Université Paris 8
A.A. 2022–2023

Algèbre linéaire 2

Martino Borello

18 novembre 2022

Table des matières

Chapitre 1

Groupes

1.1 Définition et propriétés

Soit G un ensemble. Une application $\star : G \times G \to G$ s'appelle **loi de composition interne**. Une **structure algébrique** (pure) est un ensemble doté d'une ou plusieurs lois de composition internes, satisfaisantes certains propriétés.

Définition 1.1. *Un **groupe** est un couple $(G, \star)$, où G est un ensemble G et $\star : G \times G \to G$ est une loi de composition qui satisfait les propriétés suivantes :*

- *pour tous $a, b, c \in G$,*
$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c),$$
*i.e. la loi est **associative** ;*
- *il existe un **élément neutre** pour la loi de composition, i.e. un élément $e \in G$ tel que, pour tout $a \in G$,*
$$a \star e = e \star a = a;$$
- *tout élément $a \in G$ admet un **élément inverse**, noté a^{-1}, i.e. un élément tel que*
$$a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e.$$

*Si en plus la loi de composition est **commutative**, i.e. si pour tous $a, b \in G$,*
$$a \star b = b \star a,$$
*alors $(G, \star)$ est dit **groupe abélien** (ou commutatif).*

On note le plus souvent un groupe $(G, \star)$ par G en sous-entendant la loi de composition.

Exemple 1.1. *On connaît plusieurs exemples de groupes abéliens :*

a) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$.

b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

c) $(\{-1,+1\},\cdot)$.

d) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$, *pour tout* $n\in\mathbb{N}$. .

e) $(E,+)$, *où* E *est un espace vectoriel.*

Connaît-on des exemples de groupes non abéliens ?

Exercice 1.1. *Montrer que :*
- *dans* $(\mathbb{Z},-)$ *il existe un élément neutre, tout élément admet un inverse, mais la loi de composition n'est pas associative ;*
- *dans* $(2\mathbb{Z},\cdot)$ *(les multiples de* 2*) il n'existe pas d'élément neutre ;*
- $(\mathbb{N},+)$ *et* $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$ *ne sont pas des groupes.*

Exercice 1.2. *Montrer que* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$ *est un groupe si et seulement si* n *est premier.*

Proposition 1.1. *Soit* $(G,\star)$ *un groupe. Alors :*

a) *l'élément neutre est unique ;*

b) *Si* $a\star b=a\star c$*, alors* $b=c$ *;*

c) *Si* $b\star a=c\star a$*, alors* $b=c$ *;*

d) *l'inverse d'un élément est unique ;*

e) *pour tous* $a,b\in G$*, l'inverse de* a^{-1} *est* a *et l'inverse de* $a\star b$ *est* $b^{-1}\star a^{-1}$.

Démonstration. Exercice. □

Soient $(G,\star)$ un groupe, e son élément neutre et a un élément de G. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$a^0 := e;\qquad a^n = a^{n-1}\star a;\qquad a^{-n}=a^{-(n-1)}\star a^{-1}.$$

On a donc définit par récurrence toute puissance a^z avec $z\in\mathbb{Z}$. Les propriétés suivantes valent :

$$a^n\star a^m = a^{n+m}\qquad\text{et}\qquad (a^n)^m = a^{n\cdot m},$$

pour tout $a\in G$ et tous $n,m\in\mathbb{Z}$. Par contre, en général,

$$a^n\star b^n \neq (a\star b)^n,$$

mais si le groupe est abélien l'égalité vaut.

1.2 Sous-groupes

Définition 1.2. *Soit* $(G,\star)$ *un groupe et* H *un sous-ensemble de* G*. On dit que* H *est un* ***sous-groupe*** *de* G *si*
- *pour tous* $a,b\in H$*,* $a\star b\in H$*,, i.e.* H *est* ***stable par la multiplication*** *;*
- *l'élément neutre de* G *est dans* H *;*

- *pour tout élément $a \in H$, l'inverse a^{-1} appartient à H, i.e. H est* ***stable par inversion****.*

On a donc que $(H, \star)$ est un groupe.

Exemple 1.2. *L'ensemble $n\mathbb{Z}$ des multiples d'un entier n est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est de cette forme (exercice).*

L'intersection de sous-groupes est un sous-groupe (exercice). L'union de sous-groupes n'est pas un sous-groupe (donner un contre-exemple).

Définition 1.3. *Soit $(G, \star)$ un groupe et S un sous-ensemble de G. On appelle* ***sous-groupe engendré*** *par S l'intersection de tous les sous-groupes contenant S. On le note $\langle S \rangle$.*

C'est facile de montrer (exercice) que $\langle S \rangle$ est formé par tous les produits possibles des éléments de S ou des leurs inverses. Si $S = \{a\}$, alors $\langle S \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et le sous-groupe est dit **cyclique**.

Définition 1.4. *Soit $(G, \star)$ un groupe. Si G est un ensemble fini de n éléments, on dit que G est un groupe* ***d'ordre*** *n, et on note $|G|$ son ordre (i.e. son cardinal).*

Définition 1.5. *Soit $(G, \star)$ un groupe et $a \in G$. On dit que l'****ordre de*** *a* ***dans*** *G est l'ordre du groupe $\langle a \rangle$, si cela est fini, ou infini, autrement.*

Exemple 1.3.

a) *Dans $(\mathbb{Z}, +)$, l'ordre de 0 est 1 et l'ordre de tout entier non nul est infini.*

b) *Dans $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, l'ordre de -1 est 2.*

c) *Dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ l'ordre de la classe de 2 est 3.*

Théorème 1.1 (Lagrange)**.** *Soient $(G, \star)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G. Alors $|H|$ divise $|G|$. En particulier, l'ordre de tout élément de G divise l'ordre de G.*

Démonstration. On définit une relation $\sim$ sur G comme suit :

$$a \sim b \qquad \text{si} \qquad a \star b^{-1} \in H.$$

Cette relation est une relation d'équivalence (exercice) et, en tant que telle, elle définit une partition de G en classes d'équivalence. La classe d'un élément $a \in G$ est

$$\{b \in G \mid a \sim b\} = \{b \in G \mid a \star b^{-1} \in H\} = \{h \star a \mid h \in H\}$$

et, puisque $h \star a = h' \star a$ implique $h = h'$, toute classe a $|H|$ éléments, de manière que $|G|$ est un multiple de $|H|$. On notera Ha la classe de a. □

1.3 Homomorphismes de groupes

Définition 1.6. *Soient $(G, \star)$ et $(G', \star')$ deux groupes. Une application $f : G \to G'$ telle que, pour tous $a, b \in G$,*

$$f(a \star b) = f(a) \star' f(b),$$

est appelée ***homomorphisme de*** G ***dans*** G'*. Si en plus* f *est bijective, alors* f *est dite* ***isomorphisme****.*

Exemple 1.4. *L'application* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, qui associe à tout nombre réel* r *son exponentiel* e^r*, est un homomorphisme de* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}, \cdot)$*.*
L'application $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \{-1, +1\}$*, définie par* $0 \mapsto +1$ *et* $1 \mapsto -1$*, est un isomorphisme de* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ *dans* $(\{-1, +1\}, \cdot)$*.*

Proposition 1.2. *Soient* $(G, \star)$ *et* $(G', \star')$ *deux groupes,* e *et* e' *leurs éléments neutres respectives, et* $f : G \to G'$ *un homomorphisme.*

a) *On a* $e' = f(e)$*.*

b) *Pour tout* $a \in G$*, l'inverse de* $f(a)$ *est* $f(a^{-1})$*.*

c) *Si* H *est un sous-groupe de* G*, alors* $f(H)$ *est un sous-groupe de* G'*.*

d) *Le noyau de* f*, noté* $Ker(f)$ *et défini par* $Ker(f) := \{a \in G \mid f(a) = e'\}$*, est un sous-groupe de* G*.*

e) *L'homomorphisme* f *est injectif si et seulement si* $Ker(f) = \{e\}$*.*

Démonstration. Exercice. □

1.4 Le groupe symétrique

Définition 1.7. *Pour tout entier* $n > 0$*, l'ensemble de bijections de l'ensemble* $\{1, \ldots, n\}$ *dans lui-même, muni de la loi de composition des applications, est un groupe, qu'on note* $(S_n, \circ)$ *et qu'on appelle* ***groupe symétrique*** *de degré* n*.*

Souvent, pour simplifier la notation, on note le composé par juxtaposition : $\sigma\tau$ signifie $\sigma \circ \tau$ (attention que cette loi n'est pas commutative en général). On sait bien que l'ordre de S_n est $n!$.

Définition 1.8. *On appelle* ***cycle*** *de longueur* $r > 1$ *de* S_n *une permutation* $\sigma \in S_n$ *telle qu'il existe des éléments* $x_1, \ldots, x_r$ *de* $\{1, \ldots, n\}$ *vérifiant* $\sigma(x_1) = x_2, \ldots, \sigma(x_{r-1}) = x_r$ *et* $\sigma(x_r) = x_1$ *et telle que* σ *fixes les autres éléments. La notation usuelle pour un cycle est* $\sigma = (x_1 \ \ldots \ x_r)$*, l'entier* n *sous-entendu. Un cycle de longueur* 2 *est appelé* ***transposition****.*

Notons que la notation pour un cycle n'est pas unique. Par exemple, $(1\ 3\ 5)$ et $(3\ 5\ 1)$ définissent le même cycle $\sigma \in S_5$, i.e. la permutation telle que $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 5$, $\sigma(4) = 4$ et $\sigma(5) = 1$. Il est facile de vérifier que l'ordre d'un cycle de longueur r est r (exercice). On appelle **cycles disjoints** des cycles $(x_1 \ \ldots \ x_r)$ et $(y_1 \ \ldots \ y_s)$ tels que $\{x_1, \ldots, x_r\} \cap \{y_1, \ldots, y_s\} = \varnothing$. Des cycles disjointes cummutent entre eux.

