Algèbre 3 | 2018–2019
Prof. M. Borello | Université Paris 8

CONTRÔLE CONTINU N° 2 - A

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

Barème : Ex1-5 points, Ex2-15 points.

Répondre aux questions en justifiant la réponse. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. *Soit A une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$.*

a) *Montrer que si $A^3 - A^2 + A - I = 0$, alors $A = I$.*

b) *Montrer que si $(A^2 + A + I)(A^2 - I) = 0$ et $A \neq I$, alors A n'est pas une matrice associée à un produit scalaire.*

NOM Prénom : .... Numéro d'étudiant : ....

Exercice 2. *Soit* $E = \mathbb{R}^3$ *et, pour* $\alpha \in \mathbb{R}$, *soit* φ_α *la forme bilinéaire symetrique telle que, pour tout* $u = (x, y, z)^T \in E$,

$$\varphi_\alpha(u, u) = x^2 + 2xy - 2xz + 2y^2 - 4yz + z^2 + \alpha z^2.$$

a) *Montrer que* φ_α *est un produit scalaire si et seulement si* $\alpha > 1$.

b) *Pour* $\alpha > 1$, *montrer que* $v_1 = (1, 0, 0)^T$ *et* $v_2 = (1, 0, 1)^T$ *sont orthogonaux par rapport aux produit scalaire* φ_α.

c) *Soit* $F = \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\})$. *Déterminer une base de* $F^\perp$, *par rapport au produit scalaire* φ_α, *avec* $\alpha > 1$.

d) *Soit* $\alpha = 2$. *Trouver une base orthonormée* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *de* E, *par rapport au produit scalaire* φ_2.

e) *Montrer que*

$$A = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}$$

est une matrice orthogonale.

f) *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $\mu_{\mathcal{B}}(f) = A$. *Montrer que* $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ *est une base orthonormée de* E *par rapport au produit scalaire* φ_2.

NOM Prénom : .... Numéro d'étudiant : ....

NOM Prénom : .... Numéro d'étudiant : ....