Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 8

21-22 Novembre 2023

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2023/24
Université Paris 8

Norme et angle

Exercice 1 (Angles dans $\mathbb{R}^3$)**.** Déterminer la valeur du paramètre réel t telle que l'angle entre les vecteurs u et v (par rapport au produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^3$) soit égal à $\frac{\pi}{3}$, où

$$u = (1, 2, 1), \;\; v = (1, 0, t).$$

Exercice 2 (La norme à partir de l'angle)**.** Soient E un espace euclidien et u, v deux de ses vecteurs. Déterminer la norme de v sachant que

$$\|u\|_\varphi = 2, \;\; \varphi(u, v) = 3, \;\; \theta = \frac{\pi}{6},$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs.

Exercice 3 (Angle aigu dans $\mathbb{R}^3$)**.** Déterminer le vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ de norme 2 qui soit orthogonal aux vecteurs

$$v = (1, 4, 2), \;\; w = (5, 1, 1)$$

et qui forme un angle aigu avec l'axe y (donc, de direction $(0, 1, 0)$).

Exercice 4 (Angle dans l'espace des polynômes)**.** Soient $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $x_1, \ldots, x_{n+1}$ $n+1$ nombres réels différents. Dans la feuille de TD 6 on a montré que l'application

$$\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^{n+1} p(x_i)q(x_i)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

Soit $n = 2$ et

$$\langle x, x \rangle = 25.$$

Sachant que x_1, x_2, x_3 sont des entiers non négatifs, déterminer l'angle entre les polynômes $p(x) = 1 + x$ et $q(x) = x^2$.

Exercice 5 (Angle dans l'espace des matrices)**.** Soient $A, B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'angle entre les deux matrices par rapport au produit scalaire φ introduit dans la feuille de TD 6, donc

$$\varphi(AB) = \mathrm{Tr}(A^T B).$$

Exercice 6 (Angle avec produit scalaire non standard)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire symétrique telle que

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est la matrice associée à φ dans la base canonique.

- Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
- Déterminer l'angle entre les vecteurs en cordonnées dans la base canonique :

$$u = (1, 1, 1), \quad v = (1, 0, 1).$$

Exercice 7 (Relation entre produit scalaire et norme)**.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, φ un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|_\varphi$ la norme induite par φ.

- Montrer que, pour $u, v \in E$, on a la relation suivante

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(\|u + v\|_\varphi^2 - \|u\|_\varphi^2 - \|v\|_\varphi^2).$$

- Déterminer l'angle entre les vecteurs u et v sachant que

$$\|u\|_\varphi = 3, \quad \|v\|_\varphi = 5, \quad \|u + v\|_\varphi = 7.$$

Exercice 8 (Plus compliqué* : loi du parallélogramme et normes non induites par des produits scalaires)**.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, φ un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|_\varphi$ la norme induite par φ.

- Montrer que, pour $u, v \in E$, on a la relation suivante, appelée *loi du parallélogramme*

$$2\|u\|_\varphi^2 + 2\|v\|_\varphi^2 = \|u + v\|_\varphi^2 + \|u - v\|_\varphi^2.$$

  Il convient de souligner que, comme l'a observé John von Neumann, l'inverse est également valable, c'est-à-dire que si une norme respecte la loi du parallélogramme, alors il existe un produit scalaire qui l'induit. La démonstration n'est cependant pas immédiate.

- Prouver qu'il existe des normes qui ne sont pas induites par des produits scalaires. En particulier, soit $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application telle que

$$\|u\| = \max\{|u_1|, \ldots, |u_n|\}.$$

  Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (elle est souvent appelée norme infinie et notée $\|\cdot\|_\infty$) et qu'elle ne peut pas être induite par un produit scalaire.