Proposition 1.3. *Toute permutation se décompose en un produit de cycles disjoints, de façon unique à l'ordre des cycles près.*

Démonstration. Voir [JPE]. □

Exercice 1.3. *Écrire tout les éléments de S_4 comme produit de cycles disjoints.*

Proposition 1.4. *Le groupe S_n est engendré par l'ensemble des transpositions (autrement dit, toute permutation est produit de transpositions).*

Démonstration. Voir [JPE]. Un ingrédient important de la preuve, d'un point de vue constructif, est le suivant : on peut montrer par récurrence sur r que

$$(x_1 \ \dots \ x_r) = (x_r \ x_{r-1}) \dots (x_r \ x_2)(x_r \ x_1).$$

□

Exercice 1.4. *Écrire tout les éléments de S_4 comme produit de transpositions.*

Définition 1.9. *La* ***signature*** *d'une permutation est la fonction*

$$\varepsilon : S_n \to \mathbb{Z}, \qquad \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Exemple 1.5. *Le cycle $\sigma = (1 \ 3 \ 2) \in S_3$ a signature*

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{1-3}{2-1} \cdot \frac{2-3}{3-1} \cdot \frac{2-1}{3-2} = 1.$$

Exercice 1.5. *Montrer que toute transposition a signature -1.*

Proposition 1.5. *L'application ε est un homomorphisme du groupe symétrique $(S_n, \circ)$ dans le groupe $(\{-1, +1\}, \cdot)$.*

Démonstration. Voir [JPE]. □

Une conséquence immédiate de ce résultat (la preuve est laissée comme exercice) est le théorème suivant.

Théorème 1.2. *La signature d'une permutation σ dans S_n est égale à $(-1)^r$, où r est le nombre de facteurs d'une décomposition de σ en produit de transpositions. En particulier, si*

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau_1' \tau_2' \dots \tau_{r'}'$$

sont deux décompositions de σ en produit de transpositions, alors r et r' sont de même parité.

Exercice 1.6. *Calculer l'ordre et la signature des permutations (dans S_6) suivantes :*

- $(1 \ 2 \ 5 \ 6 \ 3 \ 4)$ *;*
- $(1 \ 2 \ 3)(4 \ 5)$ *;*
- $(1 \ 2 \ 3)(4 \ 5 \ 6)$ *;*
- $(1 \ 2 \ 3)(3 \ 2 \ 6)(4 \ 5)$.

Exercice 1.7. *Soient i, j deux entiers différents dans $\{1, \ldots, n\}$. Trouver l'inverse de la transposition $(i\ j) \in S_n$. Quel est l'inverse du cycle*

$$(x_1\ \ldots\ x_r) = (x_r\ x_{r-1}) \ldots (x_r\ x_2)(x_r\ x_1)?$$

En déduire que l'inverse de

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8)$$

est

$$(1\ 5\ 4\ 3\ 2)(6\ 8\ 7).$$

On dira qu'une permutation qui se décompose en produit d'un nombre pair (respectivement impair) de transposition est une **permutation paire** (respectivement **impaire**).

Définition 1.10. *Le noyau de l'homomorphisme de signature est un sous-groupe de S_n appelé groupe alterné de degré n et noté A_n.*

Exercice 1.8. *Soit $\tau \in S_n$ une transposition. Montrer que*

$$S_n = A_n \sqcup \{\sigma \circ \tau \mid \sigma \in A_n\},$$

où $\sqcup$ veut dire union disjointe (i.e. l'intersection entre les deux ensembles est vide). En déduire que l'ordre de A_n est $n!/2$.

Chapitre 2

Déterminant

Dans tout ce chapitre K désigne un corps (par exemple $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ mais aussi $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\cdot)$ avec p premier).

2.1 Définition et premières propriétés

Nous savons qu'une matrice 2×2 à coefficients dans K, i.e. une matrice

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(K)$$

est inversible si et seulement si $a\cdot d - b\cdot c \neq 0$. Cette quantité représente le déterminant d'une matrice 2×2. On veut généraliser cette notion à des matrices carrées de taille $n > 2$.

Définition 2.1. *Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice carrée de taille n à coefficients dans K. Le* ***déterminant*** *de M est un élément de K, noté $\det(M)$ ou $|M|$, défini par*

$$\det(M) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\cdot m_{\sigma(1),1}\cdot m_{\sigma(2),2}\cdot\ldots\cdot m_{\sigma(n),n}$$

Exemple 2.1. *Soit*

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est donné par

$$\det(A) = a_1\cdot b_2\cdot c_3 - a_1\cdot b_3\cdot c_2 - a_3\cdot b_2\cdot c_1 - a_2\cdot b_1\cdot c_3 + a_2\cdot b_3\cdot c_1 + a_3\cdot b_1\cdot c_2.$$

Exercice 2.1. *Calculer le déterminant de*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.1. *Une matrice carrée M a le même déterminant que sa transposée M^T.*

Démonstration. Exercice. □

On peut considérer l'application déterminant

$$\det : \mathrm{Mat}_n(K) \to K \qquad M \to \det(M)$$

qui associe à tout matrice son déterminant.

Tout ce qui suit reste vrai en remplaçant "colonne" par "ligne" (cela est une conséquence directe de la Proposition 2.1).

On peut voir det comme une application de l'ensemble de colonnes de la matrice :

$$\det : K^n \times \ldots \times K^n \to K \qquad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det((v_1|\ldots|v_n)).$$

Théorème 2.1. *L'application déterminant satisfait les propriétés suivantes :*

a) *dépend de façon linéaire de chaque colonne de la matrice, i.e.*

$$\det((v_1|\ldots|\lambda v_i + \mu w_i|\ldots|v_n)) =$$

$$= \lambda \cdot \det((v_1|\ldots|v_i|\ldots|v_n)) + \mu \cdot \det((v_1|\ldots|w_i|\ldots|v_n)),$$

*i.e. elle est une **forme n-linéaire** (ou **multilinéaire**) ;*

b) *vaut 0 lorsque deux colonnes sont égales, i.e. elle est une **forme alternée** ;*

c) *vaut 1 pour la matrice identité.*

En plus, elle est l'unique application de $\mathrm{Mat}_n(K)$ dans K avec ces propriétés.

Démonstration. a) et c) sont une conséquence directe de la définition de déterminant. Montrons b) : soient i et j les indices des colonnes égales et $\tau = (i\ j) \in S_n$. Par l'Exercice 1.8,

$$S_n = \bigsqcup_{\alpha \in A_n} \{\alpha, \alpha \circ \tau\}.$$

Donc

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^{n} m_{\sigma(k),k} = \sum_{\alpha \in A_n} (\varepsilon(\alpha) \cdot \prod_{k=1}^{n} m_{\alpha(k),k} + \varepsilon(\alpha \circ \tau) \cdot \prod_{k=1}^{n} m_{\alpha(\tau(k)),k}) =$$

$$= \sum_{\alpha \in A_n} (\prod_{k=1}^{n} m_{\alpha(k),k} - \prod_{k=1}^{n} m_{\alpha(\tau(k)),k})$$

et ce dernier est égal à zéro, car

$$m_{\alpha(k),k} = m_{\alpha(\tau(k)),k}$$

pour tout $k \neq i, j$ et $m_{\alpha(i),i} = m_{\alpha(i),j}$, $m_{\alpha(j),j} = m_{\alpha(j),i}$. Pour l'unicité voir [JPE]. □

Le déterminant satisfait des autres propriétés, qui sont une conséquence de la définition et de la caractérisation du déterminant donnée par le Théorème 2.1 et dont la preuve est laissée par exercice.

Proposition 2.2. *Soient* $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ *et* $\lambda \in K$.

a) *Si une colonne de* A *est nulle alors* $\det(A) = 0$.
b) *Le déterminant de* A *ne change pas lorsqu'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres* (*on utilise souvent cette propriété pour faire apparaître des zéros sur une ligne ou colonne*).
c) *Si les colonnes de* A *sont linéairement dépendantes, alors* $\det(A) = 0$.
d) *Si l'on permute deux colonnes de* A*, le déterminant change de signe* (*mais pas en valeur absolue*).
e) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration. Exercice. □

Exercice 2.2. *Montrer que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 2.3. *Montrer par récurrence que le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure* (*resp. supérieure*) *est égal au produit de ses termes diagonaux, i.e.*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \cdots \cdot a_{n,n}.$$

Exercice 2.4. *Calculer le déterminant de*

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2 Méthodes de calcul des déterminants

2.2.1 Méthode de Sarrus

Le déterminant d'une matrice 3×3 peut être calculé par la **règle de Sarrus** : on sait que, par définition,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$$

$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}$.

