Algèbre linéaire 2 : pratique - Feuille de TD 9

28-29 Novembre 2023

Virginio Fratianni
Licence 2 Mathématiques - année 2023/24
Université Paris 8

Bases orthogonales et orthonormée

Exercice 1 (Bases de $\mathbb{R}^3$)**.** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Considérer les vecteurs
$$\mathcal{B} = \{(-1,0,1),(1,0,2),(0,1,0)\}.$$

— Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

— Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$ pour obtenir une base orthonormée de E.

— Déterminer les cordonnées du vecteur $v = (2,3,0)$ par rapport a la base orthonormée trouvée.

Exercice 2 (Espace des matrices)**.** Soit $E = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}(A^tB)$. Considérer les vecteurs

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

— Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

— Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$ pour obtenir une base orthogonal de E.

Exercice 3 (Espace des polynômes)**.** Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$, l'espace des polynômes de degré au plus 2 muni du produit scalaire $\varphi(p(x),q(x)) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i)q(x_i)$ avec $(x_1,x_2,x_3) = (-1,0,1)$. Considérer les polynômes

$$\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}.$$

— Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

— Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$ pour obtenir une base orthogonal de E.

Exercice 4 (Méthode de Gauss et procédé de Gram-Schmidt)**.** Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application bilinéaire symétrique telle que

$$\varphi(u,v) = 4u_1v_1 + 2u_2v_2 + 9u_3v_3 - 3(u_2v_3 + u_3v_2).$$

— Montrer que φ est un produit scalaire et déterminer la matrice associée dans la base canonique.

— Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour obtenir une base orthonormée.

Exercice 5 (Base orthogonales avec la méthode de Gauss)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire symétrique telle que

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est la matrice associée à φ dans la base canonique.

— Montrer que φ est un produit scalaire sur E, en utilisant la méthode de Gauss.

Noter que, grâce à la méthode de Gauss, on obtient un changement de coordonnées $v = Ru$ tel que

$$\varphi(u,u) = \varphi(R^{-1}v, R^{-1}v) = (R^{-1}v)^t G(R^{-1}v) = v^t(R^{-1})^t G R^{-1} v$$

est une combinaison de carrés, donc $(R^{-1})^t G R^{-1}$ est une matrice diagonale (ici u et v sont les deux vecteurs colonnes, R est la matrice d'ordre n de changement de cordonnées entre u et v et G est la matrice associée au produit scalaire dans la base de départ). Par conséquent, pour obtenir une base orthogonale de E, il suffit de considérer les colonnes de l'inverse de R.

— En utilisant cette méthode, déterminer une base orthogonale de E.

Sous-espaces orthogonaux

Exercice 6 (Espaces orthogonaux dans $\mathbb{R}^4$)**.** Soit V le sous-espace suivant de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire standard :

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_1 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

— Déterminer la dimension et une base de V.

— Déterminer une base orthogonale de V.

— Déterminer la dimension et une base de $V^\perp$.

Exercice 7 (Espaces des polynômes)**.** Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$, l'espace des polynômes de degré au plus 2 muni du produit scalaire $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i)q(x_i)$ avec $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$. Considérer le sous-ensemble

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,|\, p(0) = 0\}.$$

— Montrer que V est un sous-espace de E.

— Déterminer la dimension et une base de V.

— Déterminer la dimension et une base de $V^\perp$.

Exercice 8 (Compléter une base orthogonale)**.** Soit $E = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^t B)$. Considérer les vecteurs

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit $V = \mathrm{Vect}\{A_1, A_2\}$.

— Déterminer la dimension et une base orthogonal $\mathcal{B}$ de $V^{\perp}$.

— Montrer que

$$\mathcal{B}_1 = \{A_1, A_2\} \cup \mathcal{B}$$

est une base orthogonal de E.

Exercice 9 (Produit scalaire paramétrique)**.** Soient $E = \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$ un paramètre et $\varphi_k : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application bilinéaire symétrique telle que

$$\varphi_k(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + ku_3v_3 + k(u_1v_2 + u_2v_1).$$

— Déterminer les valeurs réelles du paramètre k pour lesquelles φ_k est un produit scalaire et écrire la matrice associée dans la base canonique.

— Soit $k = \frac{1}{2}$. Considérer le sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$V = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}.$$

Déterminer la dimension et une base de $V^{\perp}$ par rapport à $\varphi_{\frac{1}{2}}$.

Exercice 10 (Somme et intersection de sous-espaces orthogonaux)**.** Soient E un espace euclidien de dimension finie muni du produit scalaire φ et V, W deux sous-espaces vectoriels. Prouver les égalités suivantes.

— $(V + W)^{\perp} = V^{\perp} \cap W^{\perp}$.

— $(V \cap W)^{\perp} = V^{\perp} + W^{\perp}$.

— $(V^{\perp} + W^{\perp})^{\perp} = V \cap W$.

— $(V^{\perp} \cap W^{\perp})^{\perp} = V + W$.

Exercice 11 (Isomorphisme entre E et E^*)**.** Soit E un espace euclidien de dimension finie sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$. Montre que l'application $\alpha_\varphi : E \to E^*$ telle que, pour chaque $u \in E$:

$$\begin{aligned} \alpha_\varphi(u) = \varphi_u : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \varphi(u, v) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et E^*.