Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 1

19-20 Septembre 2023

Virginio Fratianni
License 2 Mathématiques - année 2023/24
Université Paris 8

Echauffement

Exercice 1 (Calcul matriciel)**.** Soient A, B et C les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice $A^2 + BC^T$, où C^T représente la transposée de la matrice C.

Exercice 2 (Inversion matricielle)**.** Soient A, B, C et D les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si elles sont inversibles, et le cas échéant, calculer leur inverse.

Révision du cours Algèbre linéaire 1

Exercice 3 (Systèmes linéaires)**.** En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss–Jordan, décrire l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x - y + w = 0 \\ 3x - y + z + w = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x - y + w = 0 \\ 3x - y + z + w = 0 \end{cases}.$$

Exercice 4 (Systèmes linéaires à paramètre)**.** Dans cet exercice, on fixe h un paramètre réel. Déterminer, selon la valeur de h, l'ensemble des solutions du système linéaire d'inconnues x, y et z suivant :

$$\begin{cases} x + 2hy - 2z = -3 \\ x + 2z = -4 \\ -2y + hz = 0 \end{cases}.$$

Exercice 5 (L'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$)**.** Rappeler comment sont définies l'addition $+$ et la multiplication externe usuelle $\cdot$ dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Ensuite, pour chacune des parties suivantes, indiquer si elle forme un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$:

$$A = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a,b,c \in \mathbb{R}\,, a \geq 0\},\ B = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a,b,c \in \mathbb{R}\,, a+b+c = 0\},$$

$$C = \{(1,a,a^2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \in \mathbb{R}\},\ D = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a,b,c \in \mathbb{R}\,, a+2b+c = 0,\ a+5c = 0\}.$$

Exercice 6 (Base et dimension)**.** Exprimer la dimension et donner une base pour les sous-espaces vectoriels de l'exercice précédent. De plus, faire la même chose pour

$$\begin{gathered} V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,|\, p(1) = 0\}, \\ W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,|\, p^{'''}(\pi) = p(0)\}, \\ V \cap W, \\ V + W, \end{gathered}$$

sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[x]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3.

Exercice 7 (Dimension et équations)**.** Soit

$$V = \mathrm{Vect}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \} \leq \mathbb{R}^3.$$

Donner la dimension de V ainsi qu'un système d'équations de cardinal minimal qui représente V.

Exercice 8 (Noyau et image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$)**.** Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application suivante :

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x \\ x+y+z \\ 2x-3y+z \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer une base du noyau de φ, puis une base de l'image de φ.
- L'endomorphisme φ est-il injectif ? Surjectif ? Est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 9 (Autour de la notion de projecteur vectoriel)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'un endomorphisme $\pi \in \mathcal{L}(V)$ est un projecteur si et seulement si $\pi \circ \pi = \pi$. Le but de cet exercice est de démontrer, sur un exemple particulier de projecteur vectoriel π, que $V = \mathrm{Ker}(\pi) \oplus \mathrm{Im}(\pi)$.

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que π est un projecteur vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donner une interprétation géométrique de cette application.
- Déterminer une base du noyau de π, puis une base de l'image de π.
- L'endomorphisme π est-il injectif ? Surjectif ? Est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
- Conclure que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\pi) \oplus \mathrm{Im}(\pi)$.

Matrice associée à une application linéaire

Soient $\mathbb{K}$ un corps, V et W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n et m respectivement. Aussi, soient $\varphi : V \to W$ une application linéaire, $\mathcal{V} = \{v_i, \dots, v_n\}$ une base de V et $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ une base de W. On définit $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$, la *matrice associée à φ par rapport à les bases $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$* comme suit :

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) := \big(\varphi(v_1)\ \varphi(v_2)\ \dots\ \varphi(v_n)\big) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),$$

où les vecteurs $\varphi(v_i)$ sont exprimés en colonne et en coordonnées par rapport à la base $\mathcal{W}$.

En particulier, l'application suivante

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}} : \mathrm{Hom}(V,W) &\longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ \varphi &\longmapsto \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels et, étant donné $v \in V$, on a

$$\varphi(v) = Av.$$

En choisissant $\varphi = \mathrm{id}_V$, où id_V est l'identité de V, et $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ une autre base de V, on obtient la définition de *matrice de changement de base de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{V}'$* :

$$A := \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\mathrm{Id}_V) = (v_1\ \dots\ v_n) \in M_{n\times n}(\mathbb{K}),$$

où les vecteurs v_i sont exprimés en colonne et en cordonnées par rapport à la base $\mathcal{V}'$.

Aussi, on peut prouver par exercice que

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\mathrm{Id}_V) = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_V)^{-1}.$$

Ces matrices sont appelées matrices de changement de base car elles permettent de changer les bases de référence des matrices associées aux applications linéaires. En fait, étant donné $\mathcal{W}' = \{w_1', \dots, w_m'\}$, une autre base de W, on a l'identité suivante :

$$\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(\varphi) = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}'}(\mathrm{Id}_V)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_V).$$

Donc, ayant fixé les bases $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$, l'isomorphisme $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}$ nous permet de traduire le calcul entre applications linéaires en calcul matriciel. Aussi, la composition entre deux applications linéaires correspond au produit entre les matrices respectives (exercice).

Exercice 10 (Matrice associée à un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$)**.** Soient $\mathcal{V} = \{e_1, e_2\}$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

- Déterminer $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi)$, la matrice associée à φ dans la base canonique.
- Soit $\mathcal{V}' = \{e_1 + e_2, e_1 + 2e_2\}$. Déterminer les matrices de changement de bases $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
- Déterminer $\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}'}(\varphi)$, la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{V}'$.

Exercice 11 (Matrice associée à un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$)**.** Soient $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de l'exercice 8 et $\mathcal{V} = \{e_1, e_2, e_3\}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Déterminer $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi)$, la matrice associée à φ dans la base canonique.
- Soit $\mathcal{V}' = \{e_1 + e_3, 2e_2, e_2 + e_3\}$. Déterminer les matrices de changement de bases $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
- Déterminer $\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}'}(\varphi)$, la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{V}'$.

Exercice 12 (*Plus compliqué : retour aux projecteurs vectoriels)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que
$$V = U \oplus W,$$
pour des sous-espaces appropriés U et W. Soit $\pi : V \to V$ l'application tel que
$$\begin{cases} \pi(u) = u \;\forall\, u \in U \\ \pi(w) = 0 \;\forall\, w \in W \end{cases}.$$

- Montrer que π est bien définie.
- Montrer que π est une application linéaire.
- Montrer que π est un projecteur vectoriel dans le sens de l'exercice 9.
- Soit $\mathcal{V}$ une base de V composée d'une base de $\mathrm{Im}(\pi)$ suivie d'une base de $\mathrm{Ker}(\pi)$. Déterminer $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$.
- Déterminer la matrice associée à π dans la base canonique en fonction de $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$.
- Existe-t-il un moyen de déterminer directement la matrice associée dans la base canonique, sans passer par $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$?
- Montrer que tous les projecteurs dans le sens de l'exercice 9 sont de cette forme, où
$$U = \mathrm{Im}(\pi) \quad \text{et} \quad W = \ker(\pi).$$