On peut représenter ce déterminant par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

Exemple 2.2. *Si on veut calculer le déterminant de*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

on écrit

$$\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
2 & -1 & -2 & 2 & -1 \\
6 & -1 & 1 & 6 & -1 \\
4 & 5 & 3 & 4 & 5 \\
- & - & - & &
\end{array}$$

ce qui donne

$\det(M) = (2) \cdot (-1) \cdot (3) + (-1) \cdot (1) \cdot (4) + (-2) \cdot (6) \cdot (5) - (4) \cdot (-1) \cdot (-2) - (5) \cdot (1) \cdot (2) - (3) \cdot (6) \cdot (-1) = -70$.

Exercice 2.5. *Calculer le déterminant de*

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Méthode du pivot de Gauss

On peut utiliser les propriétés b) et d) de la Proposition 2.2, par rapport aux colonnes ou aux lignes, pour transformer une matrice donnée dans une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure), de manière que son déterminant soit plus facilement calculable (voir l'Exercice 2.3). Cela s'appelle **méthode du pivot de Gauss**.

Exemple 2.3. *Soit*

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

En faisant $L_1 \leftarrow L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$ (ici L_i est la i-ème ligne de M et $A \leftarrow B$ signifie qu'on remplace A par B), on obtient

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ensuite, en faisant $L_1 \leftarrow L_1$, $L_2 \leftarrow L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$, on obtient

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Puisque on n'a utilisé que la propriétés b)*, on a que*

$$\det(M) = \det(M') = \det(M'') = (1) \cdot (-1) \cdot (0) \cdot (-4) = 0.$$

Exercice 2.6. *Obtenir une matrice triangulaire inférieure à partir de la matrice M ci-dessus, en faisant des combinaisons linéaires des colonnes.*

Exercice 2.7. *Montrer que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -10 & 0 \end{vmatrix} = 24.$$

2.2.3 Méthode des cofacteurs (formules de Laplace)

Soit $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$. On désigne par :

- $M_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de M par la suppression de la i-ème ligne et de la j-ème colonne ;
- $\Delta_{i,j}$ le **cofacteur** d'indices i et j dans M, i.e.

$$\Delta_{i,j} := (-1)^{i+j} \det(M_{i,j}).$$

Développement par rapport à la i-ème ligne : le déterminant de M peut être obtenu à partir des éléments de la i-ème ligne comme suit

$$\det(M) = a_{i,1}\Delta_{i,1} + a_{i,2}\Delta_{i,2} + \cdots + a_{i,n}\Delta_{i,n}.$$

Développement par rapport à la j-ème colonne : il s'obtient également à partir des éléments de la j-ème colonne

$$\det(M) = a_{1,j}\Delta_{1,j} + a_{2,j}\Delta_{2,j} + \cdots + a_{n,j}\Delta_{n,j}.$$

Voir [JPE] pour une preuve (par récurrence).

Exercice 2.8. *Montrer que*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Exercice 2.9. *Montrer que*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 25.$$

2.3 Déterminant, bases et rang

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille de n vecteurs de E. On peut définir

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$

comme le déterminant de la matrice carré d'ordre n dont les colonnes sont formées par les coordonnées des v_i dans la base $\mathcal{B}$.

Un résultat important qui concerne les formes multilinéaires alternée est le suivant (voir [JPE, Proposition 4 et 5] pour la preuve).

Proposition 2.3. *Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Pour toute forme n-linéaire et alternée $\varphi : E^n \mapsto K$ on a*

$$\varphi(v_1, \ldots, v_n) = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) \cdot \varphi(e_1, \ldots, e_n).$$

Avec le déterminant on peut caractériser une base.

Proposition 2.4. *Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Une famille $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ est une base de E si et seulement si*

$$\det_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n) \neq 0.$$

Démonstration. Si $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ sont linéairement dépendantes, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n) = 0$$

par la Proposition 2.2. Vice versa, si $\mathcal{B}'$ est une base, la Proposition 2.3 appliquée à la forme $\det_{\mathcal{B}'}$ (et le point c) du Théorème 2.1) nous donne

$$1 = \det_{\mathcal{B}'}(e'_1, \ldots, e'_n) = \det_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n) \cdot \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \ldots, e_n),$$

de manière que $\det_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n) \neq 0$. □

Exemple 2.4. *Montrons pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$, les vecteurs :*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$.
Il suffit de calculer :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & b & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3 - b^3$$

Si $a^3 = -b^3$, i.e. si $a = -b$, alors les 3 vecteurs sont liés. Autrement les 3 vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.10. *Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur à 5 (une base pour cet espace vectoriel est donné par $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$). Montrer que la famille*

$$\mathcal{B}' = \{x^4, 1 + x, x^2 + x^4, 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3, 4 + 3x + 2x^2 + x^3 + x^4\}$$

forme une base pour E.

Exercice 2.11. *Soit $E = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Quelle est une base canonique pour cet espace vectoriel ? Est-ce que la famille*

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

forme une base pour E ?

Le **rang** d'une matrice (pas nécessairement carrée) est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes ou par ses lignes. On peut le calculer en utilisant le résultat suivant.

Proposition 2.5. *Une matrice A est de rang r si et seulement si on peut extraire de A une matrice carrée de taille $r \times r$ et de déterminant non nul et si toute matrice extraite carrée de taille $(r+1) \times (r+1)$ a un déterminant nul.*

Démonstration. Voir [JPE]. □

Exercice 2.12. *Calculer le rang de la matrice à coefficient réels*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

2.4 Matrice inverse

En utilisant le résultat du Théorème 2.1, on peut montrer la proposition suivante.

Proposition 2.6 (Formule de Binet)**.** *Pour tous* $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$,

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Démonstration. Si $\det(A) = 0$, alors ses lignes $a_1, \dots, a_n$ sont linéairement dépendantes (voir section précédente), ce qui donne que les lignes $a_1 B, \dots, a_n B$ de AB sont linéairement dépendantes, de manière que $\det(AB) = 0$. Or, si $\det(A) \neq 0$, l'application

$$f_A : \mathrm{Mat}_n(K) \to K \qquad B \mapsto \det(AB)/\det(A)$$

vérifie les propriétés a), b) et c) du Théorème 2.1. Donc, pour l'unicité, on a $f_A = \det$, ce qui conclu la preuve. □

En particulier, si A est inversible, alors son déterminant est différent de zéro et le déterminant de son inverse est $1/\det(A)$. On a aussi le vice versa, i.e. si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible, comme les résultats suivants montent.

Définition 2.2. *La* ***comatrice*** *d'une matrice* $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ *est une matrice* $\mathrm{com}A \in \mathrm{Mat}_n(K)$, *dont les coefficients sont les cofacteurs de* A, *i.e.*

$$(\mathrm{com}A)_{i,j} := \Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{i,j}$$

où $A_{i,j}$ *est la sous-matrice carrée de taille* $n-1$ *obtenue de* A *en supprimant la* i*-ème ligne et la* j*-ème colonne.*

Théorème 2.2. *Pour toute matrice* $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ *on a*

$$(\mathrm{com}A)^T A = \det(A) \cdot I_n.$$

En particulier, si $\det(A) \neq 0$, *alors*

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot (\mathrm{com}A)^T. \tag{2.1}$$

Démonstration. Exercice. □

Exemple 2.5. *On veut calculer l'inverse de*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

On calcule d'abord son déterminant (avec les formules de Laplace) :

$$\det(M) = 1(6-10) - 2(2-4) - 1(5-6) = -4 + 4 + 1 = 1.$$

Puis on calcule la comatrice :

$$\mathrm{com}M = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -9 & 4 & -1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -9 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.13. *Calculer l'inverse de*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.1. *L'ensemble des matrice inversibles dans* $\mathrm{Mat}_n(K)$ *est un groupe avec la multiplication des matrices. Il est appelé* ***groupe général linéaire*** *et noté* $\mathrm{GL}_n(K)$*. Clairement, il peut être caractérisé comme l'ensemble des matrices dans* $\mathrm{Mat}_n(K)$ *qui ont déterminant non nul.*

2.4.1 Règle de Cramer

La règle de Cramer est un procédé qui permet de trouver la solution d'un système de n équations linéaires à n variables dont le déterminant est non nul. Elle descend directement de la formule (2.1). En effet, si

$$Ax = b$$

avec $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $x, b \in K^n$, alors

$$x = A^{-1}b = \det(A)^{-1} \cdot (\mathrm{com}A)^T b,$$

de manière que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$x_i = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})b_j}{\det(A)}.$$

On peut éventuellement interpréter le numérateur comme un déterminant (on ne va pas l'expliquer dans le cas général) comme montré dans les exemples suivantes.

Exemple 2.6. *Voyons la règle de Cramer appliquée au systèmes avec 2 équations et 2 variables. Si on a les équations*

$$\begin{cases} A_1X + B_1Y = C_1 \\ A_2X + B_2Y = C_2 \end{cases}$$

où

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 \neq 0,$$

alors $X = \frac{D_1}{D}$ *et* $Y = \frac{D_2}{D}$*, où*

$$D_1 = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} = C_1 \cdot B_2 - B_1 \cdot C_2$$

et

$$D_2 = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = A_1 \cdot C_2 - A_2 \cdot C_1.$$

Exercice 2.14. *Résoudre le système suivant avec la règle de Cramer :*

$$\begin{cases} 3X + 2Y = 12 \\ 5X + 2Y = 16 \end{cases}.$$

Exemple 2.7. *Voyons la règle de Cramer appliquée au systèmes avec 3 équations et 3 variables. Si on a les équations*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

où

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

alors les solutions du système sont données par

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Chapitre 3

Diagonalisation et triangularisation

3.1 Valeurs propres et espaces propres

Soit K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Étant donné un endomorphism $f : E \to E$, on est intéressé à trouver une base de E dans laquelle la matrice de f ait une forme simple.

