sigma_{\mathbb{P}}$ d'une loi de de probabilité $\mathbb{P}$ est la racine carrée de sa variance, lorsque celle-ci existe.

On utilise parfois la formule suivante pour calculer la variance.

Proposition 1.4 (*Formule de Koenig-Huygens*)

1. *Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un ensemble $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ fini ou dénombrable. Alors $\mathbb{P}$ admet une variance si et seulement si la somme $\sum_i x_i^2 \mathbb{P}(\{x_i\})$ converge, et dans ce cas on a*
$$Var(\mathbb{P}) = \sum_i x_i^2 \mathbb{P}(\{x_i\}) \; - \; \big(\mathbb{E}(\mathbb{P})\big)^2.$$
2. *Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un intervalle $\Omega \subset \mathbb{R}$ avec une densité f. Alors $\mathbb{P}$ admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge, et dans ce cas on a*
$$Var(\mathbb{P}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \; - \; \big(\mathbb{E}(\mathbb{P})\big)^2.$$

1.6.3 Espérances et variances des lois classiques

Loi de probabilité $\mathbb{P}$	Espérance	Variance
Loi de Bernoulli de paramètre p	$\mathbb{E}(\mathbb{P}) = p$	$Var(\mathbb{P}) = p(1-p)$
Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$\mathbb{E}(\mathbb{P}) = np$	$Var(\mathbb{P}) = np(1-p)$
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \frac{1}{p}$	$Var(\mathbb{P}) = \frac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \lambda$	$Var(\mathbb{P}) = \lambda$
Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$	$\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \frac{a+b}{2}$	$Var(\mathbb{P}) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$	$\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \mu$	$Var(\mathbb{P}) = \sigma^2$
Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{E}(\mathbb{P}) = \frac{1}{\lambda}$	$Var(\mathbb{P}) = \frac{1}{\lambda^2}$

1.7 Exercices

Exercice 1. Trouver un univers et une loi de probabilité modélisant chacune des deux expériences aléatoires suivantes.
1) On lance un dé et on observe le nombre obtenu.
2) On observe le nombre sur un jeton pioché au hasard dans une urne qui contient cinq jetons numérotés de 1 à 5 et deux autres portant le numéro 6.
3) Calculer l'espérance, la variance et la fonction de répartition des lois de probabilité obtenues dans les questions précédentes.

Exercice 2. On jette trois pièces de monnaie, l'une de 50 centimes, une de 1 euro et une autre de 2 euros, et l'on s'intéresse aux côtés qu'elle montrent (« pile » ou « face »).
1) Donner un univers Ω et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ décrivant cette expérience aléatoire.
2) On considère les trois évènement A, B, C suivants :
A : « la pièce de 50 centimes montre le côté face ; »
B : « la pièce de 1 euro montre le côté face ; »
C : « la pièce de 2 euros montre le côté face. »
a) Donner en langage courant l'évènement $A \cup \overline{B}$.
b) Écrire, en utilisant seulement les lettres A, B, C et les opérations ensemblistes $\cup$,$\cap$ et $\bar{\cdot}$, l'évènement D « les pièces de 50 centimes et de 2 euros ne montrent pas le même côté ».
c) Écrire les évènements $A \cup \overline{B}$ et D en extension, c'est à dire en faisant la liste de tous leurs éléments.
d) Calculer $\mathbb{P}(A \cup \overline{B})$ et $\mathbb{P}(D)$.

Exercice 3. On lance un dé vert et un dé rouge et on observe les résultats obtenus.
1) Donner un univers et une loi de probabilité modélisant cette expérience aléatoire.
2) a) Donner les évènements $E \subset \Omega$ et $F \subset \Omega$ correspondant respectivement aux situations « le dé vert donne un résultat pair » et « le dé rouge donne un résultat pair ».
b) Exprimer l'évènement « les deux dés donnent des résultats de même parité » en utilisant les lettres E, F et les symboles $\cap, \cup, \bar{\cdot}$.

c) Donner en langage courant l'évènement $E \cap \bar{F}$.

3) a) Écrire comme sous-ensemble de Ω l'évènement « la somme des résultats des deux dés vaut 7 » puis calculer sa probabilité.

b) Écrire comme sous-ensemble de Ω l'évènement du 2)b) puis calculer sa probabilité.

Exercice 4. On considère trois évènements E, F, G d'un univers Ω. Ecrire sous forme ensembliste les évènements correspondant aux phrases suivantes :

a) parmi les évènements E, F, G, seul E est réalisé.

b) E et G sont réalisés mais pas F.

c) Au moins deux des évènements E, F, G sont réalisés.

d) Au plus l'un des trois évènements E, F, G est réalisé.

e) Exactement deux des évènements E, F, G sont réalisés.

Exercice 5. Un étudiant possède dix livres de mathématiques et cinq livres d'informatique, qu'il range sur une étagère en faisant seulement attention à ce que les ouvrages traitant d'un même sujet restent groupés. Quelle est la probabilité que les deux livres de mathématiques qu'il préfère se trouvent côte à côte ? Quelle est la probabilité que son livre de mathématiques favori et son livre d'informatique favori soient voisins ?

Exercice 6. Un examen scolaire se présente sous la forme d'un questionnaire à choix multiple (QCM) de cinq questions. Pour chacune d'elles, l'élève doit choisir une réponse parmi trois proposées, une seule de ces propositions étant correcte. On considère un élève qui répond totalement au hasard à chacune des cinq questions.

1) Quelle loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur quel univers Ω permet de modéliser le nombre de bonne réponses données par cet élève ? Préciser son espérance et sa variance.

2) Calculer la probabilité qu'il obtienne au moins quatre bonnes réponses.

