Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 6

7-8 Novembre 2023

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2023/24
Université Paris 8

Orthogonalité

Exercice 1 (Matrice d'un produit scalaire)**.** Soit E un espace euclidien de dimension n sur un corps K et muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Aussi, soient $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de E et Φ la matrice associée au produit scalaire de E dans la base $\mathcal{V}$.

1. Montrer que Φ est symétrique.
2. Montrer que Φ est inversible.
3. Soient $u, v \in E$. Montrer que
$$\langle u, v \rangle = (u_1, \ldots, u_n)\Phi(v_1, \ldots, v_n)^T.$$

Exercice 2 (Produit scalaire dans l'espace des matrices)**.** Soient $E = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ et $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in E$.

— Montrer que
$$\mathrm{Tr}(A^T B) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

— Montrer que l'application
$$\langle A, B \rangle := \mathrm{Tr}(A^T B)$$
est un produit scalaire.

— Soient $n = 2$ et $\mathcal{V} = \{\epsilon(i,j) \,|\, 1 \le i,j \le 2\}$ la base canonique de $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ (donc $\epsilon(i,j)$ est la matrice ayant 1 dans la coordonnée (i,j) et 0 ailleurs). Déterminer la matrice Φ associée au produit scalaire dans la base $\mathcal{V}$.

Exercice 3 (Produit scalaire déterminé par $A^T A$)**.** Soient $E = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ de rang n et $u, v \in E$.

— Montrer que l'application
$$\langle u, v \rangle = (u_1, \ldots, u_n) A^T A \begin{pmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$
est un produit scalaire sur E, où les vecteurs u et v sont écrits en cordonnées dans la base canonique.

— Soient
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$\mathcal{V} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{V}' = \{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_3\}$ une autre base. Déterminer la matrice Φ associée au produit scalaire dans la base canonique et la matrice Φ' associée au produit scalaire dans la base $\mathcal{V}'$.

Exercice 4 (Produit scalaire dans l'espace des polynômes)**.** Soient $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $x_1, \ldots, x_{n+1}$ $n+1$ nombres réels différents.

— Montrer que l'application
$$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} p(x_i) q(x_i)$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

— Soit $n = 2$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$ et $\mathcal{V} = \{1, x, x^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. Déterminer la matrice Φ associé au produit scalaire dans la base $\mathcal{V}$.

— Soit $n = 2$ et
$$\langle x, x \rangle = 25.$$
Sachant que x_1, x_2, x_3 sont des entiers non négatifs, calculer
$$\langle 1 + x, x^2 \rangle.$$

— Soit $n = 5$. Existe-t-il des valeurs réelles différentes $x_1, \ldots, x_6$ telles que les polynômes $p(x) = x$ et $q(x) = x^3$ soient orthogonaux ?

— Plus en général, soient i, j des entiers non négatifs tels que $i, j \leq n$ et $i + j$ soit pair. Existe-t-il des valeurs réelles différentes $x_1, \ldots, x_{n+1}$ telles que les polynômes $p(x) = x^i$ et $q(x) = x^j$ soient orthogonaux ?

Exercice 5 (Orthogonalité dans $\mathbb{R}^3$)**.** Soient
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer un vecteur w orthogonal à u et v et tel que $\langle w, w \rangle = 1$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 (Orthogonalité paramétrique)**.** Soient
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$$
deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la valeur du paramètre réel a telle que u et v soient orthogonaux par rapport au produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 (Orthogonalité dans l'espace des matrices)**.** Soient
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer une matrice $D \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ qui soit orthogonale à A, B, C et telle que $\langle D, D \rangle = 2$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire sur $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ défini dans l'exercice 2.