
CONTRÔLE CONTINUE N° 2 – B

NOM Prénom :

Numéro d'étudiant :

Barème : Ex1-5 points, Ex2-10 points, Ex3-5 points.

TOUTE RÉPONSE DOIT ÊTRE JUSTIFIÉE

LES DOCUMENTS SONT AUTORISÉS

CALCULATRICE ET TELEPHONES PORTABLES NON AUTORISÉS

Exercice 1. Soit $\mathcal{E} := \{n = \sum_{i=0}^2 n_i \cdot 10^i \mid n_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\} = \{111, 112, 113, 114, 115, \dots, 551, 552, 553, 554, 555\} \subseteq \mathbb{N}$.

a) Calculer $\#\mathcal{E}$.

$$\#\mathcal{E} = \#\{1, 2, 3, 4, 5\}^3 = 5^3 = 125.$$

b) Soit $\mathcal{A} := \{n = \sum_{i=0}^2 n_i \cdot 10^i \in \mathcal{E} \mid n_i \neq n_j \text{ si } i \neq j\} \subseteq \mathcal{E}$. Calculer $\#\mathcal{A}$.

Il s'agit du nombre d'arrangements des chiffres 1, 2, 3, 4 et 5 dans trois places.

$$\text{Donc } \#\mathcal{A} = [5]_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

c) Soit $\mathcal{I} := \{n \in \mathcal{E} \mid n \text{ est pair}\} \subseteq \mathcal{E}$. Calculer $\#\mathcal{I}$.

Il faut que le dernier chiffre soit 2 ou 4.

$$\text{Donc } \#\mathcal{I} = \#\{(\{1, 2, 3, 4, 5\}^2 \times \{2, 4\})\} = 5^2 \cdot 2 = 50.$$

d) Calculer $\#(\mathcal{A} \cup \mathcal{I})$.

On a, comme ci-dessus, que $\#(\mathcal{I} \cap \mathcal{A}) = 2 \cdot [4]_2 = 24$.

$$\text{Donc } \#(\mathcal{I} \cup \mathcal{A}) = \#\mathcal{I} + \#\mathcal{A} - \#(\mathcal{I} \cap \mathcal{A}) = 86.$$

e) Soit $\mathcal{D} := \{n = \sum_{i=0}^2 n_i \cdot 10^i \in \mathcal{A} \mid n_i \neq 4, 5 \text{ et } n_i \neq i + 1\}$. Calculer $\#\mathcal{D}$.

Il s'agit du nombre de dérangements des trois chiffres 1, 2 et 3.

$$\text{Donc } \#\mathcal{D} = 3! \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = 3 - 1 = 2.$$

Exercice 2. Dans une pizzeria il y a 28 personnes. Le menu propose 10 pizzas, 2 desserts et 6 boissons différentes. Il y a 2 serveurs qui servent 14 personnes chacun. On peut penser aux personnes comme numérotées de 1 à 28. Supposons que le premier serveur va servir les personnes de 1 à 14 et le deuxième de 15 à 28. **Toutes les questions qui suivent ont les hypothèses ci-dessus et elles sont indépendantes les unes des autres.**

a) Quel est le nombre d'ordres possibles dont les 2 serveurs vont servir les 28 personnes ?

Pour chaque serveur on a $14!$ ordres possibles, donc $(14!)^2$ ordres en total.

b) Combien de menus différents avec 1 pizza, 1 dessert et 1 boisson peut-on composer ?

On a $10 \cdot 2 \cdot 6 = 120$ menus possibles.

c) Supposons qu'il y a 4 tables pour 5 personnes chacune et 4 tables pour 2 personnes chacune. Combien de rangements des 28 personnes dans ces tables y a-t-il ?

Il y a $\binom{28}{5, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 2} = \frac{28!}{(5! \cdot 2!)^4}$ rangements possibles.

d) Il y a une personne qui veut prendre 2 pizzas différentes et 4 boissons différentes. Combien de possibilités va-t-il avoir ?

Il a $\binom{10}{2} \cdot \binom{6}{4} = 45 \cdot 15 = 675$ possibilités.

e) Le premier serveur doit servir 10 pizzas Margherita à 4 personnes (disons les personnes 1, 2, 3 et 4) qui ont commandé au moins une pizza Margherita, mais il ne se rappelle plus combien de pizzas Margherita chaque personne a commandé. Combien de possibilités va-t-il avoir de répartir les 10 pizzas Margherita entre les 4 personnes ?

Il a $\binom{6+4-1}{3} = \binom{9}{3} = 84$ possibilités.

f) Supposons maintenant que toutes les 28 personnes ont pris un menu composé par une pizza et soit de l'eau soit de la bière (en total 20 menus possibles). Supposons que tous les 20 menus ont été commandés. On appelle «choix» la fonction qui associe aux personnes le menu qu'elles ont choisi. Combien de fonctions «choix» possibles y a-t-il ?

Il s'agit du nombre de fonctions surjectives d'un ensemble de 28 éléments vers un ensemble de 20 éléments, i.e.

$$\sum_{k=0}^{20} (-1)^{20-k} \binom{20}{k} k^{28}.$$

Exercice 3. Soit $S := \{[a, b, c] \in \mathbb{Z}^3 \mid a, b, c \geq 0 \text{ et } a + b + c = 4\}$. Montrer que

$$\sum_{[a,b,c] \in S} \binom{4}{a, b, c} = 81.$$

On sait que

$$(x_1 + x_2 + x_3)^4 = \sum_{[a,b,c] \in S} \binom{4}{a, b, c} x_1^a x_2^b x_3^c,$$

de manière que

$$81 = (1 + 1 + 1)^4 = \sum_{[a,b,c] \in S} \binom{4}{a, b, c} 1^a 1^b 1^c = \sum_{[a,b,c] \in S} \binom{4}{a, b, c}.$$