Exercice 7. Trois joueurs A,B,C jettent, à tour de rôle et dans cet ordre, une pièce de monnaie ; le premier qui obtient « pile » gagne la partie. L'expérience consiste à compter le nombre de lancers nécessaires pour que ce jeu finisse.

1) Donner un univers Ω et une loi de probabilité modélisant cette expérience aléatoire, en tenant compte du fait que le jeu peut ne pas s'arrêter. Préciser l'espérance et la variance de cette loi de probabilité.

2) Écrire l'évènement « B gagne » comme sous-ensemble de Ω puis calculer sa probabilité.

Exercice 8. On compte le nombre de fois que l'on doit lancer un dé pour obtenir 6.

1) Donner un univers Ω et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ correspondant à cette expérience, en tenant compte du fait que le jeu peut ne pas s'arrêter.

2) Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par E_n l'évènement « le jeu s'arrête au n^{ieme} lancer ». Énoncer en langage courant l'évènement $\overline{\bigcup_{n\geq 1} E_n}$.

3) a) Calculer la probabilité que l'on doive lancer au moins deux fois le dé.

b) Étant donné un entier $n \geq 1$, calculer la probabilité que l'on doive lancer le dé au moins n fois.

Exercice 9. Une urne contient 3 boules vertes, 4 boules jaunes, 5 rouges.

I On tire au hasard 3 boules de cette urne.

a) Donner un univers et une loi de probabilité correspondant à cette expérience.

b) Écrire l'évènement « Toutes les boules obtenues sont de la même couleur »comme sous-ensemble de Ω puis calculer sa probabilité. Même question pour l'évènement « On obtient exac-

tement deux boules rouges ».
II Reprendre les questions ci-dessus en supposant cette fois que l'on fait un tirage avec remise, ce qui signifie que l'on sort les boules de l'urne l'une après l'autre et que chaque boule tirée est remise dans l'urne après avoir noté sa couleur et avant de sortir la suivante.

Exercice 10. On considère n personnes ($n \geq 2$) parmi lesquelles se trouvent Alain et Bernard.
1) On aligne au hasard ces n personnes. Après avoir donné un univers et une loi de probabilité décrivant cette expérience, calculer la probabilité que Alain et Bernard se retrouvent voisins.
2) Même question si les n personnes sont disposées autour d'une table ronde.

Exercice 11. Pour tester les capacités cognitives d'un animal de laboratoire, on le place devant quatre boutons sur lesquels il peut appuyer. Trois de ces boutons provoquent un bruit désagréable alors que le quatrième provoque la distribution d'une friandise. On compte le nombre d'actions sur ces boutons jusqu'à l'obtention de la friandise.
1) Donner, sous chacune des trois hypothèses suivantes, un univers Ω et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω décrivant cette expérience aléatoire.

Hypothèse 1 : l'animal a une bonne mémoire, c'est à dire qu'il se souvient du résultat de toutes ses actions.

Hypothèse 2 : l'animal n'a aucune mémoire, c'est à dire qu'il ne se souvient d'aucun des résultats de ses actions.

Hypothèse 3 : l'animal a une mémoire faible, c'est à dire qu'il se souvient seulement du résultat de sa dernière action.

2) Calculer l'espérance de $\mathbb{P}$ sous chacune de ces hypothèses.

Exercice 12. On s'intéresse aux instants où deux collègues arrivent sur leur lieu de travail ; ces instants sont considérés comme aléatoires mais se situent toujours entre 8h et 9h.
1) Donner un univers Ω décrivant ces observations.
2) On admet que la probabilité de tout évènement $E \subset \Omega$ s'exprime par $\mathbb{P}(E) = \frac{Aire(E)}{Aire(\Omega)}$, ce qui traduit le fait que les instants d'arrivée sont uniformément répartis parmi toutes les valeurs possibles. Ces deux collègues ont la convention suivante : le premier arrivé attend l'autre pendant 15 minutes pour qu'ils aillent boire un café ensemble. Si l'autre n'arrive pas pendant ce délai, alors ils se retrouveront seulement pour déjeuner.

Représenter sur un dessin l'évènement E « Les deux collègues boivent un café ensemble le matin » puis calculer sa probabilité.

Exercice 13. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} a(1-x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur du paramètre a pour que f soit une densité de probabilité.
2) On note $\mathbb{P}$ la loi de probabilité sur $[0;1]$ ayant pour densité la fonction f.

a) Représenter sur un dessin la courbe de f puis l'aire sous cette courbe égale à $\mathbb{P}([\frac{1}{4}, \frac{3}{4}])$. Calculer cette dernière probabilité.

b) Calculer $\mathbb{E}(\mathbb{P})$ et $Var(\mathbb{P})$.

c) Déterminer la fonction de répartition F de $\mathbb{P}$.

Exercice 14. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} a(1-\frac{x}{5}) & \text{si } 0 \leq x \leq 5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur du paramètre a pour que f soit une densité de probabilité.
2) On note $\mathbb{P}$ la loi de probabilité sur $[0;5]$ ayant pour densité la fonction f.
a) Représenter sur un dessin la courbe de f puis l'aire sous cette courbe égale à $\mathbb{P}([1;2])$. Calculer cette dernière probabilité.
b) Calculer $\mathbb{E}(\mathbb{P})$ et $Var(\mathbb{P})$.
c) Déterminer la fonction de répartition F de $\mathbb{P}$.

Exercice 15. On note $\mathbb{P}$ la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ (loi normale centrée réduite).
1) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F(-x) = 1 - F(x)$.
2) Calculer $\mathbb{P}(]-\infty, \frac{1}{2}])$, $\mathbb{P}(]-2, +\infty[)$ et $\mathbb{P}([-1, \frac{3}{2}])$.
3) Pour quels réels a, b, c a-t-on $\mathbb{P}(]-\infty, a]) = 0,9515$, $\mathbb{P}([b, +\infty[) = 0,6293$, $\mathbb{P}([-c, c]) = 0,762$?

