Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 5

24-25 Octobre 2023

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2023/24
Université Paris 8

Diagonalisation et triangularisation

Exercice 1 (Multiplicité algébrique et géométrique)**.** Soient $\varphi : V \to V$ un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension n sur un corps K et λ une valeur propre de φ. Prouver l'inégalité

$$1 \leq \dim(\ker(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_V)) \leq m_\lambda(\chi_\varphi(x)).$$

Exercice 2 (Diagonalisation d'une matrice)**.** Soit A la matrice réelle suivante :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(x)$.
- Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.
- Pour chaque valeur propre, déterminer le respectif espace propre.
- Prouver que A est diagonalisable.
- Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$D = P^{-1}AP.$$

Exercice 3 (Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$)**.** Soient $\mathcal{V} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que, en base canonique :

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -x_2 - 2x_3 - x_4 \\ 5x_3 - 2x_4 \\ x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer $\mu_{\mathcal{V}}(\varphi)$, la matrice associée à φ dans la base canonique.
- Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_\varphi(x)$.
- Déterminer les valeurs propres de φ et leurs multiplicités algébriques.
- Pour chaque valeur propre, déterminer le respectif espace propre.

- Prouver que φ est diagonalisable.
- Déterminer une base $\mathcal{V}'$ de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres et la matrice de changement de base $\mu_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$.
- Déterminer la matrice diagonale $\mu_{\mathcal{V}'}(\varphi)$ telle que

$$\mu_{\mathcal{V}'}(\varphi) = (\mu_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}))^{-1}\mu_{\mathcal{V}}(\varphi)\mu_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}).$$

Exercice 4 (Diagonalisation dans l'espace des polynômes)**.** Soient $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2, $\mathcal{V} = \{1, x, x^2\}$ sa base canonique et $\psi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'endomorphisme tel que

$$\psi(p(x)) = p(2) - 2p'(x).$$

- Déterminer la matrice $\mu_{\mathcal{V}}(\psi)$.
- Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(\psi)$ et $\mathrm{Im}(\psi)$.
- Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_\psi(x)$.
- Déterminer les valeurs propres de ψ et leurs multiplicités algébriques.
- Pour chaque valeur propre, déterminer le respectif espace propre.
- Déterminer si ψ est diagonalisable, en justifiant la réponse. Si ψ n'est pas diagonalisable, est-il triangularisable ?

Exercice 5 (Diagonalisation dans l'espace des matrices)**.** Soient M la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels et $\gamma : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'endomorphisme tel que

$$\gamma(X) = 2X + MX.$$

Aussi, soit $\mathcal{V} = \{\epsilon(i,j) \,|\, 1 \leq i,j \leq 2\}$ la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$, où $\epsilon(i,j)$ est la matrice ayant 1 dans la cordonnée (i,j) et 0 ailleurs.

- Déterminer $\mu_{\mathcal{V}}(\gamma)$.
- Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(\gamma)$ et $\mathrm{Im}(\gamma)$.
- Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_\gamma(x)$.
- Déterminer les valeurs propres de γ et leurs multiplicités algébriques.
- Pour chaque valeur propre, déterminer le respectif espace propre.
- Déterminer si γ est diagonalisable. Si c'est le cas, présenter une base de $M_2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres.

Exercice 6 (Diagonalisation paramétrique d'un endomorphisme)**.** Soient $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$, $h \in \mathbb{R}$ et $\varphi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\varphi_h(v_1) = hv_1 + (h-1)v_2 - v_3,$$

$$\varphi_h(v_2) = v_2 + v_3,$$

$$\varphi_h(v_1 + v_2 + v_3) = hv_1 + hv_2 + (h-1)v_3.$$

— Déterminer $\mu_{\mathcal{V}}(\varphi_h)$, la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{V}$.

— Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_{\varphi_h}(x)$.

— Déterminer les valeurs propres de φ_h.

— Déterminer les valeurs réelles de h pour lesquelles l'endomorphisme φ_h est diagonalisable.

Exercice 7 (Un autre endomorphisme paramétrique)**.** Soient $h \in \mathbb{R}$ et $\varphi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme tel que, en base canonique :

$$\varphi_h(x, y, z) = (hx + y + z, x - hy + z, z).$$

Déterminer les valeurs réelles de h pour lesquelles l'endomorphisme φ_h est diagonalisable.

Exercice 8 (Triangularisation)**.** Soit A la matrice réelle suivante

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

— Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(x)$.

— Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.

— Pour chaque valeur propre, déterminer le respectif espace propre.

— Prouver que A est triangularisable mais non diagonalisable.

— Déterminer une matrice triangulaire supérieure T_1 et une matrice inversible P telles que

$$T_1 = P^{-1}AP.$$

— Déterminer une matrice triangulaire inférieure T_2 et une matrice inversible Q telles que

$$T_2 = Q^{-1}AQ.$$