ALGÈBRE LINÉAIRE 2 — 2023–2024

Ens. : M. Borello et V. Fratianni — Université Paris 8

Devoir Sur Table

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

Répondre aux questions en justifiant la réponse. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice. Soient $\mathcal{V} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $h \in \mathbb{R}$ un paramètre et $\varphi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que, en base canonique,

$$\varphi_h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + (h-1)z \\ hy \\ x + 5y + hz \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que

$$\mu_{\mathcal{V}}(\varphi_h) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & h-1 \\ 0 & h & 0 \\ 1 & 5 & h \end{pmatrix},$$

où $\mu_{\mathcal{V}}(\varphi_h)$ est la matrice associée à φ_h dans la base canonique.

(b) Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_{\varphi_h}(x)$.

(c) Montrer que, pour $h \neq 1$ et $h \neq 0$, l'endomorphisme φ_h est diagonalisable.

Soit $h = 2$.

(d) Déterminer les valeurs propres de φ_2 et leurs multiplicités algébriques.

(e) Pour chaque valeur propre, déterminer l'espace propre relatif, en donnant une base.

(f) Déterminer une base $\mathcal{V}'$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres, la matrice de changement de base $P := \mu_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et la matrice diagonale $D := \mu_{\mathcal{V}'}(\varphi_2)$ telles que

$$\mu_{\mathcal{V}'}(\varphi_2) = (\mu_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}))^{-1}\mu_{\mathcal{V}}(\varphi_2)\mu_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

Autrement dit,

$$D = P^{-1}AP,$$

où $A = \mu_{\mathcal{V}}(\varphi_2)$.

Revenons au cas général $h \in \mathbb{R}$.

(g) Est-ce que φ_0 et φ_1 sont diagonalisables ?

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

NOM Prénom : ....

Numéro d’étudiant : ....