Exercice 16. La durée de vie d'un atome d'un corps radioactif donné est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, qui sera notée $\mathbb{P}$ dans cet exercice. Étant donné un échantillon (contenant un grand nombre d'atomes) de ce corps, on admet que la proportion d'atomes se désintégrant entre les instants t et $t+h$ (où $0 \leq t \leq t+h$) est égale à $\mathbb{P}([0, h])$. On appelle *période* (ou *demi-vie*) du corps radioactif considéré la durée au bout de laquelle la moitié des atomes se sont désintégrés.
1) La période du plutonium 239 est de 24100 ans. Déterminer le paramètre λ correspondant, en prenant l'année comme unité de temps.
2) On considère un stock de 500 kg de plutonium 239.
a) Combien de kilogrammes en restera-t-il dans 1000 ans ?
b) Au bout de combien de temps les deux tiers de ce stock se seront-ils désintégrés ?

Chapitre 2

Probabilités conditionnelles et indépendance

On se donne pour tout ce chapitre une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers Ω (discret ou continu).

2.1 Probabilité conditionnelle

Définition 2.1

Etant donnés deux évènements E et F avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on appelle ***probabilité conditionnelle de E sachant F*** *le nombre $\frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$. On le note $\mathbb{P}(E/F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$.*

Le nombre $\mathbb{P}(E/F)$ s'interprète comme la probabilité attribuée à E lorsque l'on dispose de l'information supplémentaire selon laquelle F s'est réalisé.

Remarque 2.1 *On vérifie que la donnée de $\mathbb{P}(E/F)$ pour tout évènement $E \subset \Omega$ définit une loi de probabilité sur Ω au sens de la Définition 1.2 du Chapitre 1.*

2.2 Indépendance

2.2.1 Indépendance de deux évènements

Définition 2.2

Deux évènements E et F sont dits ***indépendants*** *si $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)$.*

Propriété 2.1

Soient E, F deux évènements.

1. *Lorsque $\mathbb{P}(F) > 0$ on a : E et F sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(E/F) = \mathbb{P}(E)$.*
2. *(E et F indépendants) $\Longleftrightarrow$ (E et $\overline{F}$ indépendants) $\Longleftrightarrow$ ($\overline{E}$ et F indépendants) $\Longleftrightarrow$ ($\overline{E}$ et $\overline{F}$ indépendants).*

2.2.2 Indépendance de n évènements ($n \geq 2$)

Définition 2.3

Des évènements $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sont dits ***(mutuellement) indépendants*** *si pour tout entier $k \in \{2, \cdots, n\}$ et pour toute sous-famille $E_{i_1}, E_{i_2}, \cdots, E_{i_k}$ de $E_1, \ldots, E_n$ on a*

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = \mathbb{P}(E_{i_1}) \times \mathbb{P}(E_{i_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_{i_k}).$$

2.2.3 Indépendance d'une infinité dénombrable d'évènements

Définition 2.4

Des évènements $E_1, E_2, \cdots$, en nombre infini, sont dits ***(mutuellement) indépendants*** *si pour toute sous-famille finie $E_{i_1}, E_{i_2}, \cdots, E_{i_k}$ de $E_1, E_2, \cdots$ (k entier ≥ 2 quelconque) on a :*

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = \mathbb{P}(E_{i_1}) \times \mathbb{P}(E_{i_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_{i_k}).$$

2.3 Formule des probabilités totales

Théorème 2.1

Soit $F_1, F_2, \ldots$ une suite (finie ou non) d'évènements vérifiant les propriétés suivantes :

P1 $\forall i \in \{1, 2, \ldots\}$ $\mathbb{P}(F_i) > 0$;

P2 *Les F_i sont deux à deux disjoints ;*

P3 $\bigcup_i F_i = \Omega$.

Alors on a pour tout évènement $E \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}(E) = \sum_i \mathbb{P}(E/F_i) \times \mathbb{P}(F_i).$$

2.4 Formule de Bayes

Théorème 2.2

Soit $F_1, F_2, \ldots$ une suite d'évènements comme dans le théorème précédant. Alors, pour tout F_j dans cette suite et pour tout évènement E tel que $P(E) > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(F_j/E) = \frac{\mathbb{P}(E/F_j) \times \mathbb{P}(F_j)}{\sum_i \mathbb{P}(E/F_i) \times \mathbb{P}(F_i)}.$$

2.5 Exercices

Exercice 1. Le résultat du lancer d'un dé équilibré est modélisé par l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avec la loi discrète uniforme que l'on note $\mathbb{P}$.
1) Trouver deux évènements A et B dans Ω qui sont différents de l'évènement impossible $\emptyset$ et indépendants.
2) Trouver des évènements A, B, C dans Ω qui vérifient $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$ mais qui ne sont pas indépendants.

Exercice 2. On lance deux dés, l'un de couleur verte et l'autre de couleur rouge, et on observe les nombres obtenus.
1) Donner un univers Ω décrivant cette expérience.
2) On considère les évènements
A : « Le nombre obtenu avec le dé vert est pair. »
B : « Le nombre obtenu avec le dé rouge est impair. »
C : « Les nombres obtenus sont tous les deux pairs ou bien tous les deux impairs. »
Écrire les évènements A, B, C comme sous-ensembles de Ω puis déterminer s'ils sont deux à deux indépendants. Sont-ils indépendants ?

