

Exercices Coefficients Binomiaux

Exercice 1 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$ on a

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire que

$$\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Exercice 2 :

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p + q$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Exercice 3 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Exercice 4 :

Si 10 tableaux noirs doivent être affectés à 4 écoles, de combien de manières peut-on les répartir ? Qu'en est-il si chaque école doit recevoir au moins un tableau ?