CONTRÔLE CONTINUE N° 2 – A

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

Barême : Ex1-5 points, Ex2-10 points, Ex3-5 points.

TOUTE RÉPONSE DOIT ÊTRE JUSTIFIÉE

LES DOCUMENTS SONT AUTORISÉS

CALCULATRICE ET TELEPHONES PORTABLES NON AUTORISÉS

Exercice 1. *Soit* $\mathcal{E} := \{n = \sum_{i=0}^{3} n_i \cdot 10^i \mid n_i \in \{1, 2, 3, 4\}\} = \{1111,\ 1112,\ 1113,\ 1114,\ \ldots,\ 4441,\ 4442, 4443, 4444\} \subseteq \mathbb{N}$.

a) *Calculer* $\#\mathcal{E}$.
$\#\mathcal{E} = \#\{1, 2, 3, 4\}^4 = 4^4 = 256$.

b) *Soit* $\mathcal{I} := \{n \in \mathcal{E} \mid n \textit{ est impair}\} \subseteq \mathcal{E}$. *Calculer* $\#\mathcal{I}$.
Il faut que le dernier chiffre soit 1 ou 3.
Donc $\#\mathcal{I} = \#(\{1, 2, 3, 4\}^3 \times \{1, 3\}) = 4^3 \cdot 2 = 128$.

c) *Soit* $\mathcal{A} := \{n = \sum_{i=0}^{3} n_i \cdot 10^i \in \mathcal{E} \mid n_i \neq n_j \textit{ si } i \neq j\} \subseteq \mathcal{E}$. *Calculer* $\#\mathcal{A}$.
Il s'agit du nombre d'arrangements des quatre chiffres $1, 2, 3$ et 4.
Donc $\#\mathcal{A} = 4! = 24$.

d) *Calculer* $\#(\mathcal{I} \cup \mathcal{A})$.
On a, comme ci-dessus, que $\#(\mathcal{I} \cap \mathcal{A}) = 2 \cdot [3]_3 = 12$.
Donc $\#(\mathcal{I} \cup \mathcal{A}) = \#\mathcal{I} + \#\mathcal{A} - \#(\mathcal{I} \cap \mathcal{A}) = 140$.

e) *Soit* $\mathcal{D} := \{n = \sum_{i=0}^{3} n_i \cdot 10^i \in \mathcal{A} \mid n_i \neq i + 1\}$. *Calculer* $\#\mathcal{D}$.
Il s'agit du nombre de dérangements des quatres chiffres $1, 2, 3$ et 4.
Donc $\#\mathcal{D} = 4! \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 12 - 4 + 1 = 9$.

Exercice 2. *Dans une pizzeria il y a* 30 *personnes. Le menu propose* 10 *pizzas,* 3 *desserts et* 5 *boissons différentes. Il y a* 2 *serveurs qui servent* 15 *personnes chacun. On peut penser aux personnes comme numérotées de* 1 *à* 30*. Supposons que le premier serveur va servir les personnes de* 1 *à* 15 *et le deuxième de* 16 *à* 30*.* ***Toutes les questions qui suivent ont les hypothèses ci-dessus et elles sont indépendantes les unes des autres.***

a) *Combien de menus différents avec* 1 *pizza,* 1 *dessert et* 1 *boisson peut-on composer ?*
On a $10 \cdot 3 \cdot 5 = 150$ menus possibles.

b) *Quel est le nombre d'ordres possibles dont les* 2 *serveurs vont servir les* 30 *personnes ?*
Pour chaque serveur on a $15!$ ordres possibles, donc $(15!)^2$ ordres en total.

c) *Il y a une personne qui veut prendre* 2 *pizzas différentes et* 3 *boissons différentes. Combien de possibilités va-t-il avoir ?*
Il a $\binom{10}{2} \cdot \binom{5}{3} = 45 \cdot 10 = 450$ possibilités.

d) *Supposons qu'il y a* 5 *tables pour* 4 *personnes chacune et* 5 *tables pour* 2 *personnes chacune. Combien de rangements des* 30 *personnes dans ces tables y a-t-il ?*
Il y a $\binom{30}{4,4,4,4,4,2,2,2,2,2} = \dfrac{30!}{(4! \cdot 2!)^5}$ rangements possibles.

e) *Le premier serveur doit servir* 10 *pizzas Margherita à* 5 *personnes (disons les personnes* $1, 2, 3, 4$ *et* 5*) qui ont commandé au moins une pizza Margherita, mais il ne se rappelle plus combien de pizzas Margherita chaque personne a commandé. Combien de possibilités va-t-il avoir de répartir les* 10 *pizzas Margherita entre les* 5 *personnes ?*
Il a $\binom{5+5-1}{4} = \binom{9}{4} = 126$ possibilités.

f) *Supposons maintenant que toutes les* 30 *personnes ont pris un menu composé par une pizza et soit de l'eau soit de la bière (en total* 20 *menus possibles). Supposons que tous les* 20 *menus ont été commandés. On appelle «choix» la fonction qui associe aux personnes le menu qu'elles ont choisi. Combien de fonctions «choix» possibles y a-t-il ?*
Il s'agit du nombre de fonctions surjectives d'un ensemble de 30 éléments vers un ensemble de 20 éléments, i.e.

$$\sum_{k=0}^{20} (-1)^{20-k} \binom{20}{k} k^{30}.$$

Exercice 3. *Soit* $S := \{[a,b,c,d] \in \mathbb{Z}^4 \mid a,b,c,d \geq 0$ *et* $a+b+c+d = 3\}$. *Montrer que*

$$\sum_{[a,b,c,d]\in S} \binom{3}{a,b,c,d} = 64.$$

On sait que

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^3 = \sum_{[a,b,c,d]\in S} \binom{3}{a,b,c,d} x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d,$$

de manière que

$$64 = (1+1+1+1)^3 = \sum_{[a,b,c,d]\in S} \binom{3}{a,b,c,d} 1^a 1^b 1^c 1^d = \sum_{[a,b,c,d]\in S} \binom{3}{a,b,c,d}.$$