CONTRÔLE FINAL

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

Barème : Ex1-10 points, Ex2-10 points.

Répondre aux questions en justifiant la réponse. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. *Soit* $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$.

a) *Calculer le polynôme caractéristique de A. Est-il scindé ?*
b) *Est-ce que la matrice A est diagonalisable ? Et triangularisable ?*
c) *Donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, si possible.*
d) *Est-ce que la base $\mathcal{B}$ trouvée au point précédent est une base orthogonale par rapport au produit scalaire standard de $\mathbb{R}^3$?*

NOM Prénom : .... Numéro d'étudiant : ....

NOM Prénom : .... Numéro d'étudiant : ....

NOM Prénom : .... Numéro d'étudiant : ....

Exercice 2. *Soit*

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}),$$

avec $k \in \mathbb{R}$, *et* $\varphi_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *la forme bilinéaire associée à* A, *i.e. l'application qui envoie* (u, v) *sur* uAv^T.

a) *Montrer que* φ_A *est un produit scalaire si et seulement si* $k > 4$.

b) *Pour quelle valeur de* $k \in \mathbb{R}$ *les vecteurs* $u = [1, 1, -1]^T$ *et* $v = [-2, 2, 8]^T$ *sont-ils orthogonaux ?*

c) *Soit* $k = 5$. *Donner une base du sous-espace orthogonale à* $\mathrm{Vect}([-1, -1, 1]^T)$.

NOM Prénom : .... Numéro d'étudiant : ....

NOM Prénom : .... Numéro d'étudiant : ....