Notation : si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E, on indique avec $\mu_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ (espace de départ) et $\mathcal{B}_2$ (espace d'arrivée). Si la base de l'espace de départ et d'arrivée est la même (disons $\mathcal{B}$), on indique $\mu_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f.

Définition 3.1. *Une **valeur propre** de f (resp. de $A = \mu_{\mathcal{B}}(f)$) est un élément λ de K tel que* $\det(f - \lambda I) = 0$ *(resp.* $\det(A - \lambda I_n) = 0$*), où I est l'endomorphisme identité (resp. I_n est la matrice identité).*

La condition $\det(f - \lambda I) = 0$ équivaut à $f - \lambda I$ non injectif. L'ensemble des valeurs propres de f (resp. de A) s'appelle spectre et il est noté $\mathrm{spec}(f)$ (resp. $\mathrm{spec}(A)$).

Exemple 3.1. *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Pour calculer $\mathrm{spec}(A)$ *il suffit calculer les racines dans* $\mathbb{R}$ *de*

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

Si $\Delta := a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4bc = (a - d)^2 + 4bc \geq 0,$ *alors*

$$\mathrm{spec}(A) = \left\{ \frac{a + d \pm \sqrt{\Delta}}{2} \right\}.$$

Autrement, A n'a pas de valeurs propres.
Dans le cas où $\Delta \geq 0$, quelle est la somme des valeurs propres ? Et leur produit ?

Exercice 3.1. *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -5 & 4 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Montrer que $\mathrm{spec}(A) = \{-1, 1\}$.

Exercice 3.2. *Calculer les valeurs propres de*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ -2 & -6 & -3 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 3.3. *Quelles sont les valeurs propres d'une matrice diagonale ? Et d'une matrice triangulaire ?*

Puisque $f - \lambda I$ n'est pas injectif si λ est une valeur propre, son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

Définition 3.2. *Un* ***vecteur propre*** *de f (resp. de $A = \mu_{\mathcal{B}}(f)$) associé à la valeur propre λ est un vecteur non nul de* $\ker(f - \lambda I)$ *(resp. de* $\ker(A - \lambda I_n)$*). Ce dernier est appelé l'****espace propre*** *de f (resp. de A) associé à λ.*

Exemple 3.2. *Reprenons l'exemple précédent. Soit*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$$

avec $\Delta := (a-d)^2 + 4bc > 0$. Soient λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de A. Soit $i \in \{1, 2\}$. Pour calculer les vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i on doit résoudre le système

$$\begin{bmatrix} a - \lambda_i & b \\ c & d - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en sachant que le déterminant de ce système est nul, par définition. Donc on a qu'une seule équation, par exemple la première

$$(a - \lambda_i)x + by = 0.$$

Ainsi, les vecteurs propres associés à λ_i sont de la forme

$$\begin{bmatrix} -\mu b \\ \mu(a - \lambda_i) \end{bmatrix}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$. Autrement dit, l'espace propre de A associé à λ_i est

$$E_{\lambda_i} = \left\langle \begin{bmatrix} -b \\ a - \lambda_i \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Montrer par exercice que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont effectivement des espaces de dimension 1 (i.e., le générateur n'est pas nul). Que se passe-t-il si $\Delta = 0$?

Exercice 3.4. *Calculer les espaces propres associés aux valeurs propres de la matrice A donnée dans l'Exercice 3.2.*

Exercice 3.5. *Montrer que les espaces propres associés aux valeurs propres de la matrice A donnée dans l'Exercice 3.1 sont respectivement*

$$E_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad et \quad E_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Remarque 3.1. *Les vecteurs propres d'une application linéaire correspondent aux axes privilégiés selon lesquels l'application se comporte comme une dilatation, multipliant les vecteurs par une même constante. Ce rapport de dilatation est la valeur propre.*

Exercice 3.6. *Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes d'un endomorphisme $f : E \to E$. Montrer que les espaces propres E_1 et E_2 associés respectivement à λ_1 et λ_2 ont intersection réduite à $\{0\}$.*

Définition 3.3. *Le* ***polynôme caractéristique*** *de f ou de $A = \mu_{\mathcal{B}}(f)$ est*

$$\chi_f(x) = \chi_A(x) := \det(f - xI) = \det(A - xI) \in K[x].$$

La définition est bien posée, car matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. En effet, si $B = P^{-1}AP$, on a $B - xI_n = P^{-1}(A - xI_n)P$, de manière que

$$\chi_B(x) = \det(B - xI_n) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A - xI_n) \cdot \det(P) = \chi_A(x).$$

Définition 3.4. *On dit que f est* ***diagonalisable*** *s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que $\mu_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale. Une matrice est* ***diagonalisable*** *si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Remarque 3.2. *Un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres.*

Avant de voir une condition pour la diagonalisabilité, on fait de rappels sur les polynômes.

Définition 3.5. *Soit $p(x)$ un polynôme dans $K[x]$ et α une racine de $p(x)$. La* ***multiplicité algébrique*** *de α dans $p(x)$ est définie par*

$$m_\alpha(p(x)) := \max\{t \mid (x - \alpha)^t \text{ divise } p(x)\}.$$

On dit aussi que α est une racine d'ordre $m_\alpha(p(x))$ de $p(x)$.

Lemme 3.1. *Soit f un endomorphisme et λ une valeur propre de f. Alors*

$$\dim\ker(f - \lambda I) \leq m_\lambda(\chi_f(x)).$$

Démonstration. Exercice. □

Définition 3.6. *Un polynôme $p(x)$ dans $K[x]$ est dit* ***scindé*** *s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans K.*

Notons que la dernière définition dépend fortement du corps où on considère les coefficients : par exemple x^2+1 est scindé sur $\mathbb{C}$ (en effet, $x^2+1 = (x+i)(x-i)$), mais pas sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1. *Un endomorphisme $f : E \to E$ (resp. une matrice A) est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

a) *$\chi_f(x)$ (resp. $\chi_A(x)$) est scindé dans $K[x]$;*

b) *la multiplicité algébrique de λ dans $\chi_f(x)$ (resp. dans $\chi_A(x)$) est égale à $\dim\ker(f-\lambda I)$ (resp. $\dim\ker(A-\lambda I)$) pour tout valeur propre λ de f (resp. de A).*

Démonstration. On fait la preuve seulement pour f (la preuve pour A est complètement analogue). Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de f et $E_1, \dots, E_r$ les espaces propres de f associés à ces valeurs.

L'Exercice 3.6 implique facilement (exercice) que leur somme est directe. On a donc

$$E_1 \oplus \dots \oplus E_r \subseteq E. \tag{3.1}$$

Par la Remarque 3.2, f est diagonalisable si et seulement si on a l'égalité dans (3.1), i.e. si et seulement si $\dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_r) = \dim E$. Or,

$$\dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_r) = \dim E_1 + \dots + \dim E_r \leq m_{\lambda_1}(\chi_f(x)) + \dots + m_{\lambda_r}(\chi_f(x)).$$

La somme à droite est égale à $\dim E$ si et seulement si $\chi_f(x)$ est scindé et on a l'égalité entre le deuxième et le troisième terme si et seulement si $\dim E_i = m_{\lambda_i}(\chi_f(x))$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. □

Corollaire 3.1. *Soit E un espace vectoriel sur K de dimension n et f un endomorphisme de E (resp. A une matrice dans $\mathrm{Mat}_n(K)$). Si $\chi_f(x)$ (resp. $\chi_A(x)$) a n racines distinctes deux à deux dans K, alors f (resp. A) est diagonalisable.*

Démonstration. Cela suit du fait que si $\chi_f(x)$ (resp. $\chi_A(x)$), qui est de degré n, a n racines distinctes deux à deux dans K, alors il est forcement scindé, et du fait que

$$1 \leq \dim\ker(f-\lambda I) \leq m_\lambda(\chi_f(x)) = 1,$$

pour toute valeur propre λ, de manière qu'on a l'égalité. □

Exemple 3.3. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, par la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour vérifier si f est diagonalisable, on calcule d'abord son polynôme caractéristique :

$$\chi_f(x) = \chi_A(x) = \begin{vmatrix} -1-x & 2 & -1 \\ -2 & 3-x & -2 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2-x+1).$$

Or, ce polynôme n'est pas scindé, de manière que la matrice n'est pas diagonalisable : la condition a) *du Théorème 3.1 n'est pas vérifiée.*