Exercice 3. Une personne a dans sa poche deux dés ; l'un d'entre eux est un dé normal, l'autre est un dé truqué sur lequel les numéros pairs 2,4,6 sont marqués deux fois chacun (donc les numéros impairs 1,3,5 n'apparaissent pas sur ce dé). Cette personne prend un dé au hasard dans sa poche et le jette deux fois. On considère par la suite les deux évènements A et B suivants :
A : « Le résultat du premier lancer est 4 » ;
B : « Le résultat du deuxième lancer est 2 ».
1) a) Calculer la probabilité de A à l'aide de la formule des probabilités totales.
b) On constate que l'évènement A s'est réalisé. Quelle est la probabilité que le dé choisi soit le dé normal ?
2) On constate maintenant que A et B se sont réalisés. Quelle est la probabilité que le dé choisi soit le dé normal ?
3) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 4. Un individu a devant lui trois urnes. Il sait seulement que toutes les urnes contiennent quatre boules et que, parmi ces urnes, une contient exactement une boule rouge, une autre exactement deux boules rouges et une autre exactement trois boules rouges. Il désigne au hasard l'une des urnes.
1) L'individu prend une boule dans l'urne choisie.
a) Calculer la probabilité qu'elle soit rouge à l'aide de la formule des probabilités totales.
b) On constate que la boule est rouge. Quelle est la probabilité que l'urne choisie soit celle contenant une seule boule rouge ?
2) Dans cette question, l'individu prend une boule dans l'urne choisie, observe sa couleur, la redépose dans la même urne et (après l'avoir secouée) en retire à nouveau une boule.
a) On constate qu'il obtient ainsi deux fois une boule rouge. Quelle est la probabilité que l'urne choisie soit celle avec une seule boule rouge ?
b) On considère les deux évènements suivants :
A : la boule obtenue au premier tirage est rouge ;
B : la boule obtenue au deuxième tirage est rouge.
A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 5. Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un ensemble Ω. Vérifier que si deux évènements $E \subset \Omega$ et $F \subset \Omega$ sont à la fois incompatibles et indépendants alors $\mathbb{P}(E) = 0$ ou $\mathbb{P}(F) = 0$.

Exercice 6. Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un ensemble Ω. Combien d'égalités faut-il vérifier pour montrer que n évènements $E_1, E_2, \cdots, E_n$ dans Ω sont indépendants ?

Exercice 7. On considère une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers Ω . On suppose que trois évènements A, B, C vérifient

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C); \qquad \mathbb{P}(\overline{A} \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C);$$
$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B} \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\overline{B}) \times \mathbb{P}(C); \qquad \mathbb{P}(A \cap B \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(\overline{C}).$$

Montrer que A, B, C sont indépendants.

Exercice 8. Une urne contient 5 boules rouges, 4 boules jaunes et 3 boules bleues, indiscernables au toucher. On s'intéresse aux couleurs de 5 boules extraites de l'urne au hasard et sans remise.
1) Donner un univers Ω et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ décrivant cette expérience.
2) On considère les évènements A et B suivants :

A : « On a obtenu au moins 2 boules bleues. »

B : « On a obtenu exactement deux boules rouges et au moins une jaune. »

Calculer la probabilité conditionnelle de B sachant A. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 9. On considère une famille avec n enfants ($n \geq 1$) et les évènements A et B suivants :

A : « il y a dans cette famille au moins un garçon et au moins une fille » ;

B : « il y a dans cette famille au plus un garçon ».

Calculer les probabilités de A et de B. Ces évènements sont-ils indépendants ?

Exercice 10. Lorsque l'on se présente sans rendez-vous au cabinet du docteur Dupond, le temps passé dans la salle d'attente (exprimé en minutes) peut être considéré comme le résultat d'une expérience aléatoire ayant pour univers l'intervalle $\Omega = [0; 60]$ et pour loi de probabilité $\mathbb{P}$ la loi uniforme sur Ω.
Pour un individu qui vient consulter dans ces conditions, on considère les évènements A et B suivants :

A : « son attente dure au moins 45 minutes » ;

B : « son attente dure entre 30 minutes et 50 minutes ».

Préciser les sous-ensembles de Ω correspondant à A et B puis calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A/B)$. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 11. Dans cet exercice, on note $\mathbb{P}$ la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}\big(\{n, n+1, n+2, \cdots\}\big) = (1-p)^{n-1}$.
2) Déduire du 1) que $\mathbb{P}$ est une loi « sans mémoire » , c'est à dire que, pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\big(\{m+n+1, m+n+2, m+n+3, \cdots\}/\{m+1, m+2, m+3, \cdots\}\big) = \mathbb{P}\big(\{n+1, n+2, n+3, \cdots\}\big).$$

Exercice 12. Dans cet exercice on note $\mathbb{P}$ la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1) Calculer $\mathbb{P}([t,+\infty[)$ pour $t \geq 0$.
2) Déduire du 1) que $\mathbb{P}$ est une loi « sans mémoire » , c'est à dire que

$$\forall s \in \mathbb{R}^+,\ \forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{P}\big([s+t,+\infty[/[s,+\infty[\}\big) = \mathbb{P}\big([t,+\infty[\big).$$

La loi exponentielle vous semble-t-elle adaptée pour modéliser sur le long terme la durée de vie d'un être vivant ?

Exercice 13. Dans un atelier, la fabrication d'une pièce est assurée par quatre machines $M_1, \ldots, M_4$ qui produisent respectivement 15 %, 20 %, 30%, 35% des pièces fabriquées. Dans la production de chaque machine, il y a respectivement 5%, 4%, 3%, 2% de pièces défectueuses. On prend au hasard une pièce sortant de cet atelier.

1) Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?

2) On constate en effet que la pièce choisie est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine M_i ($i = 1, \ldots, 4$) ?

Exercice 14. On jette deux dés et on recommence jusqu'à ce que la somme des deux nombres obtenus soit égale à 5 ou à 7. Calculer la probabilité de l'évènement E « la somme 5 apparaît avant la somme 7 ». *Indication :* on pourra utiliser la formule des probabilités totales avec les évènements F_1, F_2, F_3 suivants :

F_1 : « au premier lancer la somme vaut 5 »
F_2 : « au premier lancer la somme vaut 7 »
F_3 : « au premier lancer la somme est différente de 5 et de 7 ».

