Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 4

10-11 Octobre 2023

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2023/24
Université Paris 8

Valeurs et espaces propres

Exercice 1 (Déterminant d'un endomorphisme)**.** Soient $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réel de degré au plus 3 et $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'application tel que :

$$\varphi(a + bx + cx^2) = -b + ax + cx^2,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Aussi, soient $\mathcal{V} = \{1, x, x^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathcal{V}' = \{1+x, 2x, x^2\}$.

- Montrer que φ est un endomorphisme.
- Déterminer $\mu_{\mathcal{V}}(\varphi)$, la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{V}$.
- Montrer que $\mathcal{V}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
- Déterminer $\mu_{\mathcal{V}'}(\varphi)$, la matrice de φ dans la base $\mathcal{V}'$.
- Calculer $\det(\mu_{\mathcal{V}}(\varphi))$ et $\det(\mu_{\mathcal{V}'}(\varphi))$ pour vérifier que les deux déterminants sont égaux.
- Plus généralement, soient V un espace vectoriel sur un corps K de dimension n, $\mathcal{V}$ une base de V et $\varphi : V \to V$ un endomorphisme de V. Montrer que la définition

$$\det(\varphi) := \det(\mu_{\mathcal{V}}(\varphi))$$

  est cohérente, c'est à dire qu'elle ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{V}$.

Exercice 2 (Valeurs et espaces propres)**.** Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'endomorphisme de l'exercice précédent. Déterminer le polynôme caractéristique de φ, les valeurs propres et les espaces propres respectifs.

Faire la même chose pour les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (Vecteur propre)**.** Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que

$$\varphi(x, y, z, w) = (7x + 2y + 5w, 6x + 3y + 2w, 4x + 2y + 3z, 3w).$$

Déterminer si le vecteur

$$v = (1, -3, 1, 0)$$

est un vecteur propre de φ et, si c'est le cas, déterminer la valeur propre correspondante.

Exercice 4 (Vecteur propre paramétrique)**.** Calculer, si elles existent, les valeurs du paramètre $h \in \mathbb{R}$ telles que le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit un vecteur propre de l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 2z \\ x + y - 2z \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (Intersection d'espaces propres)**.** Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes d'un endomorphisme $\varphi : V \to V$, où V est un espace vectoriel de dimension n sur un corps K. Montrer que les espaces propres E_1 et E_2 associés respectivement à λ_1 et λ_2 ont intersection réduite à $\{0\}$.

Exercice 6 (Matrices diagonales et triangulaires)**.** Déterminer les valeurs propres et les espaces propres respectifs d'une matrice diagonale. Déterminer les valeurs propres d'une matrice triangulaire.

Exercice 7 (Le polynôme caractéristique)**.** Soient $A \in M_n(K)$ une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans un corps K et $\chi_A(x)$ son polynôme caractéristique. Montrer (par récurrence) que :

- $\chi_A(x)$ est un polynôme de degré n.
- Le coefficient de x^n est $(-1)^n$.
- Le coefficient de x^{n-1} est $(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$.

Exercice 8 (L'espace vectoriel des matrices)**.** Soit $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 3×2 à coefficients réels et $\varphi : M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ l'application tel que :

$$\varphi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{12} \\ a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{32} \end{pmatrix},$$

où $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

- Montrer que φ est un endomorphisme.
- Déterminer le polynôme caractéristique de φ, les valeurs propres et les espaces propres respectifs.