Exemple 3.4. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, par la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour vérifier si f est diagonalisable, on calcule d'abord son polynôme caractéristique :

$$\chi_f(x) = \chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & 2-x & -1 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix} = x^2(2-x) + 1 + 1 - (2-x) - x - x =$$

$$= x^2(2-x) - x = -x(x^2-2x+1) = -x(x-1)^2,$$

qui est scindé (de manière que la condition a) *est satisfaite) et qui a racines* 0 *et* 1*, avec $m_0(\chi_f(x)) = 1$ et $m_1(\chi_f(x)) = 2$. La dimension de l'espace propre associé à 0 est forcement égale à 1, donc on doit juste vérifier si la dimension de l'espace propre associé à 1 est égale à 1 (dans ce cas, l'endomorphisme ne serait pas diagonalisable) ou 2. Si on veut seulement connaître la dimension de l'espace propre, on peut utiliser le théorème du rang, qui nous dit que*

$$\dim\ker(A-\lambda I) = n - \operatorname{rang}(A-\lambda I).$$

Dans ce cas, $A-I$ a clairement rang 1*, de manière que la dimension de l'espace propre associé à 1 est 2. Donc, la condition* b) *du Théorème 3.1 est satisfaite aussi, de manière que l'endomorphisme f est diagonalisable.*

On veut trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f. L'espace propre associé à 1 est donné par les solutions au système

$$(A-I)v = 0,$$

i.e.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

i.e. les vecteurs tels que $v_1 = v_2 - v_3$. Une base de tel espace est donnée par

$$b^{(1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad et \quad b^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'espace propre associé à 0 *est donné par les solutions au système*

$$Av = 0,$$

i.e.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

i.e. les vecteurs tels que $v_1 = v_2 = v_3$. *Une base de tel espace est donnée par*

$$b^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice de l'endomorphisme f *dans la base* $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ *est donc*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemple 3.5. *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Pour vérifier si A *est diagonalisable, on calcule d'abord son polynôme caractéristique :*

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 0 & 0 \\ -1 & 4-x & 2 \\ 4 & -8 & -4-x \end{vmatrix} = -x^2(x-4),$$

qui est scindé (de manière que la condition a) *est satisfaite) et qui a racines* 0 *et* 4, *avec* $m_0(\chi_A(x)) = 2$ *et* $m_4(\chi_A(x)) = 1$. *La dimension de l'espace propre associé à* 4 *est forcement égale à* 1, *donc on doit juste vérifier si la dimension de l'espace propre associé à* 0 *est égale à* 1 *(dans ce cas, l'endomorphisme ne serait pas diagonalisable) ou* 2. *Si on veut seulement connaître la dimension de l'espace propre, on peut utiliser le théorème du rang, qui nous dit que*

$$\dim \ker A = 3 - \operatorname{rang} A.$$

Dans ce cas, $\det A = 0$ *et les deux premières colonnes sont clairement libres, de manière que* $\operatorname{rang} A = 2$. *Ainsi, la dimension de l'espace propre associé à* 0 *est* 1. *Donc, la condition* b) *du Théorème 3.1 n'est pas satisfaite et donc* A *n'est pas diagonalisable.*

Exercice 3.7. *Montrer que la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

est diagonalisable. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ *formée de vecteurs propres de* A.

Exercice 3.8. *Pour quelles valeurs $k \in \mathbb{R}$ la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

est diagonalisable ?

Exercice 3.9. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme*

$$f(x, y, z) = (x + ay + 3z, 2y + az, 4y + 2az)$$

où $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f est diagonalisable ? Pour $a = 0$, donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

3.2 Triangularisation

Si on ne peut pas diagonaliser un endomorphisme, on souhaite quand même le réduire dans une forme simple.

Définition 3.7. *On dit que f est **triangularisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que $\mu_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire. Une matrice est **triangularisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice triangulaire représentant un endomorphisme f. Alors

$$\chi_f(x) = \det(A - xI) = (a_{1,1} - x) \cdots (a_{n,n} - x)$$

est scindé. En particulier, les valeurs propres de f sont les coefficients de la diagonale de A.

Remarque 3.1. *Rappelons que si $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ est une base telle que $\mu_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure, alors $\mu_{\mathcal{B}'}(f)$, avec $\mathcal{B}' = \{b_n, \ldots, b_1\}$, est triangulaire inférieure. Donc les problèmes de représenter une matrice en forme triangulaire supérieure ou inférieure sont équivalents.*

Théorème 3.2. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme f est triangularisable si et seulement si le polynôme $\chi_f(x)$ est scindé dans $K[x]$.*

Démonstration. On a déjà observé $\Rightarrow$].
Montrons $\Leftarrow$] par récurrence sur n (le cas $n = 1$ est clairement vrai). Soit

$$\chi_f(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$$

la factorisation de $\chi_f(x)$ en polynôme de degré 1 dans $K[x]$ (les valeurs propres ne sont pas nécessairement distinctes). Soit v_1 un vecteur propre associé à λ_1 et soit $\mathcal{B} = \{\lambda_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E (une telle base existe d'après le théorème de la base incomplète). On a

$$A = \mu_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Soit E' l'espace vectoriel avec base $\mathcal{B}' = \{e_2, \dots, e_n\}$ et f' l'endomorphisme tel que

$$A' = \mu_{\mathcal{B}'}(f') = \begin{bmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Le polynôme $\chi'_f(x)$ est scindé : en effet $\chi_f(x) = (x - \lambda_1)\chi'_f(x)$. Puisque $\dim E' = n - 1$, on a, par hypothèse de récurrence, que f' est triangularisable, i.e. il existe une base $\mathcal{B}''\{v_2, \dots, v_n\}$ telle que $\mu_{\mathcal{B}''}(f')$ est triangulaire supérieure. Ainsi, $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base pour laquelle f est triangulaire supérieure. □

En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est triangularisable. On remarque aussi que la forme triangulaire qu'on peut obtenir n'est pas unique.

Exercice 3.10. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, par la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mu_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure.

Définition 3.8. *Un* ***drapeau d'un espace vectoriel*** *E de dimension finie n est une suite finie strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E, commençant par l'espace nul $\{0\}$ et se terminant par l'espace total E :*

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_k = E.$$

Si $k = n$ et $\dim E_i = i$ pour tout i, alors le drapeau est dit ***total*** *ou complet. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que le drapeau est* ***stable*** *par f si chaque $f(E_i) \subseteq E_i$ pour tout i.*

Théorème 3.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est triangularisable si et seulement s'il existe un drapeau total de E stable par f.*

Démonstration. Exercice. □

Exercice 3.11. *Construire une matrice* 2×2 *sur* $\mathbb{R}$ *qui n'est pas triangularisable.*

Exercice 3.12. *Montrer que pour toute valeurs* $k \in \mathbb{R}$ *la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ k-1 & 0 & k \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

est triangularisable mais pas diagonalisable.

3.3 Polynômes et matrices

Soit K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{L}(E) \simeq \mathrm{Mat}_n(K)$ l'espace des endomorphismes de E. On connaît déjà l'évaluation d'un polynôme dans $K[x]$ sur un élément de K : si

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_t x^t \in K[x] \quad \text{et} \quad \beta \in K$$

on a

$$p(\beta) = a_0 + a_1 \beta + \cdots + a_t \beta^t \in K.$$

On peut aussi évaluer un polynôme sur un endomorphisme ou sur une matrice. En effet, on peut faire la somme d'endomorphismes ou de matrices, et si f est un endomorphisme on a $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Donc

$$p(f) = a_0 I + a_1 f + \cdots + a_t f^t \in \mathcal{L}(E)$$

et, si $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_t A^t \in \mathrm{Mat}_n(K).$$

On a un homomorphisme d'anneaux $\varphi_f : K[x] \to \mathcal{L}(E)$ défini par $\varphi_f(x) = f$.

Définition 3.9. *On dit qu'un polynôme* $p(x)$ ***annule*** *un endomorphisme* f *si* $p(f) = 0$*. Un tel polynôme est dit* ***polynôme annulateur*** *de* f*.*

Soit

$$I_f := \{p(x) \mid p(f) = 0\} \subseteq K[x]$$

On a que $I_f = Ker\varphi_f$ est un idéal de $K[x]$.

Proposition 3.1. *Il existe un polynôme* $g(x) \in K[x]$ *qui engendre* I_f*, c'est-à-dire tel que*

$$I_f = \langle g(x) \rangle = \{a(x)g(x) \mid a(x) \in K[x]\}.$$

Si $I_f \neq \{0\}$*, on a que* $g(x)$ *est un polynôme non nul de degré minimal parmi les polynômes de* I_f*.*

Démonstration. Si $I_f \neq \{0\}$, on n'a rien à montrer. Si $I_f \neq \{0\}$, soit $g(x)$ un polynôme non nul de degré minimal parmi les polynômes de I_f. On a $\langle g(x) \rangle = \{a(x)g(x) \mid a(x) \in K[x]\} \subseteq I_f$ par définition d'idéal. Montrons l'autre inclusion. Soit $p(x)$ un polynôme de I_f. On veut montrer que $p(x)$ est un multiple de $g(x)$. Or,

$$p(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

avec soit $r(x) = 0$ soit $\deg r(x) < \deg g(x)$. Mais $r(x) = p(x) - q(x)g(x) \in I_f$, et $g(x)$ est de degré minimal. Ainsi $r(x)$ est forcement nul et $p(x)$ est un multiple de $g(x)$. □

Remarque 3.3. *Cela est un cas particulier d'un fait plus générale : $K[x]$ est un anneau principal, i.e. un anneau où tout idéal est principal, c'est-à-dire engendré par un seul élément.*

Définition 3.10. *Le polynôme unitaire $m_f(x)$ qui engendre l'idéal I_f est appelé* ***polynôme minimal de f****.*

Le polynôme minimal est le polynôme unitaire de degré minimal parmi tous les polynômes annulateurs non nuls de f.

