

Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 7

14-15 Novembre 2023

Virginio Fratianni

Licence 2 Mathématiques - année 2023/24
Université Paris 8

Nous allons terminer la feuille de TD 6 et allons passer aux exercices suivants.

Méthode de Gauss pour les formes quadratiques

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur \mathbb{R} . Montrer que l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(u, v) = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3 - 2(u_1v_2 + u_2v_1) + 2(u_1v_3 + u_3v_1) - (u_2v_3 + u_3v_2)$$

n'est pas un produit scalaire.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur \mathbb{R} . Montrer que l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(u, v) = 2u_1v_1 + 3u_2v_2 + 2u_3v_3 - 2(u_1v_2 + u_2v_1) - (u_2v_3 + u_3v_2)$$

est un produit scalaire et déterminer la matrice associée dans la base canonique.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur \mathbb{R} . Montrer que l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_1v_3 + u_3v_1)$$

n'est pas un produit scalaire.

*Plus compliqué : écrire la forme quadratique associée à φ comme combinaison de carrés de formes linéaires.

Exercice 4 (*Plus compliqué). Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur \mathbb{R} . Montrer que l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 - u_1v_2 - u_2v_1 - u_2v_3 - u_3v_2 - u_1v_3 - u_3v_1$$

n'est pas un produit scalaire.