Exercice 15. 1) Soient $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un ensemble Ω et n évènements $E_1, E_2, \cdots, E_n$ ($n \geq 2$) tels que $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1}) \neq 0$. Justifier que

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2/E_1) \times \mathbb{P}(E_3/E_1 \cap E_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_n/E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}).$$

2) Quatre joueurs se partagent au hasard les 52 cartes d'un jeu classique (4 couleurs et 13 valeurs de l'as au roi) en quatre mains de 13 cartes. Calculer la probabilité que chaque joueur reçoive un as. *Indication :* on pourra utiliser 1) avec les évènements E_i « le i^{eme} joueur a exactement un as dans sa main ».

Exercice 16. (le problème de la ruine du joueur)
Deux joueurs A et B misent sur les résultats successifs du lancer répété d'une pièce de la façon suivante ; si pile est sorti, B donne une unité à A ; si face est sorti, A donne une unité à B. Le jeu s'arrête dès que la fortune de l'un des deux joueurs vaut 0. On suppose que les lancers successifs sont indépendants, que la pièce montre le côté pile avec probabilité p ($0 < p < 1$) et le côté face avec probabilité $q = 1 - p$. On notera $i \in \mathbb{N}$ la fortune initiale du joueur A et $j \in \mathbb{N}$ celle de B. Il sera commode de poser $N = i + j$ en supposant $N \geq 1$. On considèrera les évènements E et H suivants :

E : « le joueur A finit par remporter tout l'argent » ;
H : « le premier lancer de la pièce donne pile ».

On notera p_i la probabilité de E, l'indice $i \in \{0, \cdots, N\}$ soulignant que cette probabilité dépend bien sûr de la fortune initiale i du joueur A.
Il y a trois possibilités pour ce jeu : l'un des deux joueurs A ou B finit par gagner tout l'argent, ou bien la partie ne s'arrête jamais. On propose de calculer les probabilités de ces différents évènements.

1) a) Combien valent p_0 et p_N ?

b) Justifier que $\mathbb{P}(E/H) = p_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \cdots, N-1\}$. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(E/\overline{H})$ et p_{i-1} quand $i \in \{1, \cdots, N\}$?

2) En utilisant la formule des probabilités totales et le 1)b), montrer que

$$\forall i \in \{1, \ldots, N-1\} \quad p_i = pp_{i+1} + qp_{i-1}$$

puis en déduire

$$(*) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, N-1\} \quad p_{i+1} - p_i = \frac{q}{p}(p_i - p_{i-1}).$$

3) Utiliser les équations $(*)$ obtenues au 2) et la valeur de p_0 pour montrer que

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\} \quad p_i - p_{i-1} = (\frac{q}{p})^{i-1} p_1$$

puis en déduire

$$\forall i \in \{0, \ldots, N\} \quad p_i = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-\frac{q}{p}} p_1 & \text{si } \frac{q}{p} \neq 1 \\ ip_1 & \text{si } \frac{q}{p} = 1 \end{cases}$$

4) En utilisant la valeur de p_N et le 3), vérifier que

$$p_1 = \begin{cases} \frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^N} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{N} & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

puis finalement que

$$\forall i \in \{0, \ldots, N\} \quad p_i = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N} & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

5) On note q_i la probabilité pour que le joueur B finisse par gagner tout l'argent, sa fortune initiale étant $N - i$ ($i \in \{0, \ldots, N\}$).

a) En raisonnant par symétrie avec la situation du joueur A, donner directement q_i en fonction de N, i, p, q.

b) Vérifier que $p_i + q_i = 1$. Que peut-on en déduire quant à la probabilité que le jeu ne finisse jamais ?

Chapitre 3

Variables aléatoires réelles

On se donne pour tout ce chapitre une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers Ω (discret ou continu).

3.1 Généralités

Il arrive fréquemment que l'on s'intéresse à une ou plusieurs fonctions des résultats d'une expérience aléatoire, et pas seulement aux résultats eux-mêmes. Cela conduit à la notion suivante.

Définition 3.1

On appelle **variable aléatoire réelle (v.a.r.)** *toute fonction* $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

En fait, cette définition n'est pas tout à fait correcte car il faudrait imposer (quand Ω est un univers continu) certaines restrictions à X. Nous ne nous préoccuperons pas de ces conditions, qui sont toujours satisfaites par les fonctions $X : \Omega \to \mathbb{R}$ rencontrées en pratique.

Exemple 3.1 *On lance un dé vert et un dé rouge et on observe les deux nombres obtenus. On décrit cette expérience aléatoire avec l'univers* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ *et la loi de probabilité discrète uniforme* $\mathbb{P}$ *sur* Ω*, en convenant par exemple que, pour* $(a, b) \in \Omega$*, le nombre* a *correspond au résultat du dé vert et* b *à celui du dé rouge.*

- Supposons que l'on s'intéresse en particulier au résultat du dé vert. On fait alors intervenir la v.a.r.

