Contrôle final

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Soit

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 1 & 1 & -k \\ k & 0 & 0 & k \\ -1+k & 0 & -1 & k \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

(a) Montrer que $\chi_{A_k}(x) = x(x-k)(x-1)^2$.
(b) Montrer que pour $k \neq 0$ and $k \neq 1$ la matrice A_k est diagonalisable.
(c) Montrer que pour $k = 1$ la matrice A_1 n'est pas diagonalisable.
(d) Montrer que pour $k = 0$ la matrice A_0 est diagonalisable et trouver une base de $\mathbb{R}^4$ formée par des vecteur propres pour A_0.

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

Exercice 2. Soient $E = \mathbb{R}^3$, $h \in \mathbb{R}$ un paramètre et $\varphi_h : E \times E \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire et symétrique telle que

$$\varphi_h(u,v) = 2u_1v_1 + 2(u_1v_2 + u_2v_1) + 3u_2v_2 + (h-1)u_3v_3,$$

où $u = (u_1, u_2, u_3)^t$, $v = (v_1, v_2, v_3)^t$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en base canonique.

(a) Montrer que la matrice Φ_h associée à φ_h en base canonique est la suivante

$$\Phi_h = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que

$$\varphi_h(u,v) = u^t \Phi_h v.$$

Prouver aussi, par la méthode de Gauss, que φ_h est un produit scalaire si et seulement si $h > 1$.

(b) Soit $h > 1$, donc tel que φ_h est un produit scalaire. Existe-t-il une valeur de h telle que les vecteurs $u = (1,0,1)^t$ et $v = (1,1,-1)^t$ soient orthogonaux pour φ_h ?

(c) Soit $h = 5$. Déterminer une base orthogonale pour l'espace euclidien (E, φ_5).

(d) Soit $h = 5$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace orthogonal au sous-espace

$$V = \mathrm{Vect}\{(1,1,-1)^t\}$$

dans l'espace euclidien (E, φ_5).

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....