# CONTRÔLE CONTINUE N° 1

NOM Prénom : ..........................................................................................

Numéro d'étudiant : ..................................................................................

Barême : Ex1-7 points, Ex2-4 points, Ex3-7 points, Ex4-2 points.

**Exercice 1.** *On emploie les six chiffres* $2, 3, 5, 6, 7$ *et* $9$*, en supposant qu'il n'y a pas de répétition.*

a) *Combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?*
Il s'agit du nombre d'arrangements de 3 éléments d'un ensemble à 6 éléments, i.e. $[6]_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

b) *Combien de ces nombres sont inférieurs ou égaux à 400 ?*
Il s'agit du nombre d'arrangements de 3 éléments d'un ensemble à 6 éléments tels que le premier chiffre est 2 ou 3, i.e. $2 \cdot [5]_2 = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$.

c) *Combien de ces nombres sont pairs ?*
Il s'agit du nombre d'arrangements de 3 éléments d'un ensemble à 6 éléments tels que le troisième chiffre est 2 ou 6, i.e. $2 \cdot [5]_2 = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$.

d) *Combien de ces nombres sont inférieurs à 400 et pairs ?*
Si le premier chiffre est 2, on a forcement que le troisième est 6, tandis que si le premier chiffre est 3 on a 2 possibilités pour le troisième. En total, on a $1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 4 = 12$ nombres.

e) *Combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ou pairs ?*
Il s'agit de l'union de deux ensembles dont on a déjà calculé la cardinalité. Donc, pour la formule de Poisson, on a $40 + 40 - 12 = 68$ nombres.

**Exercice 2.** *Soient $A$ et $B$ deux ensembles finis et $\varphi : A \to B$ une application. Pour tout $b \in B$, on note $\varphi^{-1}(b) := \{a \in A \mid \varphi(a) = b\}$. Montrer que*

$$\#A = \sum_{b \in B} \#(\varphi^{-1}(b)),$$

*où, dans la somme à droite, on ne considère pas deux fois le même sous-ensemble.*

Par définition d'application, on a

$$A = \bigcup_{b \in B} \varphi^{-1}(b) \qquad \text{et} \qquad \varphi^{-1}(b) \cap \varphi^{-1}(b') = \emptyset \text{ si } b \neq b'.$$

En effet, tout élément $a \in A$ a une image $b \in B$, de manière que $a \in \varphi^{-1}(b)$. De plus, tout élément $a \in A$ a une seule image. Si, par l'absurde $\exists a \in \varphi^{-1}(b) \cap \varphi^{-1}(b')$, avec $b \neq b'$, on aurait deux images pour $a$.

Par le principe d'addition on a donc que

$$\#A = \sum_{b \in B} \#(\varphi^{-1}(b)),$$

où, dans la somme à droite, on ne considère pas deux fois le même sous-ensemble.

NOM Prénom : ....................................................................................

Numéro d'étudiant : ..........................................................................

**Exercice 3.** *50 personnes ont participé à une loterie pour laquelle 5 lots différents sont proposés.*

a) *Si le tirage au sort donne une liste ordonnée de 5 gagnants sans répétition possible, c'est-à-dire que les tirages des gagnants se font sans remise (on ne peut gagner deux lots ou plus), combien y-a-t-il de listes ordonnées possibles de gagnants ?*
Il s'agit du nombre d'arrangements de 5 éléments d'un ensemble à 50, i.e. $[50]_5 = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46$.

b) *Si le tirage au sort donne une liste ordonnée de gagnants et on peut gagner plusieurs lots, c'est-à-dire que les tirages des gagnants se font avec remise, combien y-a-t-il de listes ordonnées possibles de gagnants ?*
Il s'agit du nombre d'applications d'un ensemble à 50 éléments sur un ensemble à 5 éléments, i.e. $50^5 = 50 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 50$.

c) *Si chaque personne peut gagner au plus 1 lot, combien y-a-t-il des listes (non ordonnées) de gagnants ?*
Il s'agit du nombre de sous-ensemble de 5 éléments d'un ensemble de 50 éléments, i.e. $\binom{50}{5} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$.

d) *Si chaque personne peut gagner au plus 1 lot et on sait que Monsieur Iks, l'une des 50 personnes, n'a pas gagné, combien y-a-t-il des listes (non ordonnées) de gagnants ?*
Il s'agit du nombre de sous-ensemble de 5 éléments d'un ensemble de 49 éléments, i.e. $\binom{49}{5} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$.

e) *On sait en plus qu'il y a 35 femmes et 15 hommes. Si chaque personne peut gagner au plus 1 lot et on sait que Monsieur Iks, l'une des 50 personnes, n'a pas gagné et que seulement 2 femmes ont gagné un lot, combien y-a-t-il des listes (non ordonnées) de gagnants ?*
Par le principe de multiplication, il s'agit du produit du nombre de sous-ensemble de 2 éléments d'un ensemble de 35 éléments fois le nombre de sous-ensemble de 3 éléments d'un ensemble de 14 éléments, i.e. $\binom{35}{2} \cdot \binom{14}{3} = \frac{35 \cdot 34}{2 \cdot 1} \cdot \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1}$.

**Exercice 4.** *En utilisant la formule de Pascal itérée, monter que*
$$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)^2.$$

On sait, par la formule de Pascal itérée, que
$$\sum_{k=1}^{m} \binom{k}{3} = \binom{m+1}{4} = \frac{(m+1)\cdot m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{24}.$$

De plus,
$$\binom{k}{3} = \frac{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)}{6} = \frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k.$$

Par le cours, on sait que
$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{(m+1)\cdot m}{2}$$

et
$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{(m+1)\cdot m\cdot(2m+1)}{6}.$$

Ainsi,
$$\sum_{k=1}^{m} k^3 = 6\cdot\left(\frac{(m+1)\cdot m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{24} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} k^2 - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{m} k\right) =$$
$$= \frac{(m+1)\cdot m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{4} + \frac{(m+1)\cdot m\cdot(2m+1)}{2} - (m+1)\cdot m =$$
$$= \frac{(m+1)\cdot m}{4}\cdot((m-1)\cdot(m-2)+4m+2-4) =$$
$$= \frac{(m+1)^2\cdot m^2}{4} = \left(\frac{(m+1)\cdot m}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)^2.$$