RATTRAPAGE

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

Barême : Ex1-6 points, Ex2-8 points, Ex3-6 points.

TOUTE RÉPONSE DOIT ÊTRE JUSTIFIÉE

LES DOCUMENTS SONT AUTORISÉS

CALCULATRICE ET TELEPHONES PORTABLES NON AUTORISÉS

Exercice 1. *Combien y a-t-il de bijections f de $\{1, \dots, 12\}$ dans lui-même possédant :*

a) *la propriété : n est pair $\Rightarrow$ $f(n)$ est pair ?*
Il s'agit du nombre de bijection de $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ dans lui-même multiplié par le nombre de bijection de $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ dans lui-même, i.e. $6! \cdot 6! = 518400$.

b) *la propriété : n est divisible par 3 $\Rightarrow$ $f(n)$ est divisible par 3 ?*
Il s'agit du nombre de bijection de $\{3, 6, 9, 12\}$ dans lui-même multiplié par le nombre de bijection de $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$ dans lui-même, i.e. $4! \cdot 8! = 967680$.

c) *ces deux propriétés à la fois ?*
Il s'agit du nombre de bijection de $\{6, 12\}$ dans lui-même multiplié par le nombre de bijection de $\{2, 4, 8, 10\}$ dans lui-même multiplié par le nombre de bijection de $\{3, 9\}$ dans lui-même multiplié par le nombre de bijection de $\{1, 5, 7, 11\}$ dans lui-même, i.e $2! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 4! = 2304$.

d) *au moins un de ces deux propriétés ?*
Il s'agit du nombre de l'union de a) et b), donc $518400 + 967680 - 2304 = 1483776$.

e) *Reprendre les questions* a) *et* b) *en remplaçant "bijection" par "application".*
Il s'agit du nombre d'applications de $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ dans lui-même multiplié par le nombre d'applications de $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ dans lui-même (a)), i.e. 6^{12}, et du nombre d'applications de $\{3, 6, 9, 12\}$ dans lui-même multiplié par le nombre d'applications de $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$ dans lui-même (b)), i.e. $4^4 \cdot 8^8$.

Exercice 2. *Dans un hôtel il y a* 20 *chambres numérotées de* 1 *à* 20*. Il y a* 2 *femmes des ménage qui doivent nettoyer* 10 *chambres chacune. Supposons que la première va nettoyer les chambres de* 1 *à* 10 *et la deuxième de* 11 *à* 20*.*

Toutes les questions qui suivent ont les hypothèses ci-dessus et elles sont indépendantes les unes des autres.

a) *Quel est le nombre d'ordres possibles dont les* 2 *femmes de ménage vont nettoyer les* 20 *chambres ?*
Le nombre d'ordres possibles est $10! \cdot 10!$ (le nombre de permutations des 10 chambres pour la première, fois le nombre de permutations des 10 chambres pour la deuxième).

b) *Supposons qu'il y a* 10 *chambres simples et* 10 *chambres doubles. Combien de rangements de* 30 *personnes dans ces chambres y a-t-il ?*
Par le cours, on sait que le nombre de rangements est

$$\binom{30}{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2} = \frac{30!}{(2!)^{10}}.$$

c) *La première femme de ménage a à disposition, par erreur,* 15 *kits d'acceuil et elle doit le distribuer dans ses* 10 *chambres. Combien de possibilités va-t-elle avoir de répartir les kits entre les chambres ?*
Par le cours, on sait que ce nombre est

$$\binom{15+10-1}{9} = \binom{24}{9} = \frac{24!}{9!15!}.$$

d) *La deuxième femme de ménage a à dispotion, par erreur,* 5 *kits d'acceuil et elle doit le distribuer dans ses* 10 *chambres, en laissant* 5 *chambres sans kit. Combien de possibilités a-t-elle de choisir les chambres où elle ne mets pas de kit ?*
Il s'agit du nombre de sous-ensemble à 5 éléments dans un ensemble à 10 éléments, i.e. $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!}$.

Exercice 3. *Déterminer le nombre de mots distincts* (*on n'exige pas que ces mots aient un sens*) *que l'on peut former avec* 6 *voyelles et* 20 *consonnes,*

a) *chaque mot étant composé de* 3 *consonnes et* 2 *voyelles, en excluant les mots qui renferment des consonnes consécutives.*
   La seule possibilité pour n'avoir pas de mots qui renferment des consonnes consécutives est d'avoir c+v+c+v+c (c=consonne, v=voyelle). En total on a $20 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 20$ mots.

b) *chaque mot étant composé de* 2 *consonnes distinctes et* 2 *voyelles distinctes, en excluant les mots qui renferment des consonnes consécutives.*
   On a v+c+v+c ou c+v+c+v et on n'a pas de répétitions. Donc en total on a $6 \cdot 20 \cdot 5 \cdot 19 + 20 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 5 = 2 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 6 \cdot 5$ mots.

c) *chaque mot étant composé de* 3 *consonnes et* 2 *voyelles, en excluant les mots qui renferment* 3 *consonnes consécutives.*
   On a v+c+v+c+c ou v+c+c+v+c ou c+v+v+c+c ou c+v+c+v+c ou c+v+c+c+v ou c+c+v+v+c ou c+c+v+c+v, donc en total on a $7 \cdot 20^3 \cdot 6^2$ mots

d) *chaque mot étant un anagramme du mot* LETTRE.
   Par le cours, on sait que ce nombre est
$$\binom{6}{1,2,2,1} = \frac{6!}{(2!)^2}.$$