CONTRÔLE CONTINU N° 2 - B

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

Barême : Ex1-5 points, Ex2-15 points.

Répondre aux questions en justifiant la réponse. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. *Soit A une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$.*

a) *Montrer que si $A^3 - A^2 + A - I = 0$, alors $A = I$.*

b) *Montrer que si $(A^2 - I)(A^2 + A + 2I) = 0$ et $A \neq I$, alors A n'est pas une matrice associée à un produit scalaire.*

NOM Prénom : .... Numéro d'étudiant : ....

Exercice 2. *Soit $E = \mathbb{R}^3$ et, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit φ_α la forme bilinéaire symetrique telle que, pour tout $u = (x, y, z)^T \in E$,*

$$\varphi_\alpha(u, u) = x^2 - 2xy + 2xz + 2y^2 - 4yz + \alpha z^2.$$

a) *Montrer que φ_α est un produit scalaire si et seulement si $\alpha > 2$.*

b) *Pour $\alpha > 2$, montrer que $v_1 = (1, 0, 0)^T$ et $v_2 = (1, 0, -1)^T$ sont orthogonaux par rapport aux produit scalaire φ_α.*

c) *Soit $F = \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\})$. Déterminer une base de $F^\perp$, par rapport au produit scalaire φ_α, avec $\alpha > 2$.*

d) *Soit $\alpha = 3$. Trouver une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de E, par rapport au produit scalaire φ_3.*

e) *Montrer que*

$$A = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 0 & -2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

est une matrice orthogonale.

f) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mu_{\mathcal{B}}(f) = A$. Montrer que $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est une base orthonormée de E par rapport au produit scalaire φ_3.*

NOM Prénom : .... Numéro d'étudiant : ....

NOM Prénom : .... Numéro d'étudiant : ....