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a \end{array}.$$

- Si l'on s'occupe du résultat du dé rouge, on considère la v.a.r.

$$Y : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & b \end{array}.$$

- Si l'on s'intéresse au nombre obtenu en sommant les résultats des deux dés, on définit la v.a.r.

$$Z : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}.$$

Exemple 3.2 *On mesure la longueur du coté d'une pièce métallique carrée découpée par une machine. En supposant que cette mesure puisse être considérée comme une expérience aléatoire, quelle v.a.r. faut-il considérer si l'on s'intéresse à la surface de cet objet ?*

Notation 3.1 *Étant donnée une v.a.r. $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on peut considérer pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'ensemble des antécédents de x par X, c'est à dire l'ensemble $\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\}$. En probabilités, ce sous-ensemble de Ω est noté $\{X = x\}$. Pour les applications X que l'on manipule habituellement, il constitue un évènement et on peut donc lui attribuer une probabilité, qui sera notée $\mathbb{P}(X = x)$ au lieu de $\mathbb{P}(\{X = x\})$.*
De façon générale, un évènement de la forme $\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A\}$ (où $A \subset \mathbb{R}$) est noté plus simplement $\{X \in A\}$ et on écrit $\mathbb{P}(X \in A)$ au lieu de $\mathbb{P}(\{X \in A\})$.

Exemple 3.3 *En considérant les v.a.r. X et Z de l'Exemple 1.1, écrire les évènements $\{X = 3\}$, $\{Z = 7\}$ et $\{Z \in \{2, 3\}\}$ comme sous-ensembles de Ω.*

3.2 V.a.r. discrètes et v.a.r continues

Pour une v.a.r. $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on désigne par $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de toutes les valeurs que peut prendre X ; autrement dit $X(\Omega)$ est l'ensemble des nombres réels ayant au moins un antécédent par X.

Définition 3.2

1. *On dit qu'une v.a.r. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est* **discrète** *lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable ; on peut alors écrire $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots\}$ (numérotation qui se termine ou non).*
2. *On dit qu'une v.a.r. X est* **continue** *quand $X(\Omega)$ est infini et non dénombrable.*

Remarque 3.1 *Le mot « continue » dans la définition précédente n'a pas le sens qu'on lui donne habituellement en analyse.*

Remarque 3.2 *Pour une v.a.r. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ continue, on se limitera dans ce cours à la situation où $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

3.3 Loi de probabilité d'une v.a.r.

Définition 3.3

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r (discrète ou continue). **La loi de probabilité de X**, *notée $\mathbb{P}_X$, est la loi de probabilité sur l'ensemble $X(\Omega)$ définie par $\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(X \in E)$ pour tout évènement $E \subset X(\Omega)$.*

Remarque 3.3 *Lorsque X est discrète, la loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ est totalement déterminée dès que l'on connait la valeur de $\mathbb{P}_X(\{x\})$ pour tous les $x \in X(\Omega)$.*

Remarque 3.4 *Dans les exercices de probabilités, on donne souvent directement la loi $\mathbb{P}_X$ de la v.a.r. X, sans que l'on ait à s'occuper de Ω ni de la loi $\mathbb{P}$.*

Exemple 3.4 *Préciser $Z(\Omega)$ pour la v.a.r. Z de l'Exemple 3.1 puis déterminer la loi de probabilité $\mathbb{P}_Z$.*

Vocabulaire : Par la suite, tout le vocabulaire relatif à la loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ sera aussi utilisé pour X. Ainsi nous parlerons de la fonction de répartition de X au lieu de la fonction de répartition de $\mathbb{P}_X$. De même pour la densité de probabilité, l'espérance et la variance (lorsqu'elles existent). On notera $\mathbb{E}(X)$ au lieu de $\mathbb{E}(\mathbb{P}_X)$ et $Var(X)$ au lieu de $Var(\mathbb{P}_X)$.

3.4 V.a.r. indépendantes

Définition 3.4

Des v.a.r. $X_1, X_2, \cdots$ toutes définies sur Ω sont dites **indépendantes** *si les évènements $\{X_1 \in A_1\}$, $\{X_2 \in A_2\}, \cdots$ sont indépendants, quel que soit le choix des $A_i \subset \mathbb{R}$*

3.5 Propriétés de l'espérance des variables v.a.r.

Propriété 3.1

Soient X, Y deux v.a.r. définies sur Ω admettant chacune une espérance et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

1. *La v.a.r. $X + Y$ admet pour espérance $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,*
2. *La v.a.r. αX admet pour espérance $\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha \mathbb{E}(X)$,*
3. *la v.a.r. $X + \alpha$ admet pour espérance $\mathbb{E}(X + \alpha) = \mathbb{E}(X) + \alpha$,*
4. *Si X et Y sont indépendantes et si XY admet une espérance, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.*

3.6 Propriétés de la variance des v.a.r.

Propriété 3.2

Soient X une v.a.r. définie sur Ω admettant une variance et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

1. *La v.a.r. αX admet pour variance $Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$,*
2. *La v.a.r. $X + \alpha$ admet pour variance $Var(X + \alpha) = Var(X)$.*

Propriété 3.3

Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des v.a.r. indépendantes admettant toutes une variance alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet pour variance

$$Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n).$$

3.7 Exercices

Exercice 1. On observe le résultat du lancer de deux dés.
1) Donner un univers Ω et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ décrivant cette expérience aléatoire.
2) On note X la v.a.r. égale à la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres obtenus.
   a) Donner une formule explicite pour X puis préciser $X(\Omega)$.
   b) Ecrire comme sous-ensembles de Ω les évènements $\{X = 1\}$ et $\{X \in \{1, 4\}\}$.
   c) Déterminer la loi de probabilité de X puis son espérance $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 2. L'expérience consiste à tirer similtanément trois boules d'une urne contenant 4 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes.

1) Donner un univers Ω et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ décrivant cette expérience aléatoire.
2) On note X la v.a.r. égale au nombre de boules bleues obtenues sur les trois tirées.
   a) Donner la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance de X.

Exercice 3. On jette trois dés et on observe les nombres obtenus.
1) Donner un univers Ω et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ décrivant cette expérience aléatoire.
2) On considère le jeu suivant. Si le 6 apparait k fois, avec $k \in \{1, 2, 3\}$, alors le joueur reçoit k euros ; si le 6 n'apparait pas, alors le joueur perd 1 euro. On note X la v.a.r. égale au gain (éventuellement négatif) du joueur.
   a) Écrire les évènements $\{X = -1\}$ et $\{X = 3\}$ comme sous-ensembles de Ω.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X ainsi que son espérance.

