Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 10

5-6 Décembre 2023

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2023/24
Université Paris 8

Transformations orthogonales

Exercice 1 (Transformation orthogonale et matrice associée)**.** Soient E un espace euclidien de dimension finie, $f : E \to E$ une transformation orthogonale, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $A = \mu_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer que les colonnes (ou les lignes) de A forment une base orthonormée de E.

Exercice 2 (Matrice orthogonale)**.** Montrer que la matrice suivante

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale.

Exercice 3 (Opérations entre matrices orthogonales)**.** Soient A et B deux matrices orthogonales d'ordre n.

— Montrer que $\det(A) = \pm 1$.
— Montrer que AB est une matrice orthogonale.
— Montrer que A^T est une matrice orthogonale.
— Montrer que A^{-1} est une matrice orthogonale.

Exercice 4 (Symétrie orthogonale)**.** Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorphisme tel que, pour $v \in \mathbb{R}^n$

$$f(v) = 2\pi(v) - v,$$

où π est la projection orthogonale sur V (donc, la projection sur V et parallèle à $V^\perp$, venant de la décomposition $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$).

Montrer que f est une transformation orthogonale. Noter qu'elle est appelée symétrie orthogonale d'axe V.

Endomorphisme adjoint et autoadjoint

Exercice 5 (Orthogonalité entre vecteurs propres)**.** Soient E un espace euclidien de dimension finie, $f : E \to E$ un endomorphisme autoadjoint de E.

Montrer que deux vecteurs propres relatifs à deux valeurs propres différentes sont orthogonaux

Exercice 6 (Diagonalisation orthogonale)**.** Considérer l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(x, y, z) = (2x + 4z, 6y, 4x + 2z).$$

— Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint.

— Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f.

Exercice 7 (Endomorphisme paramétrique)**.** Soient $k \in \mathbb{R}$ un paramètre et A_k la matrice suivante.

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

— Déterminer les valeurs de k pour lesquelles A_k est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale.

— Pour les valeurs de k trouvées au point précédent, déterminer les valeurs propres de A_k et une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}A_kP$ soit une matrice diagonale.

Exercice 8 (Endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^2$)**.** Soient $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire et symétrique telle que

$$\varphi((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = 5u_1v_1 + 2(u_1v_2 + u_2v_1) + u_2v_2$$

et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$f(x, y) = (-3x + 3y, 7x - 7y).$$

— Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

— Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint par rapport à φ.

— Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (par rapport à φ) constituée de vecteurs propres de f.

Exercice 9 (Endomorphisme dans l'espace des matrices)**.** Soient $E = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices réelles d'ordre 2 et soit $f : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ l'endomorphisme tel que

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} \\ a_{21} + a_{22} & a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}.$$

— Soient $\mathcal{B} = \{\epsilon(i, j) \,|\, 1 \leq i, j \leq 2\}$ la base canonique de $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ (donc $\epsilon(i, j)$ est la matrice ayant 1 dans la coordonnée (i, j) et 0 ailleurs). Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ par rapport au produit scalaire φ tel que $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^TB)$.

— Déterminer $\mu_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$.

— Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint par rapport à φ et déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f.

Exercice 10 (Puissance d'une matrice symétrique)**.** Soit A une matrice symétrique réelle telle que $A^n = I$ pour un certain entier $n \geq 3$. Montrer que $A^2 = I$.