Proposition 3.2. *Soit E un espace vectoriel sur K de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.*

a) *Si f est diagonalisable, alors il existe un polynôme $p(x) \in K[x]$ annulateur de f, scindé et n'ayant que des racines simples.*
b) *S'il existe $p(x) \in K[x]$ tel que $p(f) = 0$, alors $p(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de f.*

Démonstration.

a) Soit $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ une base de vecteurs propres et $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ l'ensemble des valeurs propres distinctes de f. Soit

$$p(x) = (x - \lambda_1) \cdot \cdots \cdot (x - \lambda_k). \tag{3.2}$$

On a

$$p(f) = \varphi_f(p(x)) = \varphi_f(x - \lambda_1) \circ \cdots \circ \varphi_f(x - \lambda_k) = (f - \lambda_1 I) \circ \cdots \circ (f - \lambda_k I)$$

avec le produit à droite commutatif (en effet, φ_f est un homomorphisme et $K[x]$ est commutatif). En évaluant $p(f)$ sur tout vecteur propre, on a que un facteur est nul (celui qui correspond à son valeur propre), de manière que $p(f)(b_i) = 0$ pour tout i. Donc $p(f) = 0$.
b) Soit $p(x) = a_0 + \cdots + a_t x^t$ un annulateur de f, λ une valeur propre de f et v un vecteur propre de f associé à λ. On a

$$0 = p(f)(v) = (a_0 I + \cdots + a_t f^t)(v) = (a_0 + \cdots + a_t \lambda^t)(v) = p(\lambda)(v).$$

Puisque $v \neq 0$, on a $p(\lambda) = 0$.

□

Exercice 3.13. *Soit f diagonalisable et $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ l'ensemble des valeurs propres distinctes de f. Montrer que le polynôme $p(x) = (x - \lambda_1) \cdot \cdots \cdot (x - \lambda_k)$ (voir (3.2)) est le polynôme minimal de f.*

Exercice 3.14. *Quel est le polynôme minimal de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que*

$$\mu_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}),$$

pour une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$?

Théorème 3.4 (Théorème des noyaux)**.** *Soit E un espace vectoriel sur K de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.*

a) *Supposons qu'il existe $p(x) = s(x)t(x) \in K[x]$ annulateur de f, avec $(s(x), t(x)) = 1$. Alors*

$$E = Kers(f) \oplus Kert(f).$$

b) *Supposons qu'il existe $p(x) = p_1(x) \cdot \cdots \cdot p_k(x) \in K[x]$ annulateur de f, avec $(p_i(x), p_j(x)) = 1$ si $i \neq j$. Alors*

$$E = Kerp_1(f) \oplus \cdots \oplus Kerp_k(f).$$

Démonstration. a) Puisque $(s(x), t(x)) = 1$, d'après l'identité de Bezout on sait qu'il existe $u(x), v(x) \in K[x]$ tels que

$$u(x)s(x) + v(x)t(x) = 1.$$

Montrons que $Kers(f) \cap Kert(f) = \{0\}$: si $w \in Kers(f) \cap Kert(f)$, alors

$$w = I(v) = u(f)(s(f)(w)) + v(f)(t(f)(w)) = 0.$$

Montrons que $Kers(f) + Kert(f) = E$: si $w \in E$, alors

$$w = I(w) = \underbrace{u(f)(s(f)(w))}_{w_1} + \underbrace{v(f)(t(f)(w))}_{w_2},$$

et $t(f)(w_1) = s(f)(w_2) = 0$ (exercice). Donc $w_2 \in Kers(f)$ et $w_1 \in Kert(f)$.

b) Exercice.

□

On peut donc montrer une condition suffisante de diagonalisabilité.

Proposition 3.3. *Soit E un espace vectoriel sur K de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si il existe un polynôme $p(x) \in K[x]$ annulateur de f, scindé et n'ayant que des racines simples, alors f est diagonalisable.*

Démonstration. Soit $p(x) = (x - \lambda_1) \cdot \cdots \cdot (x - \lambda_k)$. Puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, on peut appliquer le Théorème des noyaux pour montrer que E est la somme directe des noyaux des endomorphismes $f - \lambda_i I$ (certains pouvant être nuls). Cela implique que f est diagonalisable. □

Donc, pour résumer, on a que

$$f \text{ diagonalisable}$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists p(x) \in K[x] \text{ scindé et n'ayant que des racines simples tel que } p(f) = 0.$$

Définition 3.11. *On appelle* ***projection*** *(ou projecteur) de E tout endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$.*

Si $E = E_1 \oplus E_2$, de manière que tout $u \in E$ s'écrit de façon unique comme $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$, alors $u \mapsto u_1$ et $u \mapsto u_2$ sont deux projections.

Exercice 3.15. *Montrer que toute projection est diagonalisable.*

Exercice 3.16. *Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$, avec $n > 1$, telle que $(A - 2I)^5 = 0$ et $(A - 2I)^2 \neq 0$. A est-elle diagonalisable ?*

Le résultat suivant nous permettra de caractériser ce polynôme scindé et n'ayant que des racines simples.

Exercice 3.17. *Soit $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$,*

$$Q(x) = C_0 + C_1 x + \cdots + C_m x^m \in \mathrm{Mat}_n(K)[x]$$

et

$$P(x) = Q(x)(A - xI).$$

Montrer que $P(A) = 0$.

Théorème 3.5 (Cayley-Hamilton)**.** *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est annulé par son polynôme caractéristique.*

Démonstration. Soit A la matrice de f dans une base quelconque de E et soit

$$Q(x) = (\mathrm{com}(A - xI))^T \in \mathrm{Mat}_n(K)[x].$$

Soit $P(x) = Q(X)(A - xI)$. On sait que

$$P(x) = \det(A - xI)I = \chi_f(x)I$$

et par l'Exercice 3.17 on a

$$0 = P(A) = \chi_f(A)I,$$

de manière que $\chi_f(A) = 0$. □

Exercice 3.18. *Montrer que le polynôme minimal $m_f(x)$ divise le polynôme caractéristique $\chi_f(x)$ pour tout endomorphisme f.*

Remarque 3.4. *En résumant les résultats précédents par rapport au polynôme minimal, étant donné un endomorphisme f tel que $\chi_f(x)$ est scindé, on a la situation suivante : si*

$$\chi_f(x) = (\lambda_1 - x)^{r_1} \cdots (\lambda_k - x)^{r_k},$$

avec $r_i \in \mathbb{Z}$, $r_i \geq 1$, alors

$$m_f(x) = (x - \lambda_1)^{t_1} \cdots (x - \lambda_k)^{t_k}$$

avec $t_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq t_i \leq r_i$.
En particulier $t_1 = \ldots = t_k = 1$ ssi f est diagonalisable.

Exercice 3.19. *Trouver le polynôme minimale de la matrice A de l'Exercice 3.12 pour $k = 1$.*

On peut utiliser le Théorème de Cayley-Hamilton pour calculer l'inverse d'un endomorphisme ou d'une matrice. En effet, soit A une matrice et

$$\chi_A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

son polynôme caractéristique. Puisque $\chi_A(A) = 0$, on a

$$A(a_1 I + a_2 A + \ldots + a_n A^{n-1}) = -a_0 I.$$

Si A est inversible, alors $a_0 = \chi_A(0) = \det A \neq 0$, et

$$A^{-1} = -a_0^{-1}(a_1 I + a_2 A + \ldots + a_n A^{n-1}).$$

Exercice 3.20. *Utiliser cette méthode pour calculer l'inverse de*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Chapitre 4

Orthogonalité

4.1 Produit scalaire

Définition 4.1. *Soient K un corps, E un K-espace vectoriel et*

$$\varphi : E \times E \to K$$

*une application. On dit que φ est **bilinéaire** si pour tous $u, u', v, v' \in E$ et tout $\lambda \in K$:*

- $\varphi(u + u', v) = \varphi(u, v) + \varphi(u', v)$;
- $\varphi(u, v + v') = \varphi(u, v) + \varphi(u, v')$;
- $\varphi(\lambda u, v) = \lambda\varphi(u, v) = \varphi(u, \lambda v)$.

*On dit que φ est **symétrique** si pour tous $u, v \in E$:*

- $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

*Soit $K = \mathbb{R}$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. On dit que φ est **définie positive** si pour tout $u \in E$:*

- $\varphi(u, u) \geq 0$ *et* $\varphi(u, u) = 0$ *ssi* $u = 0$.

Définition 4.2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E est appelée **produit scalaire**. On notera $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs $u, v \in E$.*

*Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalair est appelé **espace euclidien** s'il est de dimension finie et **espace préhilbertien réel** autrement.*

Exemple 4.1. *Soit $E = \mathbb{R}^n$ (muni de sa base canonique). L'application*

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n,$$

pour $u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, est un produit scalaire.

Exemple 4.2. *Soit $E = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. L'application*

$$\langle A, B\rangle = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}b_{i,j} = \mathrm{Tr}(A^TB),$$

pour $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, est un produit scalaire.