Exercice 4. On considère les v.a.r. X et Z de l'Exemple 3.1 du cours.
1) Calculer $\mathbb{P}(Z = i/X = 4)$ pour tout entier $i \in \mathbb{N}$.
2) Calculer $\sum_{i=2}^{12} i \times \mathbb{P}(Z = i/X = 4)$. Comment s'interprète ce nombre ? *Remarque : Ce nombre est noté habituellement* $\mathbb{E}(Z/X = 4)$ *et est appelé l'espérance conditionnelle de* Z *sachant l'évènement* $\{X = 4\}$.

Exercice 5. Suite de l'Exercice 6 du Chapitre 1.
1) Le professeur attribue une note (pouvant être négative) en donnant un point pour chaque bonne réponse et en enlevant un point pour chaque mauvaise réponse.
   a) Montrer que cette note est donnée par la v.a.r. $N : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $N(\omega) = 2\omega - 5$.
   b) Préciser $N(\Omega)$ puis déterminer la loi de probabilité de N.
   c) Calculer $\mathbb{E}(N)$ et $Var(N)$.
2) Pour ne pas trop pénaliser l'élève, le professeur décide finalement de mettre 0 si la note calculée au 1) est négative. Déterminer la loi de probabilité de la v.a.r. N' ainsi définie et calculer $\mathbb{E}(N')$.

Exercice 6. Un individu achète trois tickets d'un jeu de hasard, chacun de ces tickets étant ou bien « perdant » ou bien « gagnant ». On sait que 10% des tickets mis en jeu sont des tickets gagnants. On note X la v.a.r. égale au nombre des tickets gagnants achetés par cet individu.
1) a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer la probabilité q que cet individu achète au moins un ticket gagnant.
2) Un ticket coûte 2 Euros et un ticket gagnant rapporte 5 Euros. On note Y le gain (éventuellement négatif !) de cette personne suite à l'achat des trois tickets. Exprimer Y en fonction de X puis en déduire l'espérance et la variance de Y.
3) Cet individu décide de renouveler son achat de trois tickets chaque semaine. On suppose cependant que si, une certaine semaine, il n'obtient aucun ticket gagnant alors il se découragera et cessera aussitôt de jouer à ce jeu. On note Z la v.a.r. égale au nombre de semaines durant lesquelles ce joueur achetera des tickets.
   a) Déterminer la loi de probabilité de Z.
   b) Calculer la probabilité que cet individu joue au moins deux semaines.
   c) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = q^{k-1}.$$

Exercice 7. Dans une population animale, une proportion $p \in]0, 1[$ des individus sont atteints d'une maladie pouvant se détecter par un test sanguin. On doit examiner cent de ces animaux pour savoir s'ils sont malades. On suppose que leurs états de santé sont indépendants les uns

des autres. Plutôt que de faire cent tests, on utilise le protocole suivant : on forme dix groupes de dix animaux et on mélange les échantillons de sang prélevés sur les individus d'un même groupe ; si le test est négatif sur un mélange alors on peut en déduire qu'aucun animal du groupe correspondant n'est malade ; dans le cas contraire, on teste individuellement chaque animal du groupe.
1) On note M_i la v.a.r. égale au nombre d'animaux malades dans le i^{eme} groupe. Déterminer la loi de probabilité de M_i et calculer $\mathbb{P}(M_i \geq 1)$.
2) On définit une v.a.r. X_i par $X_i = 0$ si le test collectif sur le i^{eme} groupe est négatif et $X_i = 1$ dans le cas contraire. Quelle est la loi de probabilité de X_i ?
3) On note T la v.a.r. égale au nombre <u>total</u> de tests effectués. Exprimer T en fonction des X_i puis en déduire son espérance et sa variance. Pour quelles valeurs de p peut-on s'attendre à une économie d'au moins 30 tests par rapport à la méthode consistant à tester chacun des cent animaux ?

Exercice 8. Un ordinateur A envoie des données à un autre ordinateur B par blocs de 1024 bits (0 ou 1) consécutifs, organisés de la façon suivante :
- les 1023 premiers bits contiennent l'information à transmettre ;
- le dernier est un « bit de parité », ce qui signifie qu'il est choisi de façon qu'il y ait un nombre pair de 1 dans le bloc de 1024 bits. Il a pour rôle de permettre à B de détecter certaines erreurs survenues pendant la transmission, comme on le verra plus loin.

Pour chacun des 1024 bits d'un bloc, on estime que la probabilité qu'il soit altéré pendant la transmission (c'est à dire qu'il passe de 0 à 1 ou inversement) vaut 10^{-4} ; de plus les erreurs sur les différents bits sont supposées indépendantes les unes des autres. On note X la v.a.r. égale au nombre d'erreurs survenues pendant la transmission d'un bloc.
1) Expliquer pourquoi on peut considérer que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre λ.
2) L'ordinateur B est programmé pour rejeter un bloc qu'il reçoit si celui-ci contient un nombre impair de 1 et pour l'accepter s'il contient un nombre pair de 1. Est-on certain qu'un bloc accepté n'a subi aucune erreur de transmission ?
3) On admet dans cette question que $\mathbb{P}(X \text{ est pair}) = \frac{1}{2}\big(1 + e^{-2\lambda}\big)$ (cette égalité sera démontrée au 4)).

a) Montrer que

$$\mathbb{P}(X = 0/X \text{ est pair}) = \frac{2e^{-\lambda}}{1 + e^{-2\lambda}}.$$

b) Interprétez la probabilité conditionnelle du a) dans le contexte du 2) et comparer la à $\mathbb{P}(X = 0)$. Quelle est votre conclusion ?
4) a) Pour $i \in \mathbb{N}$, simplifiez l'expression $\lambda^i + (-\lambda)^i$ en distinguant le cas où i est pair et le cas où i est impair.

b) En utilisant a) et le fait que $e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} = \sum_{j \geq 0} \frac{\lambda^{2j}}{(2j)!}.$$

c) En déduire que $\mathbb{P}(X \text{ est pair}) = \frac{1}{2}\big(1 + e^{-2\lambda}\big)$.

