CONTRÔLE CONTINU N° 1

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

Barême : Ex1-10 points, Ex2-10 points.

Répondre aux questions en justifiant la réponse. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. *Soit A_4 le groupe alterné de degré* 4.

a) *Montrer que les éléments de A_4 autres que l'élément neutre sont huit* 3-*cycles* (*p.ex.* $(1\ 2\ 3)$) *et trois produit de deux transpositions définies sur des sous-ensembles disjoints, appelés doubles transpositions* (*p.ex.* $(1\ 2)(3\ 4)$). *Quel est l'ordre de ces éléments ?*

b) *Montrer que si τ est une double transposition, il existe $\sigma \in A_4$ tel que $\tau = \sigma \circ (1\ 2)(3\ 4) \circ \sigma^{-1}$.*

c) *En utilisant le Théorème de Lagrange, montrer qu'un sous-groupe contenant les* 3-*cycles* $(1\ 2\ 3)$ *et* $(1\ 2\ 4)$ *est égal à* A_4.

d) *En déduire que A_4 ne possède pas de sous-groupe d'ordre* 6.

Solution :

a) On sait que $\#A_4 = 12$. Les huit 3-cycles $(1\ 2\ 3))$, $(1\ 3\ 2))$, $(1\ 2\ 4))$, $(1\ 4\ 2))$, $(1\ 3\ 4))$, $(1\ 4\ 3))$, $(2\ 3\ 4))$ et $(2\ 4\ 3))$ sont produit de 2 transpositions et ils ont donc signature $+1$. Ainsi ils appartient à A_4. On sait que leur ordre est 3. Les trois doubles transpositions $(1\ 2)(3\ 4))$, $(1\ 3)(2\ 4))$ et $(1\ 4)(2\ 3))$ sont produit de 2 transpositions et ils ont donc signature $+1$. Ainsi ils appartient à A_4. Leur ordre est 2, car ils sont différents de l'identité et leur carré est égal à l'identité. Puisque $1 + 8 + 3 = 12$, il n'y a pas d'autres éléments dans A_4.

b) Si $\tau = (1\ 2)(3\ 4)$, alors il suffit de considérer $\sigma = Id$.
Si $\tau = (1\ 4)(2\ 3)$, alors il suffit de considérer $\sigma = (1\ 2\ 3)$.
Si $\tau = (1\ 3)(2\ 4)$, alors il suffit de considérer $\sigma = (1\ 2\ 4)$.

c) Un sous-groupe contenant les 3-cycles $\alpha = (1\ 2\ 3)$ et $\beta = (1\ 2\ 4)$ doit contenir aussi $\alpha^{-1} = (1\ 3\ 2)$, $\beta^{-1} = (1\ 4\ 2)$, $\alpha \circ \beta = (1\ 3)(2\ 4)$, $\beta \circ \alpha = (1\ 4)(2\ 3)$, et aussi l'identité, de manière que sa cardinalité est au moins 7. Or, le Théorème de Lagrange nous dit que la cardinalité d'un sous-groupe doit diviser la cardinalité du groupe, donc elle doit diviser 12. La seule possibilité est donc qu'elle soit 12, c'est-à-dire que le sous-groupe soit A_4 même.

d) D'abord, quitte à renuméroter, le point c) nous montre que un sous-groupe contenant deux 3-cycles qui ne sont pas l'un l'inverse de l'autre est forcement A_4. Or, un sous-groupe H de cardinalité 6 doit forcement contenir deux 3-cycles, mais ils peuvent être l'un est l'inverse de l'autre. Supposons que H ne contient que l'identité, tous les doubles transpositions et un 3-cycle α et son inverse. Quitte à renuméroter, on peut supposer $\alpha = (1\ 2\ 3)$. Or, $\alpha \circ (1\ 2)(3\ 4) = (1\ 3\ 4)$, qui n'est pas dans H, ce qui donne une contradiction.

Exercice 2. *Dans cet exercice, on montre d'abord un résultat général qui pourra être appliqué dans les points suivants.*

a) *Soient K un corps, n un entier positif impair et M une matrice dans* $\mathrm{Mat}_n(K)$. *Montrer que si $M^T = -M$, alors* $\det(M) = 0$.

Soit maintenant

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & k \\ 0 & 2 & -k & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

b) *Pour quelles valeurs $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k est est inversible ?*

c) *Quel est le rang de A_k ?*

Solution :

a) On a

$$\det(M) = \det(M^T) = \det(-M) = (-1)^n \det(M) = -\det(M)$$

(où la première et la troisième égalités sont des résultats vus dans le cours. Donc $2\det(M) = 0$, ce qui donne $\det(M) = 0$.

b) On sait que A_k est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro. On calcule le déterminant. Par la formule de Laplace appliqué à la première ligne, on a que

$$\det(A_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & k \\ 2 & -k & 0 \end{vmatrix}$$

qui est nul, par le point a). Donc A_k n'est jamais inversible.

c) Puisque le déterminant de A_k est nul, le rang de A_k est forcement inférieur à 4. Mais

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

(on peut le calculer avec la formule de Laplace appliqué à la première ligne), de manière que le rang est 3.