Exemple 4.3. *Soient I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $E = \mathrm{Cont}(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. L'application*

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

pour $f, g \in \mathrm{Cont}(I, \mathbb{R})$, est un produit scalaire.

Définition 4.3. *Dans un espace muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, deux vecteurs u et v sont dits orthogonaux si $\langle u, v\rangle = 0$.*

Exercice 4.1. *Donner des exemples de vecteurs, matrices et fonctions continues orthogonaux, en se référant aux produits scalaires définis dans les exemples ci-dessus.*

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. Soient

$$u = \sum_{i=1}^n u_i e_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$$

deux vecteurs de E. Grâce à la bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\langle u, v\rangle = \sum_{1\le i,j\le n} u_i v_j \langle e_i, e_j\rangle$$

En posant $a_{i,j} = \langle e_i, e_j\rangle$ et en tenant compte de la symétrie on a

$$\langle u, v\rangle = \sum_{1\le i\le n} a_{i,i} u_i v_i + \sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}(u_i v_j + u_j v_i)$$

et

$$\langle u, u\rangle = \sum_{1\le i\le n} a_{i,i} u_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j} u_i u_j.$$

On appelle **matrice associée** au produit scalaire de E dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $\Phi = (a_{i,j})$.

Proposition 4.1. *La matrice Φ est symétrique, inversible et*

$$\langle u, v\rangle = (u_1, \dots u_n)\Phi(v_1, \dots, v_n)^T.$$

Démonstration. Exercice. □

Exemple 4.4. *La matrice associée au produit scalaire de l'Exemple 4.1 est l'identité.*

Remarque 4.1. *Dans la définition de produit scalaire on veut que le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même soit positif. Cette propriété ne peut être demandé que sur un corps qui donne un sens à la notion de signe (éventuellement on pourrait donc étendre la définition à ces corps). Cela exclut les corps finis, par exemple. Pourtant, dans certains contextes comme la théorie des codes ou la cryptographie, on parle de produit scalaire sur des espace vectoriels définie sur corps finis, signifiant simplement une forme bilinéaire symétrique telle que sa matrice associée est inversible.*

Soit $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ une autre base de E. Si $\Phi' = (\langle e'_i, e'_j \rangle)$ est la matrice associée au produit scalaire de E dans la base $\mathcal{B}'$, alors

$$\Phi' = P^T \Phi P,$$

où $P = \mu_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(I)$, la matrice de changement de base.

Méthode de Gauss : on va présenter une méthode pour reconnaître si une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$

$$\varphi : (u, v) \mapsto \sum_{1 \le i \le n} a_{i,i} u_i v_i + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j}(u_i v_j + u_j v_i)$$

est un produit scalaire. La seule chose à vérifier est si φ est définie positive. Le problème revient donc à étudier

$$\varphi(u, u) = \sum_{1 \le i \le n} a_{i,i} u_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j} u_i u_j,$$

qui s'appelle **forme quadratique**.
La méthode de Gauss consiste à examiner d'abord si $a_{i,i} > 0$ pour tout i. Si ce n'est pas le cas, alors φ n'est pas définie positive (exercice).
Puis, on écrit séparément les termes où u_1 intervient :

$$a_{1,1} u_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{n} a_{1,j} u_1 u_j = a_{1,1} \underbrace{\left(u_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} u_j \right)}_{f_1(u)}^2 - \frac{1}{a_{1,1}} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1,j} u_j \right)^2 .$$

Ainsi

$$\varphi(u, u) = a_{1,1} f_1(u)^2 + \varphi_1(u, u)$$

où $\varphi_1(u, u)$ est une forme quadratique où u_1 n'apparaît pas. On applique la même méthode avec les termes en u_2 et on recommence jusqu'à ce qu'il ne reste aucun terme. On obtient une décomposition

$$\varphi(u, u) = \alpha_1 f_1(u)^2 + \alpha_2 f_2(u)^2 + \ldots + \alpha_p f_p(u)^2,$$

où apparaissent des carrés de formes linéaires.

Si $p = n$ et $\alpha_i > 0$ pour tout i, alors φ est définie positive, car $\varphi(u, u) = 0$ équivaut aux système triangulaire

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(u) = 0 \\ \vdots \\ f_n(u) = 0 \end{array} \right.$$

qui admet $u = 0$ comme seule solution.

Si $p < n$, le système précédent, il y a des solutions non nulles, donc φ n'est pas définie positive.

Si $p = n$, mais il existe au moins un j tel que $\alpha_j < 0$, alors il existe un vecteur u solution des équations $f_i(u) = 0$, pour $i \neq j$, tel que $f_j(u) \neq 0$, de manière que $\varphi(u, u) < 0$. Ainsi, φ n'est pas définie positive.

Exemple 4.5. *Considérons $n = 3$ et la forme φ définie par*

$$\varphi(u,u) = 2u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2 - 4u_1u_2 + 4u_1u_3 - 2u_2u_3.$$

On a

$$f_1(u) = u_1 - u_2 + u_3$$

et

$$\varphi_1(u,u) = -\frac{1}{2}(-2u_2 + 2u_3)^2 + u_2^2 + 2u_3^2 - 2u_2u_3 = -u_2^2 + 2u_2u_3.$$

Ensuite, on a

$$f_2(u) = u_2 - u_3$$

et

$$\varphi_2(u,u) = u_3^2,$$

de manière que $f_3(u) = u_3$, $\varphi_3(u) = 0$ et

$$\varphi(u,u) = 2(u_1 - u_2 + u_3)^2 - (u_2 - u_3)^2 + u_3^2$$

Dans ce cas, $p = n$, mais $\alpha_2 = -1$. Donc la forme n'est pas définie positive. En effet, si on pose

$$\begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 - u_3 = 1 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

on trouve $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et on a que $\varphi(u,u) = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 0 = -1$.

Exercice 4.2. *Montrer que*

$$\varphi(u,v) = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3 - 2(u_1v_2 + u_2v_1) + 2(u_1v_3 + u_3v_1) - (u_2v_3 + u_3v_2)$$

n'est pas un produit scalaire sur un espace vectoriel de dimension 3.

Exercice 4.3. *Montrer que*

$$\varphi(u,v) = 2u_1v_1 + 3u_2v_2 + 2u_3v_3 - 2(u_1v_2 + u_2v_1) - (u_2v_3 + u_3v_2)$$

est un produit scalaire sur un espace vectoriel de dimension 3.

4.2 Norme et angle

D'abord, on observe que, dans un espace vectoriel E muni de produit scalaire, pour tous $u, v \in E$, $u \neq 0$,

$$v - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u$$

est un vecteur orthogonal a u, de manière que

$$v' = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u$$

est la projection orthogonale de v sur u.

Définition 4.4. *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On appelle* ***norme*** *du vecteur u le scalaire $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.*

Théorème 4.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Pour tous $u, v \in E$ on a*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

et on a l'égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Démonstration. Si $u = 0$, alors le résultat est trivialement vrai.
Supposons donc $u \neq 0$, de manière que $\|u\|^2 > 0$. On a

$$0 \leq \left\| v - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} u \right\|^2 = \frac{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2},$$

d'où l'inégalité cherchée. On a l'égalité si et seulement si v est égale à sa projection orthogonale sur u, i.e. si et seulement si u et v sont colinéaires. □

Proposition 4.2. *La norme $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ définie ci-dessus a les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $u \in E$, on a $\|u\| \geq 0$ et $\|u\| = 0$ ssi $u = 0$;*
- *Pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$;*
- *Pour tous $u, v \in E$, on a $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (**inégalité triangulaire**) et on a l'égalité ssi u, v sont colinéaires.*

Démonstration. Le deux premières propriétés sont faciles à vérifier (exercice). L'inégalité triangulaire suit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

□

Remarque 4.2. *On appelle norme une fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ avec ces propriétés. Si la norme provient d'un produit scalaire, on a une relation entre les deux :*

$$\langle u, v\rangle := \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right),$$

pour $u, v \in E$.

Théorème 4.2 (Théorème di Pythagore)**.** *Deux vecteurs u, v dans E sont orthogonaux si et seulement si*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Démonstration. Cela résulte de $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$. □

À partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

pour tous $u, v \in E$ non nuls. Donc, la définition suivante est possibile.

Définition 4.5. *Dans un espace muni d'un produit scalaire, on définit l'**angle** (non orienté) de deux vecteurs non nuls comme le nombre réel θ de $[0,\pi]$ tel que*

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

Exercice 4.4. *Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 2, muni du produit scalaire $\langle p(x),q(x)\rangle := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$. Calculer l'angle entre $p(x) := x^2 - 3x$ et $q(x) := x + 5$.*

4.3 Bases orthogonales et orthonormée

Définition 4.6. *Dans un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire, une famille de vecteurs $\{e_1,\dots,e_k\}$ est dite **orthogonale** si $\langle e_i,e_j\rangle = 0$ pour tous i,j, $i \neq j$.*

Proposition 4.3. *Une famille orthogonale de vecteurs non nuls $\{e_1,\dots,e_k\}$ est une famille libre.*

Démonstration. Supposons qu'on ait $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k = 0$. Pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$ on a

$$0 = \langle e_i, \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k\rangle = \lambda_i \|e_i\|^2,$$

de manière que $\lambda_i = 0$. □

Exercice 4.5. *Montrer que, pour tout entier positif n, les fonctions $c_k : x \mapsto \cos(kx)$, pour $k \in \{0,\dots,n\}$, et $s_k : x \mapsto \sin(kx)$, pour $k \in \{1,\dots,n\}$, forment une famille libre de $\mathrm{Cont}([0,2\pi],\mathbb{R})$.*

Définition 4.7. *Une base d'un espace euclidien est dite **orthogonale** si elle est une famille orthogonale. Une base est dite **orthonormée** si elle est orthogonale et la norme de tous ses éléments est 1.*

On exprime souvent cette dernière condition de la manière suivante : $\mathcal{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ est une base orthonormée d'un espace euclidien de dimension n si $\langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) pour tous $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

On peut toujours réduire une base orthogonale à une base orthonormée en divisant chaque vecteurs pour sa norme.