Exercice 9. Une compagnie d'assurance assure 500 navires de pêche valant chacun deux millions d'euros. Le risque assuré est la perte totale du navire, qui est un évènement de probabilité 0,001 sur une année. Les naufrages éventuels des différents navires sont considérés comme des évènements indépendants. On note X le nombre de navires perdus en une année civile parmi les

500 assurés.
1) Déterminer la loi exacte de X puis une loi approchée.
2) Évaluer $\mathbb{P}(X = 5)$.
3) La compagnie rembourse le 31 décembre la valeur des bateaux perdus au cours de l'année. À combien doivent s'élever ses réserves financières pour qu'elle puisse effectuer la totalité des remboursements avec une probabilité supérieure à 0,99 ?

Exercice 10. Un échantillon de 2000 personnes, représentatif de la population d'un pays, reçoit un médicament expérimental et on sait que 0,1 % de la population est allergique au composant principal de ce médicament. On note X la v.a.r. comptant le nombre de personnes de l'échantillon qui sont allergiques à ce produit.
1) Déterminer la loi de probabilité de X puis donner une loi de probabilité approchant la précédente.
2) En utilisant la loi approchée trouvée au 1), calculer
   a) la probabilité qu'il y ait exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon.
   b) la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.

Exercice 11. On considère une v.a.r. X admettant pour densité celle de l'Exercice 14 du Chapitre 1. On définit une nouvelle v.a.r. en posant $Y = X^2$.
1) Calculer la fonction de répartition de Y puis en déduire une densité de Y.
2) Calculer $\mathbb{P}_Y([1;3])$.
3) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $Var(Y)$.

Exercice 12. Un appareil contient deux composants électroniques E_1 et E_2. Les durées de vie respectives de ces composants, exprimées en semaines, sont des variables aléatoires notées X et Y. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre 0,002 et que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ inconnu.

Pour que l'appareil fonctionne à un instant donné, il faut et il suffit que ses deux composants E_1 et E_2 fonctionnent à cet instant.
1) Calculer la probabilité p_1 que le composant E_1 fonctionne encore au bout de 25 semaines.
2) On sait que la probabilité que le composant E_2 soit toujours en état de marche au bout de 25 semaines vaut $p_2 = 0,9$. Calculer λ.
3) On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Exprimer l'évènement « l'appareil fonctionne encore au bout de 25 semaines » en fonction de X et Y puis calculer sa probabilité.

Exercice 13. On rappelle que si une v.a.r. X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ alors la v.a.r. $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.
1) Calculer $\mathbb{P}(|X-4| < 3)$ et $\mathbb{P}(X \geq 6 \,/\, X > 3)$ lorsque X suit la loi $\mathcal{N}(6;2)$.
4) Calculer l'espérance μ et l'écart type σ d'une v.a.r. Y dont on sait qu'elle suit une loi normale et que $\mathbb{P}_Y(]-\infty,5]) = 0,1587$ et $\mathbb{P}_Y(]-\infty,20]) = 0,9773$.

Exercice 14. Dans une station service, la demande hebdomadaire en un certain carburant (exprimée en dizaines de milliers de litres) est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(50;4)$.
En début de semaine, combien le gérant doit-il avoir de ce carburant dans ses cuves pour que
1) avec une probabilité d'au moins 0,9, toute la clientèle de la semaine puisse être servie ?
2) avec une probabilité d'au moins 0,8, les deux tiers du stock soient vendus au cours de la semaine ?

Exercice 15. On considère n v.a.r. $X_1, \cdots, X_n$ indépendantes et suivant toutes une même loi de probabilité $\mathbb{P}_*$ (c'est à dire $\mathbb{P}_{X_i} = \mathbb{P}_*$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$) dont la fonction de répartition est notée F. On définit aussi les v.a.r.

$$U = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \qquad \text{et} \qquad V = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

et on désigne par F_U et F_V leurs fonctions de répartition respectives.

1) a) Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer l'évènement $\{V \leq t\}$ en fonction des évènements $\{X_1 \leq t\}, \{X_2 \leq t\}, \cdots, \{X_n \leq t\}$.

b) Déduire du a) une expression de F_V en fonction de F.

2) a) Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer l'évènement $\{U > t\}$ en fonction des évènements $\{X_1 > t\}, \{X_2 > t\}, \cdots, \{X_n > t\}$.

b) Déduire du a) une expression de F_U en fonction de F.

3) Un bus passe régulièrement, toutes les vingt minutes, à l'un des ses arrêts. Un individu se présente cinq fois au hasard à cet arrêt et on considère ses différents temps d'attente $X_1, X_2, \cdots, X_5$ (exprimés en minutes) avant le passage du bus. On admet que les X_i peuvent être vus comme des v.a.r. indépendantes et suivant toutes la loi de probabilité uniforme $\mathcal{U}([0; 20])$. On note U le plus petit de ces cinq temps d'attente et V le plus grand.

a) Donner explicitement les fonctions de répartition de U et de V.

b) En déduire une densité de U et une densité de V.

c) Calculer $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(V), Var(U)$ et $Var(V)$.

d) Calculer la probabilité des évènements A et B suivants :

A : « l'individu n'attend jamais plus de cinq minutes » ;

B : « l'individu attend toujours au moins dix minutes ».