

# Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 7

14-15 Novembre 2023

Virginio Fratianni

Licence 2 Mathématiques - année 2023/24  
Université Paris 8

Nous allons terminer la feuille de TD 6 et allons passer aux exercices suivants.

## Méthode de Gauss pour les formes quadratiques

**Exercice 1.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que l'application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\varphi(u, v) = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3 - 2(u_1v_2 + u_2v_1) + 2(u_1v_3 + u_3v_1) - (u_2v_3 + u_3v_2)$$

n'est pas un produit scalaire.

**Exercice 2.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que l'application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\varphi(u, v) = 2u_1v_1 + 3u_2v_2 + 2u_3v_3 - 2(u_1v_2 + u_2v_1) - (u_2v_3 + u_3v_2)$$

est un produit scalaire et déterminer la matrice associée dans la base canonique.

**Exercice 3.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que l'application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_1v_3 + u_3v_1)$$

n'est pas un produit scalaire.

\*Plus compliqué : écrire la forme quadratique associée à  $\varphi$  comme combinaison de carrés de formes linéaires.

**Exercice 4** (\*Plus compliqué). Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que l'application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\varphi(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 - u_1v_2 - u_2v_1 - u_2v_3 - u_3v_2 - u_1v_3 - u_3v_1$$

n'est pas un produit scalaire.