Les bases orthonormées sont particulièrement intéressantes parce que la norme, le produit scalaire et sa matrice associée ont une forme simple dans ces bases (exercice).

Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Cette méthode permet de construire une base orthogonale d'un espace euclidien à partir d'une base quelconque. Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E. Le procédé suit les pas suivantes :

1. $\varepsilon_1 := e_1$.

2. $\varepsilon_2 := e_2 - \dfrac{\langle e_2, \varepsilon_1\rangle}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1.$
3. $\varepsilon_3 := e_3 - \dfrac{\langle e_3, \varepsilon_1\rangle}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1 - \dfrac{\langle e_3, \varepsilon_2\rangle}{\|\varepsilon_2\|^2}\varepsilon_2.$

$\vdots$

n. $\varepsilon_n := e_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle e_n, \varepsilon_i\rangle}{\|\varepsilon_i\|^2}\varepsilon_i.$

Notons que $\langle \varepsilon_2, \varepsilon_1\rangle = 0$ (exercice : illustrer ce fait avec un dessin). Supposons que la famille $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}\}$ soit orthogonale et montrons que $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ l'est aussi. Cela revient à monter que, pour $j < k$, on a

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_k, \varepsilon_j\rangle &= \langle e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle e_k, \varepsilon_i\rangle}{\|\varepsilon_i\|^2}\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \langle e_k, \varepsilon_j\rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle e_k, \varepsilon_i\rangle}{\|\varepsilon_i\|^2}\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \\ &= \langle e_k, \varepsilon_j\rangle - \sum_{i=1}^{k-1}\langle e_k, \varepsilon_i\rangle\delta_{ij} = \langle e_k, \varepsilon_j\rangle - \langle e_k, \varepsilon_j\rangle = 0.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}' = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ est une base orthogonale par récurrence. Notons aussi que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, par construction.

Exemple 4.6. *Soit $E = \mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, muni du produit scalaire $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Une base pour cette espace est $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, qui n'est pas orthogonale. On utilise le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthogonale à partir de $\mathcal{B}$.*

1. $\varepsilon_1 := 1.$

2. $\varepsilon_2 := x - \dfrac{\int_0^1 t dt}{\int_0^1 1 dt} = x - \dfrac{1}{2}.$

3. $\varepsilon_3 := x^2 - \dfrac{\int_0^1 t^2 dt}{\int_0^1 1 dt} - \dfrac{\int_0^1 t^2\left(t - \frac{1}{2}\right)dt}{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = x^2 - x + \dfrac{1}{6}.$

Ainsi, $\mathcal{B}' = \left\{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}\right\}$ est une base orthogonale de l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire indiqué.

Exercice 4.6. *Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base*

$$\mathcal{B} := \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

de l'espace euclidien $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$.

4.4 Sous-espaces orthogonales

Soit E un espace euclidien et soit F un sous-espace de E. L'ensemble

$$F^\perp = \{v \in E \mid \langle v, f\rangle = 0, \ \forall f \in F\}$$

est un sous-espace de E (exercice) qui s'appelle **sous-espace orthogonale** à F. On peut définir également le sous-espace orthogonale à un partie A de E comme $(\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$. On vérifie facilement que $(\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k))^{\perp} = \{v \in E \mid \langle v, f_i \rangle = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}\}$

Proposition 4.4. *Soit E un espace euclidien et F un sous-espace de E. On a*

1. $E = F \oplus F^{\perp}$ *;*
2. $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$ *;*
3. *si F' un sous-espace vectoriel de E tel que $F' \subseteq F$, alors $F^{\perp} \subseteq (F')^{\perp}$;*
4. $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Démonstration.

1. Soit $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ une base orthonormée de E telle que $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ est une base de F (exercice : montrer qu'une telle base existe). Soit F' le sous-espace engendré par $\{\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n\}$. On doit juste montrer que $F^{\perp} \subseteq F'$ (le reste est trivial). Soit $u = u_1\varepsilon_1 + \ldots + u_n\varepsilon_n \in F^{\perp}$. On a $u_i = \langle u, \varepsilon_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$. Ainsi $u \in F'$.
2. C'est une conséquence directe de 1..
3. C'est une conséquence directe de la définition.
4. On a facilement que $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$. L'égalité suit de la propriété suivante :

$$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E = \dim F^{\perp} + \dim(F^{\perp})^{\perp},$$

de manière que $\dim F = \dim(F^{\perp})^{\perp}$.

□

Remarque 4.3. *Les trois dernières propriétés sont vraies (exercice) pour des formes bilinéaires symétriques avec matrice associée inversible, sur n'importe quel corps (fini aussi).*

Soit E un espace euclidien et soit u un vecteur non nul de E. Notons $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ le produit scalaire. Pour $u \in E$, l'application

$$\varphi_u : v \mapsto \varphi(u, v)$$

est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Elle appartient donc à l'espace E^*, **dual** de E (l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$).

Exercice 4.7. *Montrer que l'application $u \mapsto \varphi_u$ est un isomorphisme d'espace vectoriels entre E et E^*.*

Exercice 4.8. *Montrer que, pour tout sous-espace F de E,*

$$F^{\perp} = \bigcap_{u \in F} Ker \varphi_u$$

(qui est l'intersection des hyperplans orthogonaux aux vecteurs de F).

Exercice 4.9. *Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$, muni avec le produit scalaire standard, engendré par $(1, 2, 3, 4)$ et $(1, -2, 1, -2)$. Déterminer une base de $F^{\perp}$.*

Exercice 4.10. *Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2 muni du produit scalaire*

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t.$$

Soit F le sous-espace engendré par x^2-1 et $x+3$. Déterminer $F^\perp$.

4.5 Transformations orthogonales

Soient E et E' deux espaces euclidiens avec produit scalaire φ_E et $\varphi_{E'}$ respectivement. Appelons $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_{E'}$ les normes associées à ces produits scalaires.

Proposition 4.5. *Soit $f : E \to E'$ une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tous $u, v \in E$, on a $\varphi_{E'}(f(u), f(v)) = \varphi_E(u, v)$;*
2. *pour tout $u \in E$, on a $\|f(u)\|_{E'} = \|u\|_E$.*

Démonstration. Exercice. □

Définition 4.8. *Une application linéaire $f : E \to E'$ qui vérifie l'une des conditions ci-dessus est dite* ***transformation orthogonale****.*

L'ensemble des transformations orthogonales de E dans lui-même et la compositions des applications forment un groupe (exercice) appelé **groupe orthogonale** de E et noté $\mathrm{O}(E)$.

Proposition 4.6. *Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $f : E \to E$ une application linéaire. On pose $A = \mu_{\mathcal{B}}(f)$. Alors f est une transformation orthogonale si et seulement si*

$$A^T A = AA^T = I.$$

Démonstration. Exercice. □

Une matrice carrée A telle que $A^T A = I$ est appelée **matrice orthogonale**.

Exercice 4.11. *Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales (pour tout $\theta \in \mathbb{R}$) :*

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad et \quad D = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire standard. Quelle est la norme de

$$(3\cos\theta - 4\sin\theta, 3\sin\theta + 4\cos\theta)$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$?

4.6 Endomorphisme adjoint et autoadjoint

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme, noté f^*, appelé **adjoint** de f, tel que pour tous $u, v \in E$, on ait :

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f^*(v)\rangle.$$

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, $\mu_{\mathcal{B}}(f^*) = (\mu_{\mathcal{B}}(f))^T$.

Définition 4.9. *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit **autoadjoint** ou **symétrique** si, pour tous $u, v \in E$, on a*

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle,$$

i.e. si $f^* = f$.

Un endomorphisme est autoadjoint ssi $(\mu_{\mathcal{B}}(f)) = (\mu_{\mathcal{B}}(f))^T$ ($\mathcal{B}$ base orthonormée), i.e. ssi sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Théorème 4.3 (Théorème spectral en dimension finie)**.** *Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien est diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont toutes réelles.*

Exercice 4.12. *Soient $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire standard, et $\mathcal{B}$ sa base canonique. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que*

$$\mu_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

est diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{R}$.
Quel est le polynôme minimal de f pour $k = 0$?
Question difficile : en sachant que $k + 1$ est une valeur propre pour f, montrer que le polynôme minimal de f est de degré 2 si et seulement si $k = 0$.

Exercice 4.13. *Soit A une matrice symétrique réelle telle que $A^n = I$ pour un certain entier $n \geq 3$. Montrer que $A^2 = I$.*

Bibliographie

[JPE] Jean-Pierre Escofier. *Toute l'algèbre de la licence*. 2006.