Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 3

3-4 Octobre 2023

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2023/24
Université Paris 8

Calcul des déterminants

Exercice 1 (Méthode des cofacteurs)**.** Calculer le déterminant des matrices suivantes en utilisant la méthode des cofacteurs (formules de Laplace).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 7 & -5 \\ -7 & 0 & -3 & -5 \\ 5 & 9 & -1 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 8 & 2 \\ 7 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Formule de Binet)**.** Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Prouver les propositions suivantes.

1. $\det(A + B^T) = \det(A^T + B)$.
2. Si $A^2 = 0$, alors $\det(A) = 0$.
3. Si $A^2 = A$, alors $\det(A) \geq 0$.
4. $\det(A^T A) \geq 0$.
5. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
6. Si $n = 3$ et A est antisymétrique (i.e. $A^T = -A$), alors $\mathrm{rg}(A) < 3$.
7. Si n est impair et A est antisymétrique, alors $\mathrm{rg}(A) < n$.

Déterminant, bases et rang

Exercice 3 (Dépendance linéaire dans $\mathbb{R}^3$)**.** En utilisant le déterminant, déterminer si le vecteur

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une combinaison linéaire des vecteurs suivants

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Base de l'espace des polynômes)**.** Déterminer pour quelles valeurs de $h \in \mathbb{R}$ l'ensemble des polynômes suivants

$$\mathcal{B} = \{3 - 3x - 6x^2, 1 - x + hx^2, 2 + hx - 4x^2\}$$

constitue une base de $\mathbb{R}_2[x]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2.

Exercice 5 (Automorphismes et déterminant)**.** Soient $\mathcal{V} = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application tel que

$$\varphi_\alpha(e_1) = \alpha e_1 + e_2, \;\; \varphi_\alpha(e_2) = \alpha e_2 - e_1.$$

Montrer que φ_α est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ pour chaque valeur réelle de α.

Matrice inverse et déterminant

Exercice 6 (Comatrices)**.** Soient A, B et C les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \;\; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \;\; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque matrice, calculer la respective comatrice et vérifier la formule :

$$(\mathrm{com}A)^T A = \det(A) \cdot I_n.$$

Exercice 7 (Comatrices et inverses)**.** Soient A et B les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \;\; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque matrice, déterminer les inverses respectives via les comatrices (si possible).

Exercice 8 (Inverse paramétrique)**.** Déterminer pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & -3 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

est inversible. Pour ces valeurs, déterminer l'inverse A_α^{-1}.

Exercice 9 (*Plus compliqué : les matrices napoléoniennes)**.** Calculer le déterminant des matrices suivantes en forme de N ou "napoléoniennes" :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \;\; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, et on considère les *matrices napoléoniennes* $N_n \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ définies par :

$$N_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \epsilon(j,j) + \sum_{j=2}^{n} b_j \epsilon(j,1) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \epsilon(j,n),$$

où les scalaires $a_1, a_2, \ldots, c_{n-1}$ appartiennent à $\mathbb{K}$ et $\{\epsilon(i,j) \,|\, 1 \leq i, j \leq n\}$ est la base canonique de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, donc $\epsilon(i,j)$ est la matrice ayant 1 dans la coordonnée (i,j) et 0 ailleurs.

1. Écrire les matrices et calculer le déterminant de N_n pour $n = 3, 4$.
2. Écrire et prouver une formule générale pour $\det(N_n)$, pour chaque n.
3. **Bonus :** faire exactement la même chose pour les matrices